Et ordrepunktsystem med poissonfordelt efterspørgsel.

Af Svend Fredens*)

I. Forudsætninger og definitioner.

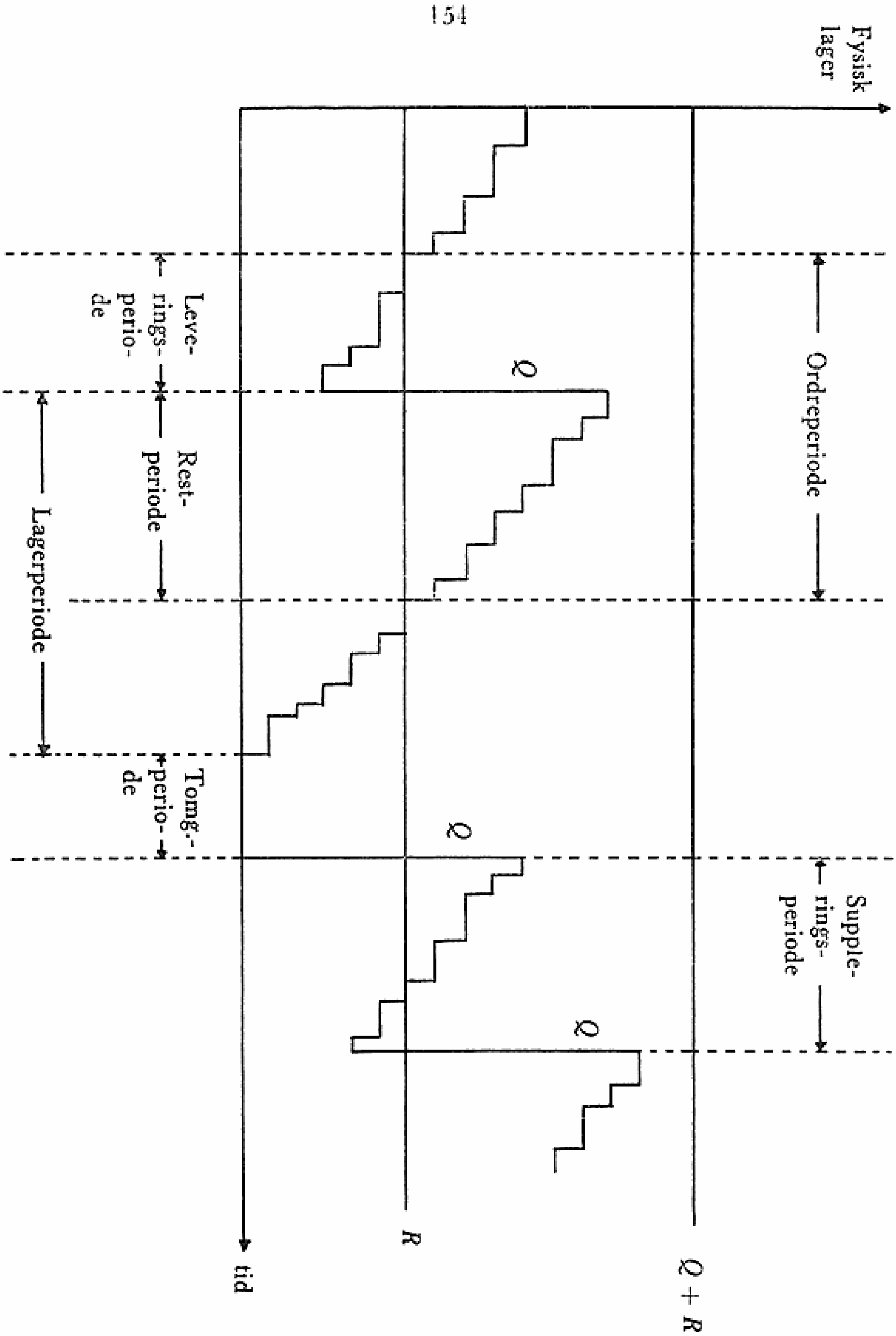
1. Formålet med nærværende artikel er at drøfte en i visse henseender forenklet lagermodel med stokastisk varierende efterspørgsel og stokastisk varierende leveringstid pr. ordre. Fremstillingen bygger på følgende forudsætninger (se figur 1):

1) En virksomhed fører en bestemt vare på lager. Den imod virksomheden rettede efterspørgsel efter varen er en stationær poissonproces med en gennemsnitlig efterspørgsel på a vareenheder pr. tidsenhed (hvor a er en positiv konstant). Vareafgangen fra lageret hidrører udelukkende fra efterspørgselen, idet der for enkeltheds skyld ses bort fra forældelse, svind m. v.

