Markoff-kæder

Begrebsdannelser og anvendelsesmuligheder.

Af OLE NIELSEN*) *og* LOUIS PRINTZ**)

Teorien om den stokastiske Markoff-proces er udviklet af den russiske matematiker A. A. Markoff (1856–1922).

Som grundlag for den videre behandling indføres følgende forudsætninger, terminologi og definitioner:

Forudsætninger.

1. Alle forekommende betingede sandsynligheder er defineret.
2. Hvert forsøg har som udfald et og kun et resultat (E), der er endeligt eller tælleligt, således at resultaterne E_1, E_2, E_3 ..... indbyrdes udelukker hinanden.
3. Udfaldene (resultaterne) kaldes tilstande.
   E_j angiver, at systemet befinder sig i tilstand j.
   $E_j^{(k)}$ angiver, at systemet befinder sig i tilstand j ved det k'te forsøg.
   $E_j^{(0)}$ angiver, at et systems initialtilstand (dvs. inden udførelsen af førsteforsøg) er tilstand j.
4. $p_{ij}^{(k)}$ angiver den betingede sandsynlighed for, at et system befinder sig i tilstand j efter det k'te forsøg, når det $k-1$'te forsøg befandt sig i tilstand i, hvilket kan udtrykkes således:
   $p_{ij}^{(k)} = P\,(E_j^{(k)} \mid E_i^{(k-1)})$

*) Civilingeniør, amanuensis.

**) Cand. merc., amanuensis, Institut for Organisation og Virksomhedsledelse, Handelshøjskolen i Århus.

Markoff-kæder

Begrebsdannelser og anvendelsesmuligheder.

Af OLE NIELSEN*) *og* LOUIS PRINTZ**)

Teorien om den stokastiske Markoff-proces er udviklet af den russiske matematiker A. A. Markoff (1856–1922).

Som grundlag for den videre behandling indføres følgende forudsætninger, terminologi og definitioner:

Forudsætninger.

1. Alle forekommende betingede sandsynligheder er defineret.
2. Hvert forsøg har som udfald et og kun et resultat (E), der er endeligt eller tælleligt, således at resultaterne E_1, E_2, E_3 ..... indbyrdes udelukker hinanden.
3. Udfaldene (resultaterne) kaldes tilstande.
   E_j angiver, at systemet befinder sig i tilstand j.
   $E_j^{(k)}$ angiver, at systemet befinder sig i tilstand j ved det k'te forsøg.
   $E_j^{(0)}$ angiver, at et systems initialtilstand (dvs. inden udførelsen af førsteforsøg) er tilstand j.
4. $p_{ij}^{(k)}$ angiver den betingede sandsynlighed for, at et system befinder sig i tilstand j efter det k'te forsøg, når det $k-1$'te forsøg befandt sig i tilstand i, hvilket kan udtrykkes således:
   $p_{ij}^{(k)} = P\,(E_j^{(k)} \mid E_i^{(k-1)})$

*) Civilingeniør, amanuensis.

**) Cand. merc., amanuensis, Institut for Organisation og Virksomhedsledelse, Handelshøjskolen i Århus.

Definitioner

1. En følge af forsøg siges at danne en Markoff-kæde, når følgende ligning er opfyldt for vilkårlige værdier af i, j, $k = 1, 2, 3, \ldots n$.
   $p_{ij}^{(k)} = P(E_j^{(k)} \mid E_i^{(k-1)}) = P(E_j^{(k)} \mid E_{i_{k-1}}^{(k-1)} \ldots E_{i_1}^{(1)},$
   $E_{i_0}^{(0)})$, hvor leddene $E_{i_{k-2}}^{(k-2)}, \ldots E_{i_1}^{(1)}, E_{i_0}^{(0)}$ er vilkårlige.
   Denne definition indebærer, at der er tale om en Markoff-kæde, når sandsynligheden for overgang til en given tilstand alene er bestemt af den nærmest foregående tilstand i kæden (forsøgsrækken).
2. En forsøgsrække danner en homogen Markoff-kæde, når sandsynligheden $p_{ij}^{(k)}$ ikke er afhængig af k. Dette kan også udtrykkes således:
   $p_{ij}^{(k)} = p_{ij} \quad k = 1, 2, 3 \ldots n.$
   En homogen Markoff-kæde er således et stokastisk system, hvor overgangssandsynlighederne er konstante.
   Vi får herved følgende formel for en homogen Markoff-kæde:
   $P(E_{i_0} E_{i_1} \ldots E_{i_n}) = P(E_{i_0}) P(E_{i_1} \mid E_{i_0}) \ldots P(E_{i_n} \mid E_{i_{n-1}}) =$
   $P(E_{i_0}) p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n}$, der udtrykker sandsynlighedsproduktet for $E_{i_0} E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_n}$, hvor $E_{i_0} E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_n}$ er tilstande i n efter hinanden følgende forsøg. Af denne formel ser vi, at sandsynligheden for et vilkårligt produkt af tilstande er givet, når man kender alle overgangssandsynlighederne p_{i_j} og alle initialsandsynlighederne $P(E_i)$ for $i = 1, 2, 3 \ldots s$.

