√

Placering af mellemlagre og bestemmelse af en fælles seriestørrelse imellem disse for en stationær produktion.

Af JENS OVE RIIS*)

Mens et lager meget ofte er blevet opfattet og behandlet som en isoleret enhed, er det tanken her at betragte lageret som et led i en produktionskæde. I praksis kan det være meget vanskeligt at angive alle de faktorer, der øver indflydelse på et produktionssystem, og at fastlægge enten et analytisk eller et empirisk udtryk for de enkelte faktorers indvirkning. For imidlertid at afklare nogle af de begrebsmæssige vanskeligheder, der opstår, når man indlader sig på at studere et produktionssystem nærmere, vil det være klogt mange gange at starte med at opstille en meget simpel model. Når man har fundet frem til en løsning, som med de stærkt forenklede antagelser er optimal, kan modellen udvides.

1. Problemformulering.

Den opgave, som i det følgende vil blive søgt løst, går ud på at konstruere et styringssystem for et emne, som gennemløber en række operationer. Problemet kendes inden for serieproduktion, hvor et produkt som regel består af adskillige emner, der hver for sig må igennem en række operationer. I det følgende vil vi betragte et enkelt emne.

En stationær produktion betragtes, dvs. at efterspørgsel, leveringstid og operationstider er deterministiske og konstante. Produktionen omfatter et enkelt emne, som tænkes at skulle gennemløbe en række operatio-

*) Civilingeniør, Driftsteknisk Institut, Danmarks tekniske Højskole. (Manuskript modtaget juli 1965).

Placering af mellemlagre og bestemmelse af en fælles seriestørrelse imellem disse for en stationær produktion.

Af Jens Ove Riis*)

Mens et lager meget ofte er blevet opfattet og behandlet som en isoleret enhed, er det tanken her at betragte lageret som et led i en produktionskæde. I praksis kan det være meget vanskeligt at angive alle de faktorer, der øver indflydelse på et produktionssystem, og at fastlægge enten et analytisk eller et empirisk udtryk for de enkelte faktorers indvirkning. For imidlertid at afklare nogle af de begrebsmæssige vanskeligheder, der opstår, når man indlader sig på at studere et produktionssystem nærmere, vil det være klogt mange gange at starte med at opstille en meget simpel model. Når man har fundet frem til en løsning, som med de stærkt forenklede antagelser er optimal, kan modellen udvides.

1. Problemformulering.

Den opgave, som i det følgende vil blive søgt løst, går ud på at konstruere et styringssystem for et emne, som gennemløber en række operationer. Problemet kendes inden for serieproduktion, hvor et produkt som regel består af adskillige emner, der hver for sig må igennem en række operationer. I det følgende vil vi betragte et enkelt emne.

En stationær produktion betragtes, dvs. at efterspørgsel, leveringstid og operationstider er deterministiske og konstante. Produktionen omfatter et enkelt emne, som tænkes at skulle gennemløbe en række operatio-

*) Civilingeniør, Driftsteknisk Institut, Danmarks tekniske Højskole. (Manuskript modtaget juli 1965).

ner på forskellige maskiner. Forud for den første operation er anbragt et råvarelager og efter den sidste et færdigvarelager. Endvidere kan der anbringes et antal mellemlagre. Idet der tages hensyn til lageropbevaringsomkostninger, opstillingsomkostninger for de enkelte operationer og omkostninger ved at have kapital bunden i emner under fremstilling søges fastlagt 1) en optimal placering af mellemlagre for denne række af operationer og 2) den bedste seriestørrelse imellem lagrene.

For hver operation er der givet opstillingsomkostninger og omkostninger ved at binde kapital i emner under bearbedning og på lager. Ud fra Wilson's formel, som senere vil blive benyttet – omend i en ændret udgave, kan den optimale seriestørrelse fastlægges for hver operation, idet man tænker sig mellemlagre indskudt imellem alle operationer. De herved bestemte seriestørrelser vil variere fra operation til operation. Spørgsmålet er nu, om det vil kunne betale sig at fjerne et mellemlager imellem to operationer. Herved spares omkostninger til lagerhold, men de øvrige omkostninger stiger, fordi den fælles seriestørrelse adskiller sig fra de to optimale, der blev bestemt hver for sig. Motivet til at oprette et lager imellem to grupper ligger altså i forskellige seriestørrelser for de to grupper. Eftersom modellen er deterministisk, kan sikkerhedsmotivet udelades.

De mulige kombinationer af mellemlagre vil, hvis antallet af operationer ikke er beskedent, være talrige, hvorfor det vil være et stort arbejde først at finde frem til de mulige placeringer og dernæst at udregne de hermed forbundne omkostninger. Ved hjælp af dynamisk programmering kan en optimal politik for placering af mellemlagre bestemmes, samtidig med at en fælles seriestørrelse for operationer imellem disse mellemlagre fastlægges.

Til brug for den endelige løsning opstilles de relevante omkostninger, der knytter sig til en enkelt række operationer uden noget mellemlager indskudt, men med et lager forud for og et efter operationerne. En fælles seriestørrelse for denne række vil blive bestemt.

2. *Bestemmelse af en fælles seriestørrelse for N operationer imellem to lagre.*

Indledningsvis må afgrænses det system, hvis variable øver indflydelse på fastlæggelse af den fælles seriestørrelse.

Hvis det forudsættes, at lageromkostningerne er en lineær funktion af den gennemsnitlige lagerbeholdning, og at forholdet imellem to på hinanden følgende seriestørrelser er et helt tal, vil det blive vist, at en fælles seriestørrelse kan bestemmes optimalt for en række operationer, hvor der forud for den første operation og efter den sidste findes et mellemlager, uafhængigt af, hvilken seriestørrelse der vælges før det første mellemlager og efter det sidste. Dette forhold, som er formuleret i nedenstående theorem, bevirker, at vi kan forenkle udregningerne og begrænse det relevante system. I stedet for at betragte alle operationer mellem råvarelager og færdigvarelager og bestemme en række seriestørrelser for hver gruppe af operationer, som er afgrænset af mellemlagre, under eet, så kan bestemmelsen opdeles på en sådan måde, at en optimal seriestørrelse for en gruppe operationer fastsættes for sig uafhængig af de andre seriestørrelser. Vi kan skematisk vise en gruppe operationer, for hvilke en fælles optimal seriestørrelse ønskes bestemt, som følger

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots \rightarrow & \nabla & \rightarrow & \square & \rightarrow & \square & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \square & \rightarrow & \nabla & \rightarrow \cdots \\ & Q_1 & q & & q & & q & & q & & q & Q_2 & \end{array}$$

Theorem:

Hvis lageromkostningerne er en lineær funktion af den gennemsnitlige lagerbeholdning, vil en fælles seriestørrelse for en gruppe operationer, der er afgrænset af mellemlagre*), kunne bestemmes optimalt uafhængigt af de foregående og efterfølgende operationers seriestørrelse.

Bevis for Theorem.

Der indføres følgende betegnelser:

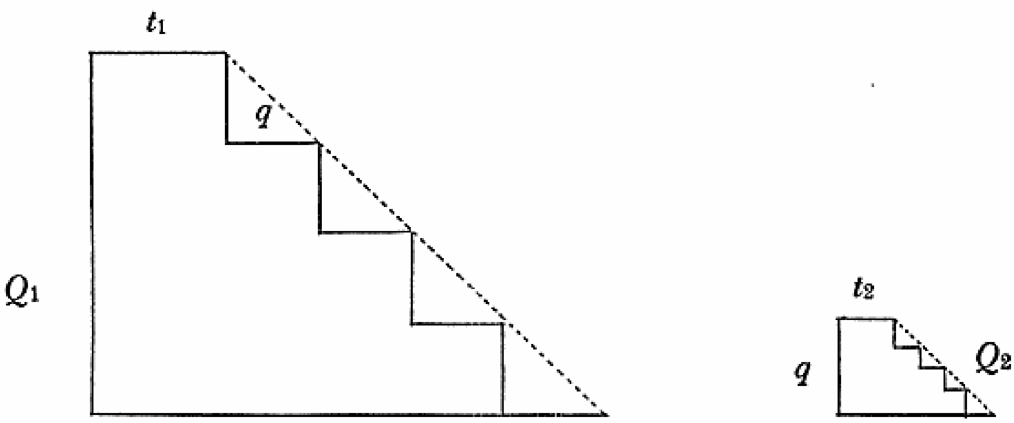
A = antal producerede enheder pr. år.

c_l = lageromkostningsfaktoren (% pr. år).