2) Varelageret suppleres efter ordrepunktsystemet, idet der afgives en ordre på Q vareenheder til leverandøren, hver gang virksomhedens *fysiske* lagerbeholdning af varen kommer ned på et på forhånd fastsat ordrepunkt R. Det forudsættes, at ordrestørrelsen Q og ordrepunktet R (som begge antages konstante i tiden) er hele tal, og at $Q > R \geqq 0$ (se afsnit I.3 nedenfor).

3) Leveringstiden pr. ordre er en stokastisk variabel, der følger en vilkårlig, stationær og af efterspørgselen uafhængig fordelingslov. Leveringstiderne for de enkelte ordrer er indbyrdes uafhængige og uafhængige af ordrestørrelsen Q. Den gennemsnitlige leveringstid pr. ordre er

*) Professor, Aarhus Universitet.


Fysisk lager
Ordreperiode
Supple- rings- periode
Leve- rings- perio- de
Rest- periode
Tomg.- perio- de
Lagerperiode
Q
Q
Q
R
Q + R
tid

Figur 1.

$1/b$ tidsenheder (hvor b er en positiv konstant). Specielt kan leveringstiden pr. ordre være konstant $1/b$ tidsenheder.

4) Efterspørgsel, som finder sted på tidspunkter, hvor det fysiske lager er udsolgt, bliver ikke tilfredsstillet (afvises). Alternativt kunne man tænke sig, at efterspørgsel, som ikke umiddelbart kan tilfredsstilles ved hjælp af det fysiske lager, helt eller delvis imødekommes ved, at virksomheden afgiver særordrer til leverandøren uden for den normale ordrerutine. I det følgende vil vi imidlertid for kortheds skyld betegne *al* efterspørgsel, som ikke umiddelbart kan tilfredsstilles ved hjælp af det fysiske lager, som afvist efterspørgsel.

2. Forudsætning 1 indebærer, at der i hvert efterspørgselstidspunkt efterspørges netop *een* vareenhed og at efterspørgselen pr. tidsenhed svinger »tilfældigt« omkring et i tiden *konstant* niveau på a vareenheder pr. tidsenhed i overensstemmelse med poissonsandsynlighederne $a^n e^{-a}/n!$; (ingen sæson, konjunktur eller trend i efterspørgselen efter varen). Den gennemsnitlige tidsafstand fra et *vilkårligt* tidspunkt T til det næstfølgende efterspørgselstidspunkt i efterspørgselsprocessen er $1/a$ tidsenheder, og den gennemsnitlige efterspørgsel i et *vilkårligt* tidsinterval $(T,\ T+t)$ af længden $t > 0$ tidsenheder er at vareenheder; (dette gælder uanset om T er et efterspørgselstidspunkt eller ikke).

Produktet $A = a/b$ af den gennemsnitlige efterspørgsel a pr. tidsenhed og den gennemsnitlige leveringstid $1/b$ pr. ordre kan fortolkes på to forskellige måder, nemlig dels som den gennemsnitlige efterspørgsel i et *vilkårligt* tidsrum af *samme* længde som middelleveringstiden $1/b$ pr. ordre (jfr. ovenfor) og dels som den gennemsitlige efterspørgsel pr. *leveringsperiode.* Hvis man specielt benytter middelleveringstiden pr. ordre som tidsenhed ($b = 1$), bliver den gennemsnitlige efterspørgsel pr. tidsenhed A vareenheder; den gennemsnitlige tidsafstand fra et vilkårligt tidspunkt T til det næstfølgende efterspørgselstidspunkt er da $1/A$ tidsenheder, og den gennemsnitlige efterspørgsel i et vilkårligt tidsinterval $(T, T + t)$ af længden $t > 0$ tidsenheder er At vareenheder (uanset om T er et efterspørgselstidspunkt eller ikke).