Overgangsmatrice

Et system af tilstande (E_j) vil grafisk kunne vises i et »dynagram«, som er vist i fig. 1.

I dynagrammet angiver abscisseaksen i overensstemmelse med den opstillede terminologi de forskellige tilstande (E_i), som systemet kan indtage for $1 \leqslant i \leqslant s$, medens ordinataksen giver udtryk for forsøgsrækken $0 \leqslant k \leqslant n$.

Såfremt man måtte ønske at lade forsøgsrækken udtrykke systemets tidsdimension, vil k kunne udtrykke tidspunkter og eventuelt erstattes med symbolet t.

Af dynagrammet fig. 1 vil det fremgå, at den betingede sandsynlighed for indtagelse af tilstandene 1 til s i et forsøg (skridt) vil kunne udtrykkes ved en matrice af første orden ($M^{(1)}$) som vist i fig. 2.

I det specialtilfælde, hvor systemet danner en homogen Markoff-kæde, er ovennævnte matrice uafhængig af hvilket sted i forsøgsrækken ($0 \leqslant k \leqslant n$), der vælges som udgangspunkt. Da matricens enkelte elementer er sandsynligheder, har vi, at $0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$.

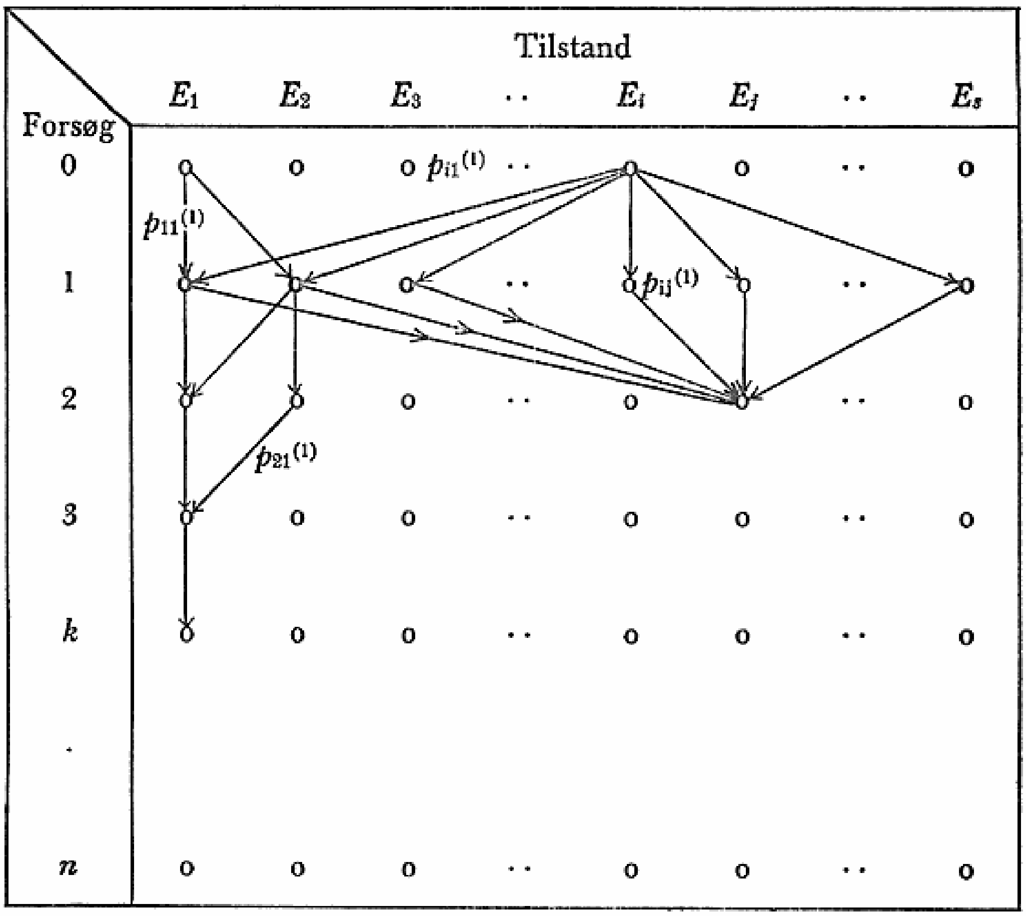

Fig. 1. Dynagram.