P_1 = emnets værdi ved 1. mellemlager (kr./stk.).

P_2 = emnets værdi ved 2. mellemlager, $P_2 > P_1$.

(en enhed, som opbevares på 1. mellemlager et år, påføres lageromkostningerne $c_l \cdot P_1$).



*) som kan være råvarelager eller færdigvarelager.

Det forudsættes, at $\frac{Q_1}{q} = n_1$ og $\frac{q}{Q_2} = n_2$, hvor n_1 og n_2 er positive heltal.

Tiden, i hvilken der aftrækkes q emner, er $\frac{q}{A}$, mens $\frac{A}{q}$ angiver antal bestillinger pr. år, hver på q enheder. Idet t_1 står for den tid (i år), en serie på Q_1 får lov til at ligge på 1. mellemlager, før et aftræk på q enheder finder sted (og tilsvarende for t_2), vil de årlige lageromkostninger for de to lagre blive

$$O_l = \frac{A}{Q_1} c_l \cdot P_1 Q_1 t_1 + \frac{A}{Q_1} \tfrac{1}{2} Q_1 P_1 c_l \frac{Q_1}{A} - \frac{A}{Q_1} \tfrac{1}{2} q P_1 c_l \frac{q}{A} \frac{Q_1}{q}$$

$$+ \frac{A}{q} c_l \cdot P_2 q \cdot t_2 + \frac{A}{q} \tfrac{1}{2} P_2 c_l \frac{q}{A} - \frac{A}{q} \tfrac{1}{2} Q_2 P_2 c_l \frac{Q_2}{A} \frac{q}{Q_2}.$$

$$O_l = c_l \cdot P_1 \cdot [A \cdot t_1 + \tfrac{1}{2} Q_1 - \tfrac{1}{2} q] + c_l \cdot P_2 [A \cdot t_2 + \tfrac{1}{2} q - \tfrac{1}{2} Q_2]$$
$$= c_l \cdot A \, [P_1 \cdot t_1 + P_2 \cdot t_2] + \tfrac{1}{2} c_l \, [Q_1 \cdot P_1 + q \, (P_2 - P_1) - Q_2 \cdot P_2] \ \text{kr./år}$$

Da funktionen for de samlede relevante lageromkostninger ikke indeholder produktled ($Q_1 \cdot q$ eller $q \cdot Q_2$), vil alle led der indeholder Q_1 og Q_2 udgå ved diffetiation med hensyn til q. Under de givne forudsætninger kan en optimal værdi af q således bestemmes uafhængigt af Q_1 og Q_2.

Modellens omkostninger.

Det system, der betragtes, kan skitseres som tidligere vist

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \rightarrow & \nabla & \rightarrow & \square & \rightarrow & \square & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \square & \rightarrow & \nabla & \rightarrow \\ Q_1 & & q & & q & & q & & q & & q & & Q_2 \\ & & & 1 & & 2 & & & & N & & & \end{array}$$

og omfatter således to mellemlagre og N operationer, der ligger imellem de to lagre.

Der introduceres tre omkostningstyper: bestillingsomkostninger, lageropbevaringsomkostninger og omkostninger for kapital bunden i emner i arbede.

Bestillingsomkostninger (igangsætningsomkostninger) for hver operation $b_n(q)$ – for $n = 1, 2, \ldots, N$ – kan være en funktion af q; men vil ofte være konstant i visse intervaller af q. Idet der skal produceres A emner pr. år, bliver de årlige bestillingsomkostninger

$$\frac{A}{q} \sum_{n=1}^{N} b_n(q)$$

Lageropbevaringsomkostninger forudsættes at være en lineær funktion af kapitalen bunden i lagrene. Idet t_1 og t_2 kan sættes til nul for en optimal tilpasning af bestillingerne (leveringstiden forudsættes også at være deterministisk og konstant), og de led, der afhænger af Q_1 og Q_2 ikke har nogen interesse, bliver de for bestemmelse af q relevante lageromkostninger – iflg. Theoremet:

$$l(q) = \tfrac{1}{2} c_l (P_2 - P_1) \cdot q \text{ kr./år.}$$

Af udtrykket for $l(q)$ kan der drages en interessant konklusion, som dog mere har teoretisk og begrebsmæssig interesse end praktisk betydning. Hvis nemlig et lager efterfølges af et andet inden for en virksomhed, så skal i udtrykket for produktionsværdien kun indsættes stigningen i produktionsværdi siden det foregående lager. Dette understreger, at der må udvises forsigtighed, når man ønsker at anvende en udviklet lagermodel på et lager i en produktionsvirksomhed, hvor der som regel er flere lagre i serie.

Omkostninger for kapitalbinding af emner i arbejde er den omkostning, som er vanskeligst at bestemme, fordi der indføres nogle størrelser, som i almindelighed vil variere. I denne model forudsætter vi imidlertid, at alt forløber stationært og deterministisk, og at emnerne i en serie samlet transporteres fra operation (maskine) til operation (maskine).

Lad $r_n(q)$ betegne kapitalbindingsomkostningerne for produktion i arbejde pr. år for den n'te operation. Det antages, at $r_n(q)$ er en funktion af den tid, emnet opholder sig ved operationen, og af emnets produktionsværdi på dette tidspunkt. Der indføres følgende betegnelser:

p_n = emnets produktionsværdi efter den n'te operation, (kr./stk.). Herved forstås i almindelighed de påløbne variable omkostninger.

tv_n = den tid, et parti på q emner må vente før den n'te operation på at blive bearbejdet.

to_n = opstillingstiden ved den n'te operation for et parti på q enheder.

ts_n = styktiden ved den n'te operation for et parti på q enheder.

Både to_n og ts_n kan være en stykvis konstant funktion af q, idet f. eks. overgang fra drejebænk til revolverbænk vil ændre tiderne.

I den tid, emnerne venter på at blive bearbejdet, er der i virkeligheden tale om en lagring. Men da emnerne efter den n'te operation tænkes transporteret samlet til næste operationssted, er der ikke tale om anbringelse på et egentlig, fysisk lager. Omkostningerne ved, at der ialt går $tv_n + to_n$ tidsenheder fra det øjeblik, hvor sidste emne i serien blev færdig ved den $(n-1)$'te operation, og til bearbejdningen ved den n'te operation begynder, bliver

$$c_p \cdot (tv_n + to_n) \cdot p_{n-1} \cdot q \qquad \text{kr./parti} \cdot \text{operation},$$

hvor c_p er omkostningsfaktoren (% pr. tidsenhed). Såfremt det antages, at produktionsværdien vokser lineært under selve bearbejdningen, vil kapitalbindingen under bearbejdningen være

$$\frac{p_n + p_{n-1}}{2} \cdot q.$$

Da alle emner i serien q venter $ts_n \cdot q$ tidsenheder, bliver omkostninger ved kapitalbinding under selve bearbejdningen

$$c_p \cdot ts_n \cdot q \cdot \frac{p_n + p_{n-1}}{2} \cdot q \qquad \text{kr./parti} \cdot \text{operation}.$$

De samlede kapitalbindingsomkostninger, når et parti på q emner passerer den n'te operation, bliver

$$c_p \left[(tv_n + to_n) \cdot p_{n-1} + ts_n \cdot q \cdot \frac{p_n + p_{n-1}}{2} \right] \cdot q \qquad \text{kr./parti} \cdot \text{operation}.$$