3. Ved et *ordretidspunkt* forstås et tidspunkt, i hvilket virksomheden afgiver en ordre på Q enheder til leverandøren (fordi den fysiske lagerbeholdning er kommet ned på ordrepunktet R, jfr. figur 1); ifølge forudsætning 1 og 2 er den fysiske lagerbeholdning i hvert ordretidspunkt netop lig med ordrepunktet R. En *ordreperiode* er tidsrummet mellem to efter hinanden følgende ordretidspunkter. Et *leveringstidspunkt* (suppleringstidspunkt) er et tidspunkt, i hvilket en til leverandøren afgiven ordre (på Q enheder) leveres til virksomhedens lager. Leveringstiden

(leveringsperioden) for en given ordre er tidsintervallet fra ordretidspunkt til leveringstidspunkt for den pågældende ordre. En *supplerings-periode* er tidsrummet mellem to efter hinanden følgende leveringstidspunkter. En *restperiode* er tidsintervallet fra et leveringstidspunkt til det næstfølgende ordretidspunkt; en restperiode er m. a. o. lig med salgstiden for et antal vareenheder, der svarer til det fysiske lager umiddelbart efter supplering i et vilkårligt suppleringstidspunkt, formindsket med lagerbeholdningen R ved restperiodens slutning. Virksomhedens fysiske lager er altid positivt i restperioderne (fordi restperioden ex definitione *ophører*, så snart det fysiske lager kommer ned på ordrepunktet $R \geqq 0$). En *lagerperiode* er et tidsrum, i hvilket virksomheden råder over en positiv fysisk lagerbeholdning, medens en *tomgangsperiode* er et tidsrum, i hvilket det fysiske lager er udsolgt (den fysiske lagerbeholdning 0). Afvisning af efterspørgsel kan kun forekomme i tomgangsperioderne.[1])

Under de ovenfor opstillede forudsætninger må ordrestørrelsen Q nødvendigvis være større end eller lig med ordrepunktet R. Hvis $Q < R$, er der risiko for, at det fysiske lager umiddelbart efter supplering vil være mindre end ordrepunktet R, og i så fald har virksomheden ingen mulighed for påny at supplere lageret op i henhold til den fastsatte suppleringsprocedure; (denne situation vil f. eks. indtræde, hvis det fysiske lager bliver udsolgt i løbet af leveringsperioden); i det specielle tilfælde, hvor ordrestørrelsen Q netop er lig med ordrepunktet R og hvor det fysiske lager bliver udsolgt i løbet af leveringsperioden, er den fysiske lagerbeholdning umiddelbart efter supplering netop lig med ordrepunktet R, og i så fald må virksomheden afgive en ny ordre til leverandøren i selve suppleringstidspunktet. I praksis vil Q dog som regel være *større* end R, og i det følgende vil vi for enkeltheds skyld antage, at dette er tilfældet.

Ifølge forudsætning 2 er ordrepunktet $R \geqq 0$. I praksis fastsættes ordrepunktet ofte således, at det svarer til den *forventede* efterspørgsel A pr. leveringsperiode med tillæg af et positivt *»sikkerhedslager«* til imødegåelse af tilfældige udsving i efterspørgselen i løbet af leveringsperioden (altså $R > A > 0$), men der er naturligvis intet til hinder for,

[1]) Begrebet lagerperiode må ikke forveksles med *lagertiden*, hvorved forstås den samlede tid, som de på lager værende varer tilsammen tilbringer på lageret i en nærmere angivet tidsperiode. Lagertiden i en given periode svarer geometrisk til arealet under lagerkurven i den pågældende periode (og den gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning i perioden er lig med lagertiden divideret med periodens længde).

at virksomheden kan vælge et ordrepunkt, der er mindre end eller lig med den gennemsnitlige efterspørgsel A pr. leveringsperiode.

Umiddelbart efter hver lagersupplering vil den fysiske lagerbeholdning altid være større end ordrepunktet R (fordi $Q > R$), og den næste ordre vil blive afgivet til leverandøren, så snart det fysiske lager efter restperiodens udløb pány kommer ned på ordrepunktet. Herefter vil yderligere ordreafgivelse til leverandøren først kunne finde sted *efter* at det fysiske lager *igen* er kommet op over ordrepunktet, og hertil kræves åbenbart, at den først afgivne ordre er blevet leveret til virksomhedens lager. Virksomheden vil derfor i ethvert tidspunkt højst have *een* ordre (på Q enheder) udestående hos leverandøren; i restperioderne har virksomheden ingen ordrer udestående hos leverandøren, og i hver leveringsperiode vil der altid være netop een udestående ordre hos leverandøren.[1])

Hver ordreperiode og hver suppleringsperiode består af een restperiode og een leveringsperiode (der afsluttes med levering af en ordre fra leverandøren), jfr. figur 1. Hver ordreperiode (suppleringsperiode) indeholder derfor netop eet leveringstidspunkt, i hvilket der indgår en ordre på Q enheder fra leverandøren til virksomhedens lager. Da den fysiske lagerbeholdning altid er positiv i restperioderne, kan lagertomgang og dermed afvisning af efterspørgsel kun forekommer i leveringsperioderne, og hver ordreperiode (suppleringsperiode) kan derfor højst indeholde een positiv tomgangsperiode.