$$M^{(1)} = \left\{ \begin{array}{cccccccc}
p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} & p_{13}^{(1)} & \cdot & p_{1i}^{(1)} & p_{1j}^{(1)} & \cdot\quad\cdot & p_{1s}^{(1)} \\
p_{21}^{(1)} & p_{22}^{(1)} & p_{23}^{(1)} & \cdot & p_{2i}^{(1)} & p_{2j}^{(1)} & \cdot\quad\cdot & p_{2s}^{(1)} \\
p_{31}^{(1)} & p_{32}^{(1)} & p_{33}^{(1)} & \cdot & p_{3i}^{(1)} & p_{3j}^{(1)} & \cdot\quad\cdot & p_{3s}^{(1)} \\
\cdot & & & & & & & \\
p_{i1}^{(1)} & p_{i2}^{(1)} & p_{i3}^{(1)} & \cdot & p_{ii}^{(1)} & p_{ij}^{(1)} & \cdot\quad\cdot & p_{is}^{(1)} \\
p_{j1}^{(1)} & p_{j2}^{(1)} & p_{j3}^{(1)} & \cdot & p_{ji}^{(1)} & p_{jj}^{(1)} & \cdot\quad\cdot & p_{js}^{(1)} \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & & & & & & & \\
p_{s1}^{(1)} & p_{s2}^{(1)} & p_{s3}^{(1)} & \cdot & p_{si}^{(1)} & p_{sj}^{(1)} & \cdot\quad\cdot & p_{ss}^{(1)}
\end{array} \right\}$$

Fig. 2.

Da resultaterne E_j som tidligere anført udelukker hinanden indbyrdes, har vi desuden for $i = 1, 2, 3 \ldots s$, at $P\,(\sum_{j=1}^{s} E_j)\,|\,E_i = \sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$, rækkeelementernes sum lig 1. Ønsker man nu at opstille en sandsynlighedsmatrice for den betingede sandsynlighed for indtagelse af tilstandene 1 til s i to forsøg ($k = 2$), vil de enkelte elementer i matricen kunne udregnes som en transformation af de enkelte elementer i $M^{(1)}$.

Ifølge dynagrammet fig. 1 finder vi således elementet $p_{ij}{}^{(2)}$ som $p_{ij}{}^{(2)} = p_{i1}{}^{(1)} \cdot p_{1j}{}^{(1)} + p_{i2}{}^{(1)} \cdot p_{2j}{}^{(1)} + \ldots + p_{is}p_{sj} = \sum_{d=1}^{k} p_{id}{}^{(1)} \cdot p_{dj}{}^{(1)}$. Gennem sådanne transformationer, der svarer til matricemultiplikationen $M^{(1)} \cdot M^{(1)}$, får vi således en matrice af anden orden $M^{(2)}$.

Af dynagrammet fig. 1 vil det videre fremgå, at matricen af tredie orden $M^{(3)}$ vil kunne udregnes som et produkt af $M^{(1)}$ og $M^{(2)}$.

Helt generelt har vi herefter $M^{(n)} = M^{(n-1)} \cdot M^{(1)} = (M^{(1)})^n$. Med udgangspunkt i systemets initialværdier og de udregnede matricer $M^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, vil vi herefter kunne beregne systemets tilstandssandsynligheder i forsøgsrækken som

	Tilstand							
Forsøg	E_1	E_2	E_3	..	E_i	E_j	..	E_s
0	$P(E_1{}^{(0)})$	$P(E_2{}^{(0)})$	$P(E_3{}^{(0)})$	..	$P(E_i{}^{(0)})$	$P(E_j{}^{(0)})$	..	$P(E_s{}^{(0)})$
1	$P(E_1{}^{(1)})$	$P(E_2{}^{(1)})$	$P(E_3{}^{(1)})$	..	$P(E_i{}^{(1)})$	$P(E_j{}^{(1)})$	..	$P(E_s{}^{(1)})$
2	$P(E_1{}^{(2)})$	$P(E_2{}^{(2)})$	$P(E_3{}^{(2)})$	..	$P(E_i{}^{(2)})$	$P(E_j{}^{(2)})$	..	$P(E_s{}^{(2)})$
.								
n	$P(E_1{}^{(n)})$	$P(E_2{}^{(n)})$	$P(E_3{}^{(n)})$	..	$P(E_i{}^{(n)})$	$P(E_j{}^{(n)})$	..	$P(E_s{}^{(n)})$

Fig. 3.

Sammensatte systemer

I overensstemmelse med de opstillede forudsætninger har vi i det foregående udelukkende beskæftiget os med enkeltsystemer, hvor de enkelte tilstande indbyrdes udelukker hinanden, således at systemet efter et vilkårligt valgt antal forsøg (på et vilkårligt valgt tidspunkt) kun kan antage én af de mulige tilstande E_j ($j = 1, 2, 3 \ldots s$).

Sandsynligheden for indtagelse af en bestemt tilstand E_j i et bestemt forsøg k vil kunne aflæses af fig. 3.

Definerer vi nu et sammensat system som et system, der består af et antal (h) delsystemer ($h = 1, 2, 3 \ldots$), får vi en ny systemtype, som efter et givet antal (k) forsøg ($0 \leqslant k \leqslant n$) vil antage én tilstand. Denne tilstand er karakteriseret af en given sammensætning af delsystemtilstande, ialt $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \ldots s_y \ldots s_h = \pi_{y=1}^{h} s_y$, hvor s_y angiver det antal tilstande som det y'te delsystem kan indtage.