Da et parti på q enheder årligt bestilles A/q gange, bliver de årlige kapitalbindingsomkostninger for den n'te operation

$$r_n(q) = c_p \cdot A \left[(tv_n + to_n) \cdot p_{n-1} + ts_n \cdot q \cdot \frac{p_n + p_{n-1}}{2} \right] \qquad \text{kr./år} \cdot \text{operation}.$$

Når alle N operationer gennemløbes, bliver de totale årlige kapitalbindingsomkostninger

$$\sum_{n=1}^{N} r_n(q) = c_p \cdot A \sum_{n=1}^{N} \left[(tv_n + to_n) \cdot p_{n-1} + ts_n \cdot q \cdot \frac{p_n + p_{n-1}}{2} \right] \qquad \text{kr./år}.$$

De samlede årlige relevante omkostninger bliver da

$$K = \frac{A}{q} \sum_{n=1}^{N} b_n(q) + \tfrac{1}{2} c_l (P_2 - P_1) \cdot q + c_p \cdot A \sum_{n=1}^{N} \left[(tv_n + to_n) \cdot p_{n-1} + ts_n \cdot q \frac{p_n + p_{n-1}}{2} \right] \qquad \text{kr./år}.$$

Eftersom der kun i udtrykket for K findes én handlingsparameter, nemlig q, kan en optimal værdi af q bestemmes ved differentiation af K med hensyn til q.

Det kan imidlertid være rimeligt først at se lidt på udtrykket for K. Det bemærkes, at tv_n og to_n ikke indgår i noget led, der afhænger direkte af q. Lad os antage, at tv_n og to_n er konstante i visse intervaller af q. Da vil de afledede med hensyn til q være nul, og vi kan i denne forbindelse se bort fra disse to led, sålænge vi befinder os i et af disse intervaller.

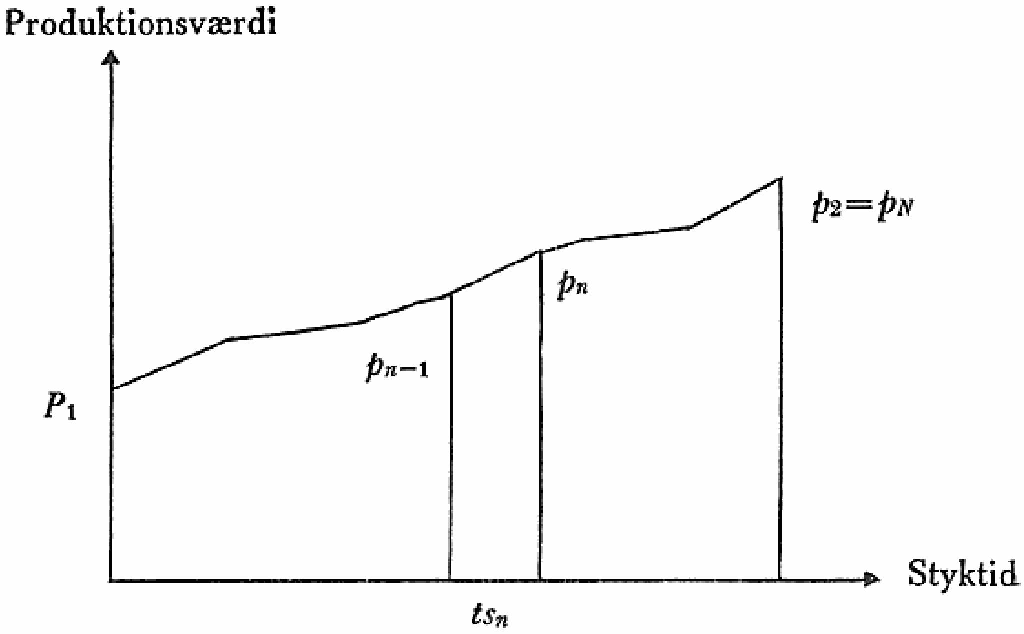
Endvidere vil $b_n(q)$ i mange tilfælde være en konstant funktion af q. Hvis dette antages, kan følgende betegnelse indføres

$$B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$$

Endvidere indføres

$$P_N = \sum_{n=1}^{N} ts_n\,(p_n + p_{n-1}),$$

og det vil kunne ses, at P_N angiver det dobbelte areal under den nedenfor viste kurve.



Under disse forudsætninger, (1) tv_n og to_n er stykvis konstante og (2) $b_n(q)$ er uafhængig af q), vil en differentiation af K give

$$\frac{dK}{dq} = -\frac{A \cdot B_N}{q^2} + \tfrac{1}{2} c_l\,(P_2 - P_1) + \tfrac{1}{2} c_p \cdot A \cdot P_N.$$

$$\frac{dK}{dq} = 0 \quad \text{for} \quad q = \sqrt{\frac{2A \cdot B_N}{c_l\,(P_2 - P_1) + c_p \cdot A \cdot P_N}}$$

Det må naturligvis forudsættes, at den krævede maskinkapacitet er til stede, hvilket matematisk kan udtrykkes

$$\frac{A}{q}\,[ts_n q + to_n + tv_n] \leqslant 1 \qquad \text{for enhver værdi af } n = 1, 2, \ldots, N,$$

idet de angivne tider er målt i år.

Som et eksempel på, hvor store afvigelser der opnås ved at benytte ovenstående udtryk i stedet for Wilson's formel, antages en jævn stigning i produktionsværdien i gennemløbstiden og samme maskin- og operatørtid pr. emne for operationerne. Man får da

$$P_N = N \cdot t_s \cdot (P_2 + P_1).$$

Endvidere antages det, at der er 10 operationer i rækken, og at hver maskine i gennemsnit benyttes $1/5$ af året til det pågældende emne, og yderligere at $t_s \geqslant (t_o + t_v)/q$. Da fås

$$P_N = (P_2 + P_1) \cdot 10 \cdot \frac{1}{2A} = 2\,(P_2 + P_1)/A.$$

for $c_l = c_p$ fås

$$q = \sqrt{\frac{2AB_N}{c_l\,(P_2 - P_1 + 2P_2 + 2P_1)}} = \sqrt{\frac{2AB_N}{c_l\,(3P_2 + P_1)}}$$

Hvis $P_1 = \frac{1}{4}P_2$, fås

$$q = \frac{2}{\sqrt{13}} \sqrt{\frac{2AB_N}{c_l P_2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\; q_{\text{Wilson}}$$

Dersom man holder fast ved q_{Wilson} – mens man burde vælge $\frac{2}{\sqrt{13}}\, q_W$ – lider man herved et ekstra tab på 18 %, bestemt ved

$$\frac{O}{O_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 1{,}18.$$

I beviset for det i begyndelsen af dette afsnit nævnte theorem er det blevet forudsat, at Q_1 var delelig med q og q igen med Q_2. Når en fælles seriestørrelse er blevet bestemt for hver gruppe operationer, kan der finde en tilpasning sted af de enkelte gruppers seriestørrelser. En sådan tilpasning kunne tænkes baseret på en afvejning af henholdsvis ekstraomkostninger hidrørende fra seriestørrelsernes afvigelser fra de optimale værdier og ekstraomkostninger ved, at seriestørrelsen i en gruppe ikke er delelig med seriestørrelsen i den følgende gruppe. Denne tilpasning viser sig at være et meget kompliceret problem, hvis løsning i det væsentlige må siges kun at have teoretisk interesse, fordi det beløb, der kan spares, ofte er mindre end den nøjagtighed, hvormed de samlede omkostninger kan fastlægges – betinget af ubestemtheden for de indgående parametre. I Appendix er dette forhold nærmere belyst, og en iterationsmetode anvises, som ikke fra starten forudsætter nogen bestemt lagertype. I det foregående er omtalt den type, hvor $Q_1 \geqslant 2$, men for at sikre en så bred optimal løsning på problemet med at placere så få mellemlagre som muligt, vil det ud fra et teoretisk synspunkt være ønskeligt, om man ogs undersøgte muligheden af at placere lagre af typerne: $1 < Q_1/q < 2$ og $O < Q_1/q < 1$.