Hver ordreperiode (resp. suppleringsperiode) kan også opfattes som værende sammensat af en lagerperiode og en tomgangsperiode (som eventuelt kan have længden 0 tidsenheder), og man har derfor:

(1) *Ordreperiode* (*suppleringsperiode*) = leveringstid + restperiode (salgstid for fysisk lager umiddelbart efter supplering formindsket med ordrepunktet R) = lagerperiode + tomgangsperiode.

Under de ovenfor opstillede forudsætninger er ordreperioderne og suppleringsperioderne kontinuerte statistiske variable, hvis længde afhænger af leveringstiden pr. ordre og af efterspørgselsprocessens forløb (efterspørgselsintervallernes længde).

4. Som tidligere nævnt kan afvisning af efterspørgsel kun forekomme i leveringsperioderne. Den afviste efterspørgsel pr. leveringsperiode er en diskontinuert statistisk variabel, der kan antage værdierne 0, 1, 2,

[1]) Hvis ordreafgivelsen til leverandøren derimod finder sted, når virksomhedens *bogførte* lager (her fysisk lager + varer i ordre hos leverandøren) kommer ned på ordrepunktet R, kan der være *flere* udestående ordrer (på Q enheder) hos leverandøren på samme tidspunkt, og i så fald behøver ordrestørrelsen ikke at være $\geq R$.

3, ... *ad inf.* (med sandsynligheder, der i almindelighed afhænger af formen af fordelingsloven for leveringstiden pr. ordre, jfr. nedenfor). I det følgende betegnes den *gennemsnitlige afviste efterspørgsel pr. leveringsperiode* med symbolet U; middelafvisningen U, der spiller en vigtig rolle i den følgende fremstilling, kan for praktiske formål defineres som den gennemsnitlige afviste efterspørgsel pr. leveringsperiode i et *langt* tidsrum, der indeholder et *stort* antal leveringsperioder. Det kan vises, at middelafvisningen U har følgende egenskaber (se tabel 1 og 2):

a) Såfremt ordrepunktet R er positivt, afhænger U af *formen* af fordelingsloven $f(t)$ for leveringstiden pr. ordre, d. v. s. U er en funktional af $f(t)$ for $R > 0$. Hvis virksomheden derimod vælger ordrepunktet $R = 0$, vil *al* efterspørgsel i leveringsperioderne blive afvist, og den gennemsnitlige afviste efterspørgsel U pr. leveringsperiode bliver da lig med gennemsnitsefterspørgselen A pr. leveringsperiode uanset formen af $f(t)$, d. v. s. at $U = A$ for $R = 0$.

b) Middelafvisningen er en *voksende* funktion af den gennemsnitlige efterspørgsel A pr. leveringsperiode; jo større A er, desto større er alt andet lige risikoen for, at virksomhedens lager vil blive udsolgt i løbet af leveringsperioden, og desto større bliver alt andet lige den gennemsnitlige afviste efterspørgsel U pr. leveringsperiode. For $R > 0$ er den til en given forøgelse af A svarende tilvækst i U, alt andet lige, altid *mindre* end tilvæksten i A, og den til en given forøgelse af A svarende tilvækst i U er alt andet lige desto mindre jo *større* ordrepunkt R, virksomheden arbejder med. For $R = 0$ er middelafvisningen U som ovenfor nævnt altid lig med den gennemsnitlige efterspørgsel A pr. leveringsperiode, og tilvæksten i U er da følgelig altid lig med tilvæksten i A.

c) Middelafvisningen er en *aftagende* funktion af ordrepunktet R; jo større ordrepunkt R virksomheden vælger, desto mindre er alt andet lige risikoen for, at virksomhedens lager vil blive udsolgt i løbet af leveringsperioden, og desto mindre bliver derfor, alt andet lige, den gennemsnitlige afviste efterspørgsel U pr. leveringsperiode. Den til en given forøgelse af R svarende formindskelse af U er altid numerisk *mindre* end tilvæksten i R, og formindskelsen af U, svarende til en given forøgelse af R, er alt andet lige desto mindre, jo *større* R er i forvejen. Hvis ordrepunktet R er meget større end den forventede efterspørgsel A pr. leveringsperiode, vil en yderligere forøgelse af R ikke medføre nogen væsentlig formindskelse af U (fordi praktisk talt al efterspørgsel i leveringsperioderne er tilfredsstillet i forvejen); hvor