I det tilfælde, hvor tilstandsmulighederne E_j ($1 \leqslant j \leqslant s$) er identiske for alle delsystemer i det sammensatte system (dvs. $s_y = s$ for $y = 1, 2, 3 \ldots h$ og overgangssandsynlighederne p_{ij} ens for de enkelte systemer) samtidig med, at der er uafhængighed de enkelte systemer imellem, taler vi om *et harmonisk sammensat system.*

Antallet af tilstande, som det sammensatte system vil kunne indtage, kan herefter bestemmes som $F(s, h) = s^h$, hvor

s = antal mulige tilstande for delsystemerne ($s = 1, 2, 3 \ldots$)
h = antal delsystemer ($h = 1, 2, 3 \ldots$)

I ovennævnte tilfælde står vi overfor en *fuldstændig beskrivelse af det sammensatte system.*

I mange praktiske tilfælde vil en sådan beskrivelse imidlertid kunne give overinformation, idet det ofte vil være tilstrækkeligt at karakterisere det sammensatte systems tilstand alene ved det antal delsystemer, som indtager hver af de mulige tilstande for delsystemerne.

Antallet af tilstande for et sådant *delvis beskrevet sammensat system* vil kunne bestemmes som

$$G(s, h) = \frac{(h+s-1)!}{h!\,(s-1)!} = \frac{s \ldots (h+s-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots h},$$

hvor h og s står for de tidligere nævnte faktorer.

En sammenføring af de to funktionsværdier viser, at $F(s,h) \geqslant G(s,h)$.

Benævner vi nu antallet af delsystemer, der indtager tilstanden E_j ved det k'te forsøg med $a_j^{(k)}$, vil det sammensatte systems tilstand kunne bestemmes af vektoren

$A_G^{(k)} = \{a_1^{(k)}, a_2^{(k)} \ldots a_j^{(k)} \ldots a_s^{(k)}\}$, hvor

G angiver, at det er et delvis beskrevet sammensat system.

Er et sammensat systems tilstand bestemt gennem ovennævnte vektor, er det herefter muligt at beskrive dets forventede tilstand efter det $(k+1)$'te forsøg ved

$$e\,(A_G{}^{(k+1)}) = e\,\{a_j{}^{(k+1)}\} \quad (e = \text{estimat}), \text{ hvor det gælder, at}$$

$$a_j{}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{s} a_i{}^{(k)} \cdot p_{ij}.$$

Dette kan mere generelt udvides til

$$e\,(A_G{}^{(k+r)}) = e(\{a_j{}^{(k+r)}\}), \text{ hvor}$$

$$a_j{}^{(k+r)} = \sum_{i=1}^{s} a_i{}^{(k)} \cdot p_{ij}{}^{(r)} \quad 0 \leqslant (r+k) \leqslant n.$$

Vender vi herefter tilbage til dynagrammet fig. 1, vil det sammensatte systems initialtilstande $E_j{}^{(0)}$ få tilført en ny dimension i form af faktoren $a_j{}^{(0)}$.

Anvender vi herefter sandsynlighedsmatricen fig. 2, vil det sammensatte systems tilstandsvektor efter k forsøg kunne udtrykkes som $e\,(A_G{}^{(k)}) = A_G{}^{(0)} \cdot (M^{(1)})^k$ eller

$$e\,\{a_j{}^{(k)}\} = \{a_1{}^{(0)},\, a_2{}^{(0)} \ldots a_j{}^{(0)} \ldots a_s{}^{(0)}\} \times \begin{Bmatrix} p_{11}{}^{(1)} & . & p_{s1}{}^{(1)} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & p_{ij}{}^{(1)} & . \\ . & & . \\ p_{1s}{}^{(1)} & . & p_{ss}{}^{(1)} \end{Bmatrix}^{k}$$

På grundlag af dynagrammet fig. 1 og de heraf udledede sandsynlighedsmatricer af stigende orden, vil vi herefter kunne gennemføre en successiv beregning af tilstandsvektoren for det delvis bestemte homogene sammensatte system og får herved tilsvarende fig. 3 et udtryk for det sammensatte systems tilstandsudvikling for $0 \leqslant k \leqslant n$ i fig. 4.

				Tilstand				
	E_1	E_2	E_3	..	E_i	E_j	..	E_s
Forsøg 0	$a_1{}^{(0)}$	$a_2{}^{(0)}$	$a_3{}^{(0)}$	..	$a_i{}^{(0)}$	$a_j{}^{(0)}$	..	$a_s{}^{(0)}$
1	$a_1{}^{(1)}$	$a_2{}^{(1)}$	$a_3{}^{(1)}$	..	$a_i{}^{(1)}$	$a_j{}^{(1)}$	..	$a_s{}^{(1)}$
2	$a_1{}^{(2)}$	$a_2{}^{(2)}$	$a_3{}^{(2)}$	..	$a_i{}^{(2)}$	$a_j{}^{(2)}$	..	$a_s{}^{(2)}$
.								
n	$a_1{}^{(n)}$	$a_2{}^{(n)}$	$a_3{}^{(n)}$	..	$a_i{}^{(n)}$	$a_j{}^{(n)}$	..	$a_s{}^{(n)}$

Fig. 4.