3. *Placering af mellemlagre og bestemmelse af en fælles seriestørrelse imellem disse.*

I det foregående afsnit er der blevet udledt udtryk for tre omkostningsfunktioner med henblik på at bestemme en fælles seriestørrelse for en gruppe operationer, som et emne skal gennemløbe. Disse omkostningsfunktioner kan nu benyttes til at fastlægge en optimal placering af mellemlagre for en række operationer. Udgangssituationen er følgende: Et emne skal bearbejdes på N maskiner (én operation pr. maskine). Efterspørgselen og operationstiderne er deterministiske og konstante. Mens det forudsættes, at der findes et råvarelager før den første operation, vil det ikke være nødvendigt at forudsætte et færdigvarelager efter den sidste operation, hvis der til hver mulig værdi af seriestørrelsen Q_2 er knyttet en omkostningsfunktion $f(Q_2)$ hidrørende fra den påvirkning, emnerne er udsat for efter den N'te operation

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & & & & & \triangledown & & & & & & & & & & \\ \triangledown & \rightarrow & \square & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \square & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \square & \rightarrow & \square & \rightarrow \cdots \rightarrow & \square & \rightarrow & \triangledown \\ & & 1 & & & & i & & & & n & & n+1 & & N & & \end{array}$$

I tilknytning til angivelserne på skitsen nævnes det, at n henføres til den n'te operation efter råvarelageret. i angiver den operation, der – blandt de operationer, forud for hvilke et mellemlager er indskudt – ligger nærmest operation n, $1 \leqslant i \leqslant n$. Fra den i'te operation og til den n'te findes der altså ikke noget mellemlager. Spørgsmålet er, om der efter den n'te operation skal indskydes et mellemlager. På forhånd kan det siges, at mellemlagre kan anbringes på 2^N måder, hvilket forholdsvis hurtigt bliver et stort tal.

De i afsnit 2 benyttede betegnelser for omkostninger anvendes stort set også her:

$l(q)$ = lageromkostninger pr. år, når tilgangen til lager sker med q emner pr. gang. Som tidligere forudsættes $l(q)$ at være en lineær funktion af den gennemsnitlige lagerbeholdning.

$r_n(q)$ = kapitalbindingsomkostninger pr. år for emner under bearbedning ved den n'te operation, når seriestørrelsen er q.

$b_n(q)$ = bestillingsomkostninger (igangsætningsomkostninger) pr. år for den n'te operation, når seriestørrelsen er q.

$$R_{in}(q) = \sum_{t=1}^{n} r_t(q) \quad \text{og} \quad B_{in}(q) = \sum_{t=1}^{n} b_t(q)$$

Den kriteriefunktion, som vælges, er summen af de tre ovenfor nævnte omkostningstyper for det betragtede system, der består af N operationer, et halvt råvarelager og et halvt færdigvarelager. Bestemmelsen af den optimale placering af mellemlagre tænkes udført ved hælp af dynamisk programmering, hvorved problemet deles op i en sekvens af N beslutninger, der hver afgør, om der efter den betragtede operation (den n'te) skal placeres et mellemlager eller ej*).

Lad os starte med at betragte den sidste operation, $n = N$. Spørgsmålet er her, om det vil kunne betale sig at indføre et færdigvarelager efter den N'te operation. Omkostningerne vil imidlertid afhænge af, hvormange operationer der er indskudt efter det sidste mellemlager. Derfor må omkostningerne for den sidste operation udregnes som en funktion af den i'te operation, fordi det er den første operation efter det sidste mellemlager. Omkostningerne for de to alternativer må da sammenlignes for enhver værdi af parameteren, i, i intervallet $1 \leqslant i \leqslant N$.

a. Hvis der indføres et færdigvarelager umiddelbart efter den N'te operation må den seriestørrelse, der skal benyttes ved udregning af den N'te operations omkostninger fastlægges ved at opveje omkostningerne fra og med den i'te operation til og med færdigvarelageret, dvs.

$$\underset{q}{\text{Min}}\,[R_{iN}(q) + B_{iN}(q) + l(q)].$$

Den herved bestemte fælles optimale seriestørrelse for de $N-i+1$ operationer er den, der skal indgå i bestemmelsen af omkostningerne for den N'te operation. Eftersom der er indskudt et mellemlager (færdigvarelager) efter den N'te operation, kan en optimal værdi af Q_2 fastlægges uafhængig af $q_N(i)$. De samlede omkostninger fra og med den N'te operation bliver da

$$O_a = r_N(q_N(i)) + b_N\,(q_N(i)) + l(q_N(i)) + f(Q_{2\ \text{opt.}})$$

b. Dersom der ikke indskydes et færdigvarelager efter den N'te operation, må der fastlægges en seriestørrelse, q' ud fra følgende udtryk

$$\underset{q'}{\text{Min}}\,[R_{iN}(q) + B_{iN}(q) + f(q)],$$

idet der ikke optræder nogen lageromkostninger udover dem, der kan være inkluderet i $f(q)$. De samlede minimale omkostninger fra og med den N'te operation for alternativ b fås da ved at indsætte den ovenfor bestemte seriestørrelse, q'_N i følgende udtryk

*) Den her opstillede model har væsentlige træk tilfælles med en model, som J. T. Ross Jackson og Peter M. Pruzan har opstillet til bestemmelse af en optimal placering af inspektionsposter ved linieproduktion. Iøvrigt har Flemming Tamstorf i sit eksamensprojekt (1964) benyttet dynamisk programmering til placering af inspektionsposter.

$O_b = r_N(q'_N(i)) + b_N \ (q'_N(i)) + f(q'_N).$

Idet vi definerer

$F_n(i) =$ de minimale relevante omkostninger pr. år for de operationer, der forløber fra og med den n'te operation til og med færdigvarelageret, når der sidst var et mellemlager før den *i'te operation* $(1 \leqslant i \leqslant n)$, og når en optimal politik følges

fås

$$F_N(i) = \text{Min}\ [O_a, O_b],$$

dvs.

$$F_N(i) = \underset{a,b}{\text{Min}} \begin{bmatrix} \text{a: } r_N(q_N(i)) + b_N\,(q_N(i)) + l(q_N(i)) + f(Q_{2\ \text{opt.}}) \\ \text{b: } r_N(q_N(i)) + b_N\,(q'_N(i)) + f(q'_N) \end{bmatrix}$$

for enhver værdi af i, $1 \leqslant i \leqslant N$.

Hvis man ønsker at se en analogi til de systembegreber, der bl. a. knytter sig til dynamisk programmering, kan man opfatte systemets tilstand ved den n'te operation som det antal operationer, der går forud for det sidste mellemlager før operation n; dvs. i, $1 \leqslant i \leqslant n$ kan være systemets tilstandsvariable. Den beslutningsvariabel, der knyttes til hver operations tilstand, kan her kun antage to værdier: a) der indskydes et mellemlager mellem operation n og $(n+1)$ og b) der indskydes ikke noget mellemlager mellem den n'te og den $(n+1)$'te operation.