Leveringstid pr. ordre	p_n	U
Konstant	$p_n = \frac{A^n}{n!} e^{-A}$	$U = A \sum_{x=R}^{\infty} \frac{A^x}{x!} e^{-A} - R \sum_{x=R+1}^{\infty} \frac{A^x}{x!} e^{-A}$
Eksponentiel: $f(t) = be^{-bt}$	$p_n = \frac{1}{1+A}\left(\frac{A}{1+A}\right)^n$	$U = A\,(1+1/A)^{-R}$
Hyper-eksponentiel: $f(t) = 2bp^2e^{-2bpt}+2bq^2e^{-2pqt}$ $(p, q > 0,\ p+q = 1)$	$p_n = \frac{2p^2}{A+2p}\left(\frac{A}{A+2p}\right)^n + \frac{2q^2}{A+2q}\left(\frac{A}{A+2p}\right)^n$	$U = \frac{A}{2}\,[(1+2p/A)^{-R}+(1+2q/A)^{-R}]$

Tabellen indeholder en oversigt over **sandsynlighederne p_n for,** at der i løbet af en leveringsperiode vil blive efterspurgt netop n vareenheder, og over middelafvisningen U pr. leveringsperiode ved henholdsvis konstant, eksponentielt og hyper-eksponentielt fordelt leveringstid pr. ordre (med en gennemsnitlig leveringstid på $1/b$ tidsenheder pr. ordre). Den eksponentielle fordeling er et specialtilfælde af den hyper-eksponentielle fordeling (svarende til $p = q = \frac{1}{2}$). Sandsynlighederne p_n kan bestemmes ved hjælp af udtrykket:

$$p_n = \frac{a^n}{n!} \int_0^{\infty} t^n f(t) e^{-at} dt \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

og middelafvisningen U er givet ved:

$$U = \sum_{x=R+1}^{\infty} (x - R)\, p_x \qquad (R = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Den gennemsnitlige efterspørgsel pr. leveringsperiode er i alle tilfælde A vareenheder (jfr. afsnit I. 2), og variansen på efterspørgselen pr. leveringsperiode er A, $A\,(1 + A)$ og $A\,(1 + A) + A^2\,(1 - 4pq)/2pq$ ved henholdsvis konstant, eksponentielt og hyper-eksponentielt fordelt leveringstid pr. ordre.

Tabel 1.

Leveringstid pr. ordre	p	A	$R=0$	$R=10$	$R=20$	$R=30$	$R=40$	$R=50$	$R=60$	$R=80$
Konstant		5	5	0,02						
		10	10	1,25						
		20	20	10,01	1,78	0,03				
		50	50	40,00	30,00	20,00	10,21	2,82	0,28	
Eksponentiel		5	5	0,81	0,13	0,02				
		10	10	3,86	1,49	0,57	0,22	0,09	0,03	
		20	20	12,28	7,54	4,63	2,84	1,74	1,07	0,40
		50	50	41,02	33,65	27,60	22,64	18,58	15,24	10,26
Hyper-eksponen-tiel	0,4	5	5	0,86	0,17	0,03	0,01			
	0,1		5	1,80	1,15	0,77	0,52	0,35	0,24	0,11
	0,4	10	10	3,93	1,59	0,66	0,28	0,12	0,06	0,01
	0,1		10	5,06	3,55	2,80	2,27	1,86	1,52	1,03
	0,4	20	20	12,34	7,68	4,82	3,06	1,95	1,25	0,53
	0,1		20	13,28	9,98	8,17	7,03	6,21	5,56	4,52
	0,4	50	50	41,05	33,76	27,80	22,93	18,94	15,67	10,77
	0,1		50	41,57	35,41	30,85	27,39	24,74	22,67	19,64

Middelafvisning U pr. leveringsperiode ved henholdsvis konstant, eksponentielt og hyper-eksponentielt fordelt leveringstid pr. ordre med en gennemsnitlig leveringstid på $1/b$ tidsenheder pr. ordre; (hvor intet er anført er $U < 0{,}005$).