Systemets ligevægtstilstand

Såfremt forsøgsrækken danner en homogen Markoff-kæde (se def. 2), vil systemet, under forudsætning af opfyldelsen af den ergodiske sætning (se næste afsnit), efter et vist antal forsøg opnå en ligevægtstilstand.

For det enkelte systems vedkommende fås af ligningen

$$M^{(n)} = M^{(n-1)} \cdot M^{(1)}$$

at

$$\lim_{n \to \infty} M^{(n)} = \lim_{n \to \infty} M^{(n-1)}$$

således at

$$M^{(n)} \equiv M^{(n-1)}$$

dvs. stationær for $n \to \infty$. . .

Det vil således være muligt at beregne systemets ligevægtstilstand med kendskab til systemets initialtilstand og sandsynlighedsmatricen af første orden.

Ovennævnte betragtninger vil umiddelbart kunne overføres på et delvis beskrevet harmonisk sammensat system, hvor vi af ligningen

$$e\,(A_G{}^{(k)}) = A_G{}^{(0)} \cdot (M^{(1)})^k$$

får

$$e\,(\lim_{n \to \infty} A_G{}^{(n)}) = A_G{}^{(0)} \times \lim_{n \to \infty} M^{(n)}$$

eller

$$a_i{}^{(n)} \equiv a_i{}^{(n-1)} \quad \text{stationær for } n \to \infty.$$

Den ergodiske sætning

Til nærmere belysning af den ergodiske sætnings indhold og dermed en undersøgelse af forudsætningen for opnåelse af ligevægtstilstanden, skal følgende anføres:

Definition 3

En tilstand E_i siges at være »udgående«, når der findes en tilstand E_j og et heltal k, således at

$$p_{ij}{}^{(k)} > 0 \text{ og } p_{ji}{}^{(m)} = 0 \text{ for } m = 1, 2, 3 \ldots$$

Definition 4

En tilstand E_i siges at være »stadig mulig«, hvis eksistensen af et heltal k med egenskaben $p_{ij}{}^{(k)} > 0$ medfører eksistensen af et heltal m med egenskaben $p_{ji}{}^{(m)} > 0$.

Definition 5

En »stadig mulig« tilstand E_i benævnes periodisk (svingende), når der findes et heltal $d > 1$, således at det gælder for alle med d ikke delbare n, at $p_{ii}^{(n)} = 0$.

Den ergodiske sætning

Sætningen, der gælder i de tilfælde hvor $M^{(1)} = \{p_{ij}\}$ er sandsynlighedsmatricen for en homogen Markoff-kæde med uendelig mange tilstande $E_1 \ldots E_s$, lyder således:

Når der findes et heltal k, således at sandsynlighedselementerne $p_{ij}^{(k)}$ fra matricen $M^{(k)}$ i mindst én søjle har den egenskab, at samtlige elementer i søjlen er større end $\delta > 0$, gælder det, at

$$\lim_{k \to \infty} p_{ij}^{(k)} = p_j \quad (j = 1, 2, \ldots s)$$

hvor $p_j \geqslant \delta$ for alle søjler, hvis minimumselementer er større end δ.

Vi får da, at indtagelsen af en tilstand E_i for $n \to \infty$ er uafhængig af udgangssituationen.

Desuden får vi i dette tilfælde, at

$$|\, p_{ij}^{(n)} - p_j \,| \leqslant (1 - s_1 \delta^{n/k-1})$$

hvor

p_j = grænseværdi (ligevægtstilstand)

s_1 = antal søjler (tilstande), hvori der ikke forekommer 0 efter k forsøg.

At den anførte differens er numerisk indebærer, at systemets tilstandsværdier kan svinge på begge sider af ligevægtstilstanden.

Ovennævnte ulighed vil kunne benyttes til forudberegning af et systems forsøgsmæssige afstand fra ligevægtstilstanden, idet det gælder for et vilkårligt tilstandselement, at

$$\sum_{j'} [p_j + (1 - s\delta)^{n/k-1}]\, a_i^{(0)} \geqslant$$

$$a_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{s} a_i^{(0)}\, p_{ij}^{(n)} \geqslant \sum_{j'} [p_j - (1 - s\delta)^{n/k-1}]\, a_i^{(0)},$$

hvor summationen på højre side af ulighedstegnet udstrækkes over de j-værdier, der svarer til de søjlenumre i sandsynlighedsmatricen af k'te orden, hvor det gælder, at minimumselementerne $> \delta$.

Anvendelsesmuligheder belyst ved eksempler

Den følgende behandling af den opstillede teoris anvendelsesmuligheder vil tage sit udgangspunkt i en række simple praktiske problemsituationer, idet vi starter med at tænke os 2 virksomheder A og B, der hver tilbyder et produkt a og b til et fælles marked.