Når vi går videre til den næstsidste operation, $n = N-1$, bliver opgaven at bestemme, om der skal være et mellemlager umiddelbart efter den $(N-1)$'te operation. Vi må altså sammenligne omkostningerne for de to alternativer for enhver værdi af vores parameter (tilstand) i, $1 \leqslant i \leqslant N-1$.

a. Hvis der indføres et mellemlager mellem den $(N-1)$'te og den N'te operation, må den seriestørrelse, der skal benyttes ved udregning af den $(N-1)$'te operations omkostninger fastlægges ved at opveje omkostningerne fra og med den i'te operation til og med den $(n-1)$'te, dvs.

$$\underset{q}{\text{Min}}\ [R_{iN-1}(q) + B_{iN-1}(q) + l(q)].$$

Herved bestemmes $q_{N-1}(i)$ for enhver værdi af i, $1 \leqslant i \leqslant N-1$. De samlede omkostninger for de to sidste operationer, såfremt der indføres et mellemlager efter den $(N-1)$'te operation, bliver da

$$O_a = r_{N-1}(q_{N-1}(i)) + b_{N-1}\ (q_{N-1}(i)) + l(q_{N-1}(i)) + F_N(N),$$

idet $F_N(N)$ – iflg. definitionen – er de minimale omkostninger for den sidste operation, hvis der indføres et mellemlager umiddelbart før den N'te operation. I omkostningerne for den $(N-1)$'te operation er indsat den seriestørrelse $q_{N-1}(i)$, som blev bestemt ved minimering af de samlede omkostninger fra og med den i'te operation til og med den $(N-1)$'te.

b. Dersom der ikke indskydes et mellemlager mellem den $(N-1)$'te operation og den N'te, er den fælles optimale seriestørrelse den samme som for den N'te operation, $q_N(i)$, fordi denne størrelse er fastlagt ved at opveje de samlede omkostninger for de $N+1 - i$ sidste operationer. Vi får da

$$O_b = r_{N-1}(q_N(i)) + b_{N-1}\ (q_N(i)) + F_N(i);$$

der optræder ikke lageromkostninger i forbindelse med den $(N-1)$'te operation, da der ikke er indskudt noget mellemlager. De lageromkostninger, der optræder efter den N'te operation er medregnet i $F_N(i)$.

$F_{N-1}(i)$ bestemmes da som følger

$$F_{N-1}(i) = \underset{a,b}{\text{Min}} \begin{bmatrix} \text{a: } r_{N-1}(q_{N-1}(i)) + b_{N-1}\,(q_{N-1}(i)) + l(q_{N-1}(i)) + F_N(N) \\ \text{b: } r_{N-1}(q_N(i)) + b_{N-1}\,(q_N(i)) + F_N(i) \end{bmatrix}$$

for enhver værdi af i, $1 \leqslant i \leqslant N-1$.

Af hensyn til de senere regninger sætter $q_{N-1}(i)$ lig med den seriestørrelse, der indgår i det minimale af de to udtryk (enten a eller b), og som således gælder for den $(N-1)$'te operation.

For den tredie sidste operation, $n = N-2$ fås $F_{N-2}(i)$ på tilsvarende måde. Først udregnes en optimal seriestørrelse, q_{N-2}(i) fælles for de $(N-2) - i+1$ operationer, der starter med den i'te og slutter med den $(N-2)$'te:

$$\underset{q}{\text{Min}}\ [R_{iN-2}(q) + B_{iN-2}(q) + l(q)] \quad \text{for} \quad 1 \leqslant i \leqslant N-2.$$

Heraf bestemmes $q_{N-2}(i)$, der benyttes i alternativ a.

Den optimale beslutning findes af følgende udtryk:

$$F_{N-2}(i) = \underset{a,b}{\text{Min}} \begin{bmatrix} \text{a: } r_{N-2}(q_{N-2}(i)) + b_{N-2}(q_{N-2}(i)) + l(q_{N-2}(i)) + F_{N-1}(N-1) \\ \text{b: } r_{N-1}(q_{N-1}(i)) + b_{N-2}\,(q_{N-1}(i)) + F_{N-1}(i) \end{bmatrix}$$

for $1 \leqslant i \leqslant N-2$.

$q_{N-2}(i)$ sættes lig med den seriestørrelse, som benyttes ved den $(N-2)$'te operation iflg. den optimale beslutning.

Det bemærkes, at $F_{N-2}(i)$ bl. a. udregnes på grundlag af $F_{N-1}(i)$ dvs. at kun den minimale værdi af omkostningerne for de to sidste operationer har interesse og ikke, hvilken politik der føres ved disse to operationer, i overensstemmelse med princippet for dynamisk programmering.

Alment – for den n'te operation, $n = 1, 2, \ldots, N$ – kan proceduren beskrives på følgende måde:

Først udregnes

$$\underset{q}{\text{Min}}\ [R_{iN}(q)+B_{iN}(q)+l(q)],$$

der for $1 \leqslant i \leqslant n$ bestemmer $q_n(i)$. Idet $q_{n+1}(i)$ angiver den seriestørrelse, der ifølge den optimale beslutning for den $(n+1)$'te operation skal anvendes ved denne operation, fås

$$F_n(i) = \underset{a,b}{\text{Min}} \begin{bmatrix} \text{a: } r_n(q_n(i))+b_n(q_n(i))+\ l(q_n(i))+F_{n+1}(n+1) \\ \text{b: } r_n(q_{n+1}(i))+b_n(_{n+1}(i))\ +F_{n+1}(i) \end{bmatrix}$$

for $1 \leqslant i \leqslant n$.

Alternativerne a og b indebærer følgende:

a: Der indskydes et mellemlager mellem den n'te og den $(n+1)$'te operation.

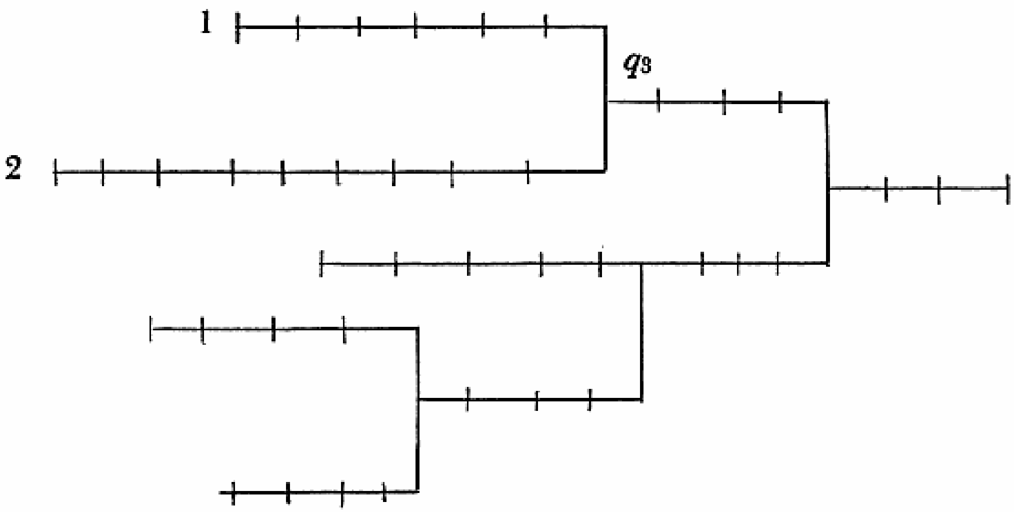
b: Der indskydes *ikke* noget mellemlager mellem den n'te og den $(n+1)$'te operation.

På grund af produktets stigende værdi efterhånden som produktionsprocessen skrider frem, vil lageromkostningerne tiltage for voksende værdier af n. Det almindeligste vil da være, at q aftager for voksende værdier af n. Der kan imidlertid tænkes operationer med så store opstillingsomkostninger i forhold til de følgende operationer, at en q-værdi, som var mindre end dem for de følgende operationer, ville blive bestemt. Herved ville der opstå den i afsnit 2 omtalte lagertype III. I Appendix er bl. a. nævnt, hvordan en iterationsprocedure kan udarbedes, der vil fastlægge en optimal placering af mellemlagre uanset hvilken type det drejer sig om. Proceduren starter som nævnt med at tillade q at antage alle mulige værdier uafhængig af forholdet til de tilstødende seriestørrelser. Ved dernæst at tage hensyn hertil kan en eventuel formindskelse af $l(q)$ opnås. De lagre, der allerede ved 1. iteration er blevet placeret, vil forblive, idet en evt. besparelse af lageromkostningerne kun taler til gunst for at vedblive at have lageret. Derimod kan det tænkes, at det nu vil kunne betale sig at oprette et nyt lager – betinget af en formindskelse af lageromkosningerne.