Tænker vi os videre tidsfølgen opdelt i en række af lige store afsætningsperioder, vil vi på et givet tidspunkt kunne karakterisere markedets enkelte kundeemner ved deres forbrugsvaner, idet vi opstiller følgende 3 tilstandsmuligheder, der indbyrdes udelukker hinanden.

Tilstand 1. Hverken forbruger af vare a eller b

Tilstand 2. Forbruger af vare a

Tilstand 3. Forbruger af vare b

Den i det foregående udviklede teori vil herefter kunne benyttes til opstilling af en model, der indeholder ovennævnte problemsituation.

Tænker vi os nu en situation, hvor det enkelte kundeemne fra afsætningsperiode til afsætningsperiode overgår fra tilstand til tilstand med konstante sandsynligheder, kan vi opfatte det enkelte kundeemne som et delsystem og markedet (mængden af kundeemner) som et harmonisk sammensat system.

Endvidere tænker vi os indført følgende forudsætninger m. h. t. markedets købevaner:

Et kundeemne, der i en periode hverken har købt vare a eller b, køber med 50 % sandsynlighed heller ingen af de to varer i den nærmest følgende afsætningsperiode ($p_{11} = 0{,}5$) og med 25 % sandsynligheden for køb af de to varer er lige stor ($p_{22} = p_{23} = 0{,}5$).

Et kundeemne, der i en periode har købt vare a, køber med sikkerhed en af varerne i den næstfølgende afsætningsperiode, idet sandsynligheden for køb af de to varer er lige stor ($p_{22} = p^{2}{}_{3} = 0{,}5$).

Et kundeemne, der i en periode har købt vare b, køber i den nærmest følgende periode med 50 % sandsynlighed igen vare b ($p_{33} = 0{,}5$) og går med 25 % sandsynlighed over til at købe vare a ($p_{32} = 0{,}25$) eller hverken vare a eller b ($p_{31} = 0{,}25$).

Forudsættes det yderligere, at delsystemernes overgangssandsynligheder er identiske for de enkelte delsystemer, vil vi på grundlag af ovennævnte oplysninger kunne opstille sandsynlighedsmatricen for delsystemerne som

$$M^{(1)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Som det fremgår af indiceringen (1), omfatter de opstillede overgangssandsynligheder 2 på hinanden følgende afsætningsperioder.

Da det i praksis normalt vil være tilstrækkeligt at foretage en delvis beskrivelse af det sammensatte system, hvilket i det aktuelle tilfælde vil sige, at vi ikke identificerer de enkelte kundeemner, men kun interesserer os for antallet af kundeemner, der i en given afsætningsperiode befinder sig i en given tilstand, kan vi beskrive markedets udvikling ved en række vektorer, der for hver afsætningsperiode angiver det sammensatte systems tilstand.

Forudsætter vi videre, at markedet omfatter 1296 kundeemner, og at vi på beregningstidspunktet (initialtilstand) har en markedssituation, hvor

432 kundeemner køber hverken a eller b (tilstand 1)
720 – – a (tilstand 2)
144 – – b (– 3)

kan vi beregne det aktuelle, delvis beskrevne, sammensatte systems tilstandsmuligheder som

$$G\,(3, 1296) = \frac{(1296+3-1)!}{1296!\,(3-1)!} = 1298 \cdot 1297 \cdot \tfrac{1}{2} = 841753$$

Endvidere kan vi opstille systemets tilstandsvektor i initialsituationen som

$$A_G^{(0)} = \{432,\ 720,\ 144\}$$

og udregne systemets tilstandsvektor efter 1. afsætningsperiode som

$$e\,\{a_j^{(1)}\} = \{432,\ 720,\ 144\} \text{ x } \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$= \{252,\ 504,\ 540\}$$

Efter udregning af sandsynlighedsmatricen af 2' orden som

$$M^{(2)} = M^{(1)} \text{ x } M^{(1)} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \text{ x } \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} =$$

$$\left\{\begin{matrix} 5/16 & 5/16 & 3/8 \\ 1/8 & 3/8 & 1/2 \\ 1/4 & 5/16 & 7/16 \end{matrix}\right\}$$

vil vi kunne udregne tilstandsvektoren efter 2 afsætningsperioder som

$$e\,\{a_j^{(2)}\} = \{432,\ 720,\ 144\} \text{ x } \left\{\begin{matrix} 5/16 & 5/16 & 3/8 \\ 1/8 & 3/8 & 1/2 \\ 1/4 & 5/16 & 7/16 \end{matrix}\right\} = \{261,\ 450,\ 585\}$$

På lignende måde vil man, under forudsætning af opfyldelse af den ergodiske sætnings krav, kunne udregne systemets ligevægtstilstand som

$$e\,(\lim_{n\to\infty} A_G^{(n)}) = A_G^{(0)}\cdot\lim_{n\to\infty} M^{(n)} = \{432,\ 720,\ 144\} \times \begin{Bmatrix} 2/9 & 1/3 & 4/9 \\ 2/9 & 1/3 & 4/9 \\ 2/9 & 1/3 & 4/9 \end{Bmatrix}$$

$$= \{288, 432, 576\}$$

Svarende til fig. 4 vil systemets tilstandsudvikling kunne vises tabellarisk som

Forsøg	Tilstand		
	1	2	3
0	432	720	144
1	252	504	540
.			
.			
n	288	432	576

I praksis vil man ofte støde på den vanskelighed, at overgangssandsynlighederne ikke er kendte på beregningstidspunktet, hvilket imidlertid ikke nødvendigvis umuliggør modellens anvendelighed, idet man i de tilfælde, hvor der foreligger et relevant historisk talmateriale til fastlæggelse af tidligere tilstandsvektorer, vil kunne benytte denne information til bestemmelse af overgangssandsynlighederne. Således vil man i mange praktiske tilfælde have en situation, hvor en virksomhed på grundlag af bogholderi og/eller salgsstatistikker er i stand til at specificere salget i et større eller mindre antal fortidige afsætningsperioder.

Man kan i sådanne tilfælde starte med en beskrivelse af dette historiske talmateriale.

Karakteriserer man således markedssituationen, f. eks. set fra virksomhed A's synspunkt ved følgende tilstandsmuligheder for de enkelte kundeemner:

Tilstand 1. Forbruger af vare a
Tilstand 2. Ikke forbruger af vare a

og forudsætter vi som tidligere konstante overgangssandsynligheder, kan vi opstille følgende udtryk til beskrivelse af virksomhedens afsætning i en given periode

$$X_{i+1} = X_i\,(1-p_{12})+(N-X_i)\,p_{21}$$

hvor

X_i = afsætning i periode i
p_{12} = sandsynligheden for overgang fra tilstand 1 til tilstand 2
p_{21} = sandsynligheden for overgang fra tilstand 2 til tilstand 1.
N = total antal kundeemner

Dette giver mulighed for opstilling af følgende sandsynligheds-matrice:

$$M^{(1)} = \left\{ \begin{matrix} 1-p_{12} & p_{12} \\ p_{21} & 1-p_{21} \end{matrix} \right\}$$

Udtrykket for salgstallene kan omskrives til

$$x_{i+1} = x_i\,(1-p_{12})+(N-x_i)\,p_{21} = x_i\,(1-p_{12}-p_{21})+Np_{21}$$

der kan opfattes som et lineært udtryk af formen

$$y = ax+b$$

hvor vi har en række observerede, sammenhørende y- og x-værdier til bestemmelse af parametrene a og b.

Anvender vi på dette udtryk »mindste kvadraters metode«, får vi til bestemmelse af a og b:

$$a = (n\cdot\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y)/(n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2)$$
$$b = \Sigma y/n - a\Sigma x/n$$

hvor n angiver antal observationssæt.

Følgende simple eksempel viser den praktiske fremgangsmåde. Vi tænker os følgende historiske talmateriale opstillet i tabelform:

Periode	Salg	x	y	x^2	xy
−5	0	0	4	0	0
−4	4	4	6	16	24
−3	6	6	7	36	42
−2	7	7	7	49	49
−1	7	7	8	49	56
0	8				
		24	32	150	171

hvor

x = salget i periode i (modellens uafhængige variable)
y = salget i periode $i+1$ (modellens afhængige variable)
Heraf får vi

$a = 1-p_{12}-p_{21} = (5\cdot 171-24\cdot 32)/(5\cdot 150-24^2) = 0{,}5$
$b = p_{21}\cdot N = 32/5-0{,}5\cdot 24/5 = 4$

der giver følgende udtryk til successiv beregning af afsætningen:

$x_{i+1} = 0{,}5\cdot x_i+4$

Af det foregående fremgår det, at kendskabet til værdien af N (antal delsystemer i det sammensatte system) ikke er nødvendig for modellens opstilling, ligesom de opnåede resultater vil være uafhængige af N's værdi.

Ønsker vi videre at beregne det opstillede systems ligevægtstilstand, vil vi på grundlag af ovennævnte udtryk kunne finde overgangssandsynlighederne som

$$p_{12} = 0{,}5 - \frac{4}{N} \qquad\qquad p_{21} = \frac{4}{N}$$

hvorefter ligevægtstilstanden kan udtrykkes som

$$e\,(\lim_{n\to\infty} A_G^{(n)}) = \{O,\,N\} \text{ x } \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{matrix} 0{,}5+\frac{4}{N} & 0{,}5-\frac{4}{N} \\ \frac{4}{N} & 1-\frac{4}{N} \end{matrix} \right\}$$

Ved anvendelse af de tidligere angivne beregningsregler får vi følgende udtryk for ligevægtsmatricen:

$$\lim_{n\to\infty} M^{(n)} = \left\{ \begin{matrix} \frac{8}{N} & 1-\frac{8}{N} \\ \frac{8}{N} & 1-\frac{8}{N} \end{matrix} \right\}$$

hvorefter ligevægtsvektoren (markedets afsætningssituation i ligevægtstilstanden) beregnes som:

$$e\,(\lim_{n\to\infty} A_G^{(n)}) = \{O,\,N\} \text{ x } \left\{ \begin{matrix} \frac{8}{N} & 1-\frac{8}{N} \\ \frac{8}{N} & 1-\frac{8}{N} \end{matrix} \right\} = \{8,\; N-8\}$$

der angiver, at virksomhed a kan forvente at afsætte 8 vareenheder i ligevægtstilstanden.