4. *Slutning.*

Ofte ønsker man at bestemme, hvilke seriestørrelser der skal vælges for et helt produkt, hvis bearbejdning kan opdeles i flere operationsrækker som vist nedenfor

I fald der placeres et mellemlager efter hver operationsrække, kan en optimal placering af mellemlagre bestemmes for hver række for sig uafhængig af seriestørrelserne i de andre operationsrækker – ifølge Theoremet i afsnit 2. Ønsker man imidlertid at undersøge, om mellem-



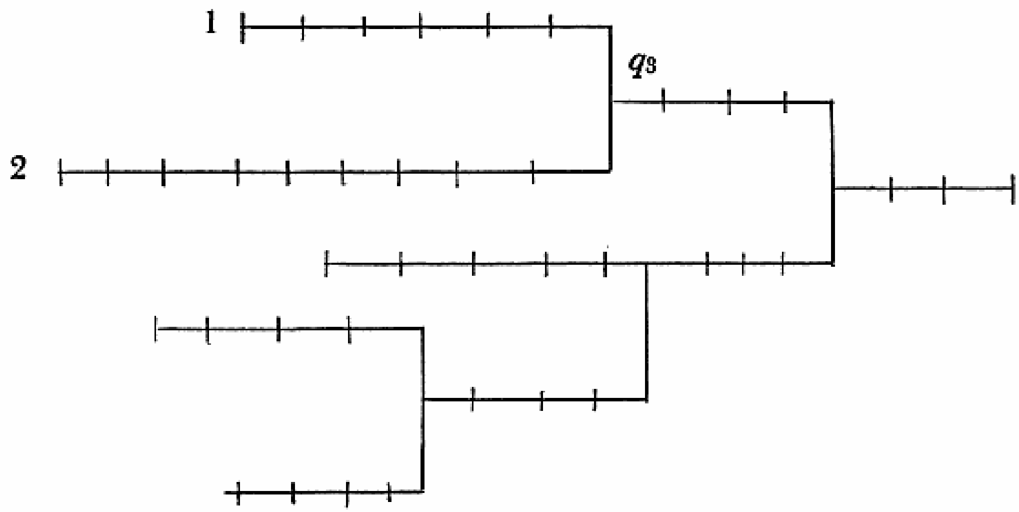
lageret efter f. eks. 1. og 2. operationsrække kan undværes, knyttes der til enhver mulig værdi af q_3 en omkostning, $f(q_3)$, der så indgår i bestemmelse af den optimale placering for hver af de to rækker – som vist i afsnit 3. På denne måde kan den viste løsningsmetode udstrækkes til at omfatte et helt produkt.

Appendix.

I afsnit 2 blev det forudsat, at Q_1 var delelig med q, og at q igen var delelig med Q_2. Det er her meningen nøjere at undersøge, hvor meget ophævelse af denne forudsætning betyder.

For det første lager tillades forholdet Q_1/q nu at antage alle reelle tal større end eller lig med 2. Lad m_1 betegne det hele tal, hvormed forholdet Q_1/q skal multipliceres for at blive et helt tal*). Såfremt forholdet i forvejen er et helt tal, sættes m_1 lig med 1. Lagerbeholdningen forudsættes suppleret med en mængde på Q_1 enheder til ækvidistante tidspunkter. Aftrækket fra lageret i dette tidsrum vil imidlertid ikke være Q_1, men et multiplum af q. Lagerbeholdningen forøges for hver supplering med q/m_1 enheder, indtil der efter den m_1'te supplering kan aftrækkes en ekstra serie på q enheder. Som det fremgår af nedenfor viste figur vil tiden fra supplering til det derpå følgende aftræk på q enheder ogs variere inden for en cyklus på m_1 suppleringer.
De skraverede arealer viser, hvor meget lagerbeholdningen er blevet forøget ud over det, der lå til grund for beregningerne i afsnit 2. (m_1 er her 4). Den gennemsnitlige højde af de vandrette parallellogrammer er

*) Det antages implicit, at et sådant tal eksisterer.



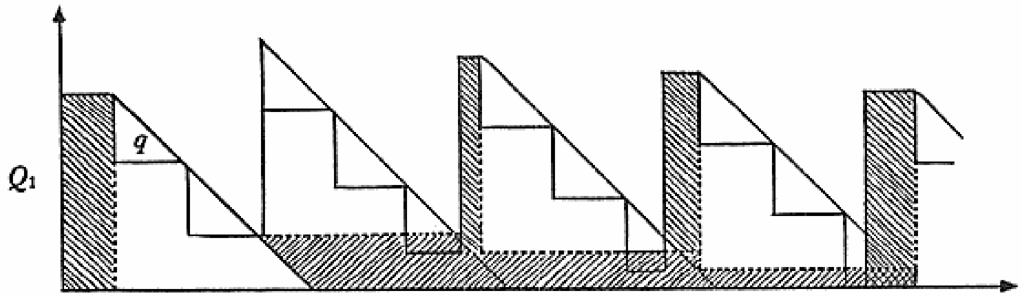
lageret efter f. eks. 1. og 2. operationsrække kan undværes, knyttes der til enhver mulig værdi af q_3 en omkostning, $f(q_3)$, der så indgår i bestemmelse af den optimale placering for hver af de to rækker – som vist i afsnit 3. På denne måde kan den viste løsningsmetode udstrækkes til at omfatte et helt produkt.

Appendix.

I afsnit 2 blev det forudsat, at Q_1 var delelig med q, og at q igen var delelig med Q_2. Det er her meningen nøjere at undersøge, hvor meget ophævelse af denne forudsætning betyder.

For det første lager tillades forholdet Q_1/q nu at antage alle reelle tal større end eller lig med 2. Lad m_1 betegne det hele tal, hvormed forholdet Q_1/q skal multipliceres for at blive et helt tal*). Såfremt forholdet i forvejen er et helt tal, sættes m_1 lig med 1. Lagerbeholdningen forudsættes suppleret med en mængde på Q_1 enheder til ækvidistante tidspunkter. Aftrækket fra lageret i dette tidsrum vil imidlertid ikke være Q_1, men et multiplum af q. Lagerbeholdningen forøges for hver supplering med q/m_1 enheder, indtil der efter den m_1'te supplering kan aftrækkes en ekstra serie på q enheder. Som det fremgår af nedenfor viste figur vil tiden fra supplering til det derpå følgende aftræk på q enheder ogs variere inden for en cyklus på m_1 suppleringer.
De skraverede arealer viser, hvor meget lagerbeholdningen er blevet forøget ud over det, der lå til grund for beregningerne i afsnit 2. (m_1 er her 4). Den gennemsnitlige højde af de vandrette parallellogrammer er

*) Det antages implicit, at et sådant tal eksisterer.



$$\frac{1}{m_1}\left[\frac{q}{m_1}+\frac{2q}{m_1}+\frac{3q}{m_1}+\ldots+\frac{(m_1-1)q}{m_1}\right]=\tfrac{1}{2}\,q\,\frac{m_1-1}{m_1}.$$

Bredden af de lodrette arealer (med den faldende skravering) vil variere, men i gennemsnit antage værdien

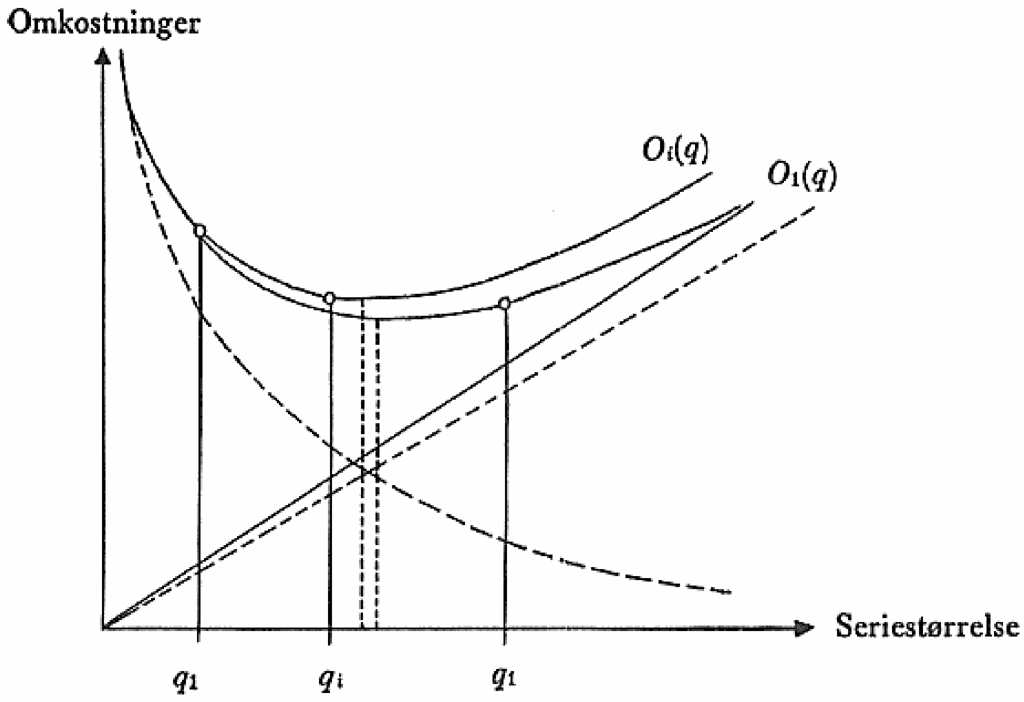
$$\frac{1}{m_1}\left[\frac{q}{m_1A}+\frac{2q}{m_1A}+\ldots+\frac{(m_1-1)q}{m_1A}\right]=\tfrac{1}{2}\,\frac{q}{A}\cdot\frac{m_1-1}{m_1}.$$

Ekstraomkostningerne fra den forøgede lagerbeholdning bliver

$$\frac{Q_1}{A}\cdot P_1c_l\left[\frac{A}{Q_1}\,\tfrac{1}{2}q\cdot\frac{m_1-1}{m_1}+Q_1\,\tfrac{1}{2}\,\frac{q}{A}\cdot\frac{m_1-1}{m_1}\right]=P_1c_lq\cdot\frac{m_1-1}{m_1}.$$

Det ses, at ekstraomkostningerne vokser for stigende værdier af m_1 og har grænseværdien P_1c_lq for $m_1 \to \infty$.

Søger man f. eks. at finde en optimal værdi af q for fastlagt Q_1, kan kriteriefunktionen, $O_1(q)$'s værdi bestemmes for en række q-værdier,



nemlig sådanne for hvilke $m_1 = 1$. Omkostningskurven, $O_1(q)$ er vist på figuren, og to punkter på kurven er angivet for diskrete værdier af $q = q_1$. I de fleste tilfælde vil ingen af de bestemte punkter af omkostningskurven, $O_1(q)$ falde sammen med kurvens minimumspunkt. Det vil derfor være naturligt at spørge, om et punkt nærmere omkostningskurvens minimumspunkt kan findes for en værdi af q, for hvilken $m_1 > 1$. Men når m_1 bliver større end 1, vokser lageropbevaringsomkostningerne – i overensstemmelse med det ovenfor udledte udtryk, og en anden omkostningskurve, som ligger over $O_1(q)$, vil gælde. Jo større værdi af m_1 der vælges, jo højere ligger omkostningskurven. Det kan derfor ikke på forhånd afgøres, om det vil være muligt at finde en q-værdi for en eller anden værdi af m_1, som giver en mindre total omkostning. Sædvanligvis kan det betale sig at starte med at undersøge punkter for små værdier af m_1.

Det er muligt at angive en øvre grænse for den besparelse, der kan opnås. q kan antage følgende værdier $(1/2)Q_1$, $(1/3)Q_1$, $(2/3)Q_1$, $(1/4)Q_1$, $(3/4)Q_1$, $(1/5)Q_1$, etc. Den største afstand imellem to q-værdier er $(1/6)Q_1$. I det mest uheldige tilfælde vælges $q = (1/3)Q_1$, mens det virkelige minimumspunkt ligger $(1/12)Q_1$ ved siden af. Dette giver en relativ afvigelse på 1/4. Indsættes denne værdi i udtrykket for den relative omkostningsforøgelse, fås

$$\frac{O}{O_{\text{opt.}}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{q_{\text{opt.}}} + \frac{q_{\text{opt.}}}{q}\right) = \tfrac{1}{2}\,(1{,}25 + 0{,}80) = 1{,}025.$$

Man kan altså allerhøjst gøre sig håb om at spare 2,5 % ved at vælge en værdi af q, for hvilken m_1 er større end 1, og kun i det tilfælde, hvor m_1 er 2 eller 3. Hertil kommer så, at der ikke i de foretagne udregninger er taget hensyn til, at omkostningskurven ligger over $O_1(q)$, hvilket nedsætter størrelsen af den opnåelige besparelse.

Den øvre grænse for de formindskelser, der kan opnås, må sammenlignes med den relative ubestemthed for omkostningerne. Ifølge nedenstående totale differential – udregnet på grundlag af Wilson's formel, vil en ubestemthed på a % i bestemmelsen af en af de indgående parametre resultere i en ubestemthed på de totale omkostninger på $\tfrac{1}{2}a$ %. Hvis derfor blot den samlede ubestemthed

$$\frac{\Delta O}{O} = \tfrac{1}{2}\left\{\left|\frac{\Delta c_B}{c_B}\right| + \left|\frac{\Delta c_L}{c_L}\right| + \left|\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right|\right\}$$

på parametrene er 5 %, vil det ikke kunne betale sig at søge bestemt andre værdier af q end dem, der kan divideres op i Q_1.

Det er hidtil blevet forudsat, at Q_1/q var større end eller lig med 2. Der vil imidlertid eksistere to andre typer af lagre, hvor henholdsvis $1 < Q_1/q < 2$ og $0 < Q_1/q < 1$. For disse to typer kan der udledes udtryk for de ekstra lageromkostninger, der vil optræde, hvis forholdet Q_1/q (for type III: q/Q_1) ikke er et heltal. De samlede lageropbevaringsomkostninger for det første lager, $l(Q_1,q)$ anføres i følgende skema:

$$\text{I} \quad 2 \leqslant Q_1/q \quad : \quad l(Q_1,q) = \tfrac{1}{2} c_l P_1 (Q_1 - q) + c_l P_1 q \cdot \frac{m_1 - 1}{m_1}$$
$$= \tfrac{1}{2} c_l P_1 (Q_1 + q) - c_l P_1 q \cdot \frac{1}{m_1}$$

$$\text{II} \quad 1 < Q_1/q < 2 : \quad l(Q_1,q) = c_l P_1 q = \tfrac{1}{2} c_l P_1 (Q_1 + q) - \tfrac{1}{2} c_l P_1 (Q_1 - q)$$

$$\text{III} \quad O < Q_1/q < 1 : \quad l(Q_1,q) = \tfrac{1}{2} c_l P_1 (q - Q_1) + c_l P_1 Q_1 \cdot \frac{m_1 - 1}{m_1}$$
$$= \tfrac{1}{2} c_l P_1 (Q_1 + q) - c_l P_1 Q_1 \cdot \frac{1}{m_1}$$

I stedet for fra starten af at lade q antage værdier, for hvilke $m_1 = 1$, kunne man begynde med at tillade q at antage alle mulige værdier uafhængig af Q_1 ($m_1 \to \infty$). Lageromkostningerne kunne herved bestemmes ved