Af ovennævnte udtryk vil man bemærke, at ligevægtsvektorens første element (A's afsætning i ligevægtstilstanden) er uafhængig af N (markedets totale antal kundeemner), ligesom det første element i udgangsvektoren er uden indflydelse på ligevægtsvektoren.

Den ovenfor beskrevne model[1]) vil som tidligere anført kunne anvendes i en lang række praktiske tilfælde og rummer blandt andet den fordel, at man har mulighed for at anlægge en statistisk vurdering af talmaterialets tilpasning til modellen, f. eks. gennem et linearitetstest, og derved begrænse anvendelsen til de tilfælde, hvor situationen tillader det.

I de tilfælde, hvor modellen således findes uegnet til beskrivelse af talmaterialet, vil det kunne blive nødvendigt at udvide modellen, f. eks. gennem indførelse af flere tilstandsmuligheder. En fremgangsmåde, som naturligvis på lignende måde stiller krav til en tilsvarende specificering af talmaterialet, f. eks. i form af bestemmelsen af en eller flere konkurrenters afsætning.

En udvidelse af modellen vil, hvor det findes hensigtsmæssigt, yderligere kunne give mulighed for at arbejde med variable overgangssandsynligheder, således at disse opfattes som funktioner af tiden og en række for det enkelte tilfælde relevante handlingsparametre (f. eks. salgsindsats, prisændringer, produktudvikling).

I sidstnævnte tilfælde vil man almindeligvis ikke kunne påregne at nå en ligevægtstilstand for systemet, hvorimod man vil kunne beskrive markedsudviklingen inden for en kortere eller længere interessehorisont.

Til slut skal det fremhæves, at de opstillede eksempler efter forfatternes mening kun giver et meget begrænset indtryk af de opstillede tankeganges praktiske anvendelsesmuligheder, ligesom der med fordel vil kunne videreudvikles modeller til mere specielle formål.

Litteraturhenvisning:

M. Fisz: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, Berlin 1962.

[1]) På grundlag af den anførte modelbeskrivelse er der ved Institut for Organisation og Virksomhedsledelse i Århus udarbejdet programmer for elektronisk databehandling af foreliggende praktisk talmateriale.

der angiver, at virksomhed a kan forvente at afsætte 8 vareenheder i ligevægtstilstanden.

Af ovennævnte udtryk vil man bemærke, at ligevægtsvektorens første element (A's afsætning i ligevægtstilstanden) er uafhængig af N (markedets totale antal kundeemner), ligesom det første element i udgangsvektoren er uden indflydelse på ligevægtsvektoren.

Den ovenfor beskrevne model[1]) vil som tidligere anført kunne anvendes i en lang række praktiske tilfælde og rummer blandt andet den fordel, at man har mulighed for at anlægge en statistisk vurdering af talmaterialets tilpasning til modellen, f. eks. gennem et linearitetstest, og derved begrænse anvendelsen til de tilfælde, hvor situationen tillader det.

I de tilfælde, hvor modellen således findes uegnet til beskrivelse af talmaterialet, vil det kunne blive nødvendigt at udvide modellen, f. eks. gennem indførelse af flere tilstandsmuligheder. En fremgangsmåde, som naturligvis på lignende måde stiller krav til en tilsvarende specificering af talmaterialet, f. eks. i form af bestemmelsen af en eller flere konkurrenters afsætning.

En udvidelse af modellen vil, hvor det findes hensigtsmæssigt, yderligere kunne give mulighed for at arbejde med variable overgangssandsynligheder, således at disse opfattes som funktioner af tiden og en række for det enkelte tilfælde relevante handlingsparametre (f. eks. salgsindsats, prisændringer, produktudvikling).

I sidstnævnte tilfælde vil man almindeligvis ikke kunne påregne at nå en ligevægtstilstand for systemet, hvorimod man vil kunne beskrive markedsudviklingen inden for en kortere eller længere interessehorisont.

Til slut skal det fremhæves, at de opstillede eksempler efter forfatternes mening kun giver et meget begrænset indtryk af de opstillede tankeganges praktiske anvendelsesmuligheder, ligesom der med fordel vil kunne videreudvikles modeller til mere specielle formål.

Litteraturhenvisning:

M. Fisz: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, Berlin 1962.

[1]) På grundlag af den anførte modelbeskrivelse er der ved Institut for Organisation og Virksomhedsledelse i Århus udarbejdet programmer for elektronisk databehandling af foreliggende praktisk talmateriale.