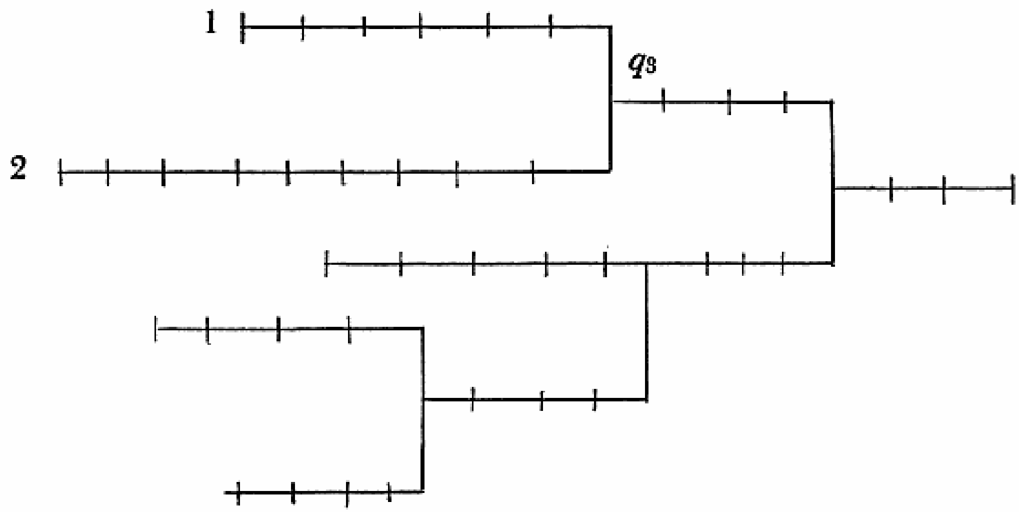
$$l(Q_1,q) = \tfrac{1}{2} c_l P_1 (Q_1 + q)$$

uanset lagertype. For lagertype I kan dernæst ved hensigtsmæssigsigt valg af Q_1/q opnås en formindskelse af omkostningerne på $c_l P_1 q/m_1$, for type type II en besparelse på $\tfrac{1}{2} c_l P_1 (Q_1 - q)$ og for type III $c_l P_1 Q_1/m_1$.

På ganske tilsvarende måde kan der udledes analoge udtryk for omkostningerne ved det andet lager, hvor forholdet q/Q_2 er afgørende for ekstraomkostningernes størrelse. Når en værdi af q søges bestemt for fastlagte værdier af Q_1 og Q_2, kan kun én af størrelserne, m_1 og m_2 fastlægges uafhængigt. Det vil derfor ofte være nemmest at starte med at finde en værdi af q, som er bestemt uafhængig af Q_1 og Q_2. De af q afhængige lageromkostninger bliver da

$$l(q) = \tfrac{1}{2} c_l (P_2 + P_1) q.$$

Den iterationsprocedure, der kan anvises, indeholder ud over de nødvendige beregninger til bestemmelse af en optimal placering af mellemlagre to sløjfer. I den ene undersøges det for enhver af de behandlede placeringsmuligheder, om en værdi af $m_2 > 1$ giver færre omkostninger end tilfældet $m_2 = 1$. I den anden sløjfe gntages hele beregningsgangen flere gange. Ved f. eks. bestemmelse af q_n kan det vise sig mest fordelagtigt at vælge en bestemt værdi af m_2, hvilket for lagertype I giver en besparelse på $c_l p_{n+1} q_{n+1}/m_2$. Denne formidskelse af omkostningerne medfører en lille ændring i det grundlag, hvorefter en optimal værdi af q_{n+1} blev bestemt. Og en ændring af q_{n+1} vil måske betinge, at grundlaget for fastlæggelse af q_{n+2} er blevet ændret en smule. I stedet for simultant at forsøge på at løse hele dette komplekse problem, gennemføres beregningerne en gang mere med de indførte besparelser, hvorved en ny værdi af q_{n+1} fastlægges. Herved er imidlertid m_2 for fastholdt q_n blevet ændret, og det må undersøges, om det i hele taget kan betale sig at vælge en ny værdi af q_{n+1}. Under alle omstændigheder er der opnået en besparelse på $c_l p_{n+1} q_{n+1}/m_2$, dvs. løsningen bliver bedre og bedre.



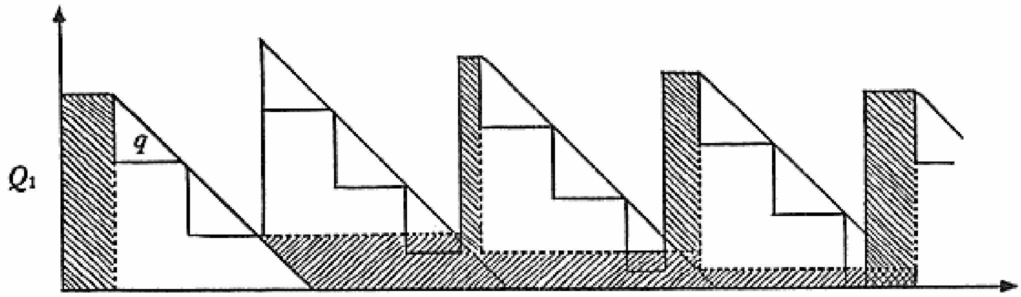
lageret efter f. eks. 1. og 2. operationsrække kan undværes, knyttes der til enhver mulig værdi af q_3 en omkostning, $f(q_3)$, der så indgår i bestemmelse af den optimale placering for hver af de to rækker – som vist i afsnit 3. På denne måde kan den viste løsningsmetode udstrækkes til at omfatte et helt produkt.

Appendix.

I afsnit 2 blev det forudsat, at Q_1 var delelig med q, og at q igen var delelig med Q_2. Det er her meningen nøjere at undersøge, hvor meget ophævelse af denne forudsætning betyder.

For det første lager tillades forholdet Q_1/q nu at antage alle reelle tal større end eller lig med 2. Lad m_1 betegne det hele tal, hvormed forholdet Q_1/q skal multipliceres for at blive et helt tal*). Såfremt forholdet i forvejen er et helt tal, sættes m_1 lig med 1. Lagerbeholdningen forudsættes suppleret med en mængde på Q_1 enheder til ækvidistante tidspunkter. Aftrækket fra lageret i dette tidsrum vil imidlertid ikke være Q_1, men et multiplum af q. Lagerbeholdningen forøges for hver supplering med q/m_1 enheder, indtil der efter den m_1'te supplering kan aftrækkes en ekstra serie på q enheder. Som det fremgår af nedenfor viste figur vil tiden fra supplering til det derpå følgende aftræk på q enheder ogs variere inden for en cyklus på m_1 suppleringer.
De skraverede arealer viser, hvor meget lagerbeholdningen er blevet forøget ud over det, der lå til grund for beregningerne i afsnit 2. (m_1 er her 4). Den gennemsnitlige højde af de vandrette parallellogrammer er

*) Det antages implicit, at et sådant tal eksisterer.



$$\frac{1}{m_1}\left[\frac{q}{m_1}+\frac{2q}{m_1}+\frac{3q}{m_1}+\dots+\frac{(m_1-1)q}{m_1}\right]=\tfrac{1}{2}\,q\,\frac{m_1-1}{m_1}.$$

Bredden af de lodrette arealer (med den faldende skravering) vil variere, men i gennemsnit antage værdien

$$\frac{1}{m_1}\left[\frac{q}{m_1A}+\frac{2q}{m_1A}+\dots+\frac{(m_1-1)q}{m_1A}\right]=\tfrac{1}{2}\,\frac{q}{A}\cdot\frac{m_1-1}{m_1}.$$

Ekstraomkostningerne fra den forøgede lagerbeholdning bliver

$$\frac{Q_1}{A}\cdot P_1c_l\left[\frac{A}{Q_1}\,\tfrac{1}{2}q\cdot\frac{m_1-1}{m_1}+Q_1\,\tfrac{1}{2}\,\frac{q}{A}\cdot\frac{m_1-1}{m_1}\right]=P_1c_lq\cdot\frac{m_1-1}{m_1}.$$

Det ses, at ekstraomkostningerne vokser for stigende værdier af m_1 og har grænseværdien P_1c_lq for $m_1 \to \infty$.

Søger man f. eks. at finde en optimal værdi af q for fastlagt Q_1, kan kriteriefunktionen, $O_1(q)$'s værdi bestemmes for en række q-værdier,