Tabel 2.

stor R skal være i forhold til A, for at denne situation vil indtræde, afhænger af formen af fordelingsloven $f(t)$ pr. ordre.[1])

Da hver ordreperiode og hver suppleringsperiode netop indeholder een leveringsperiode, kan middelafvisningen U også fortolkes som den gennemsnitlige afviste efterspørgsel pr. ordreperiode (resp. suppleringsperode). Under de ovenfor opstillede forudsætninger er det fysiske lager ved begyndelsen og slutningen af hver ordreperiode lig med ordrepunktet R, og da der som tidligere nævnt indgår netop een ordre på Q enheder til virksomhedens lager i hver ordreperiode, er lagerafgangen og dermed den *tilfredsstillede efterspørgsel* i hver ordreperiode lig med ordrestørrelsen Q. I det lange løb er den gennemsnitlige, *totale* efterspørgsel pr. ordreperiode følgelig lig med ordrestørrelsen Q forøget med den gennemsnitlige afviste efterspørgsel U pr. ordreperiode, altså $Q+U$ vareenheder. Den tilfredsstillede efterspørgsel pr. *suppleringsperiode* er derimod en (diskontinuert) statistisk variabel, der kan antage værdierne $Q-R$, $Q-R+1$, ..., $Q+R$ (med sandsynligheder, som i almindelighed afhænger af formen af fordelingsloven $f(t)$ for leveringstiden pr. ordre); da der svarer netop een suppleringsperiode til hver ordreperiode, er den gennemsnitlige tilfredsstillende efterspørgsel pr. suppleringsperiode i det lange løb lig med den tilfredsstillede efterspørgsel Q pr. ordreperiode, og den gennemsnitlige, totale efterspørgsel pr. suppleringsperiode er følgelig $Q+U$ vareenheder. Det kan vises, at fordelingsloven for den tilfredsstillede efterspørgsel pr. suppleringsperiode er symmetrisk omkring middelværdien Q uanset formen af fordelingsloven for leveringstiden pr. ordre.

5. Hvis ordrepunktet R er positivt, er virksomhedens fysiske lagerbeholdning ved slutningen af leveringsperioderne (umiddelbart før lageret suppleres op ved levering af en ordre på Q enheder fra leverandøren) en diskontinuert statistisk variabel, der kan antage værdierne 0, 1, 2, ..., R (med sandsynligheder, som afhænger af formen af fordelings-

[1]) Størrelsen U spiller en vigtig rolle i en række forskellige lagermodeller med poissonfordelt efterspørgsel. Eksempelvis kan udtrykket (4–44) i *G. Hadley & T. M. Whitin*'s bog »Analysis of Inventory Systems« med de i nærværende artikel anvendte symboler skrives på formen $P_{out} = [U(A,R) - U(A,R+Q)]/Q$, og udtrykket (5–20) i samme værk kan skrives som $p_{or} = [A - U(A,Q)]/Q$, hvor A er den gennemsnitlige efterspørgsel i tidsrummet mellem to efter hinanden følgende inventurtidspunkter; (begge disse udtryk forudsætter konstant leveringstid pr. ordre). Af ovenstående bemærkninger følger umiddelbart, at P_{out} er en voksende funktion af A og en aftagende funktion af Q og R, medens p_{or} er en voksende funktion af A og en aftagende funktion af Q.

loven $f(t)$ for leveringstiden pr. ordre), og for $R = 0$ er det fysiske lager umiddelbart før supplering altid lig med 0.

Uanset om ordrepunktet er positivt eller 0, er virksomhedens fysiske lager umiddelbart før supplering lig med det fysiske lager R ved leveringsperiodens begyndelse, formindsket med den i løbet af leveringsperioden tilfredsstillede efterspørgsel, altså:

(2) *Fysisk lager umiddelbart før supplering* = ordrepunkt R — samlet efterspørgsel i leveringsperioden + afvist efterspørgsel i leveringsperioden.

Den fysiske lagerbeholdning umiddelbart *efter* supplering er naturvis lig med det fysiske lager umiddelbart før supplering, forøget med ordrestørrelsen Q.

II. Systemets ligevægtsegenskaber.

Med udgangspunkt i de begreber, der er defineret i det foregående, skal vi nu bestemme en række forskellige størrelser, som kan tjene til karakteristik af lagerprocessens opførsel i det lange løb (når processen er kommet i statistisk ligevægt).

a) Ifølge (2) er den *gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning* L^- *umiddelbart før supplering* lig med ordrepunktet R formindsket med den gennemsnitlige tilfredsstillede efterspørgsel $A - U$ pr. leveringsperiode, altså:

$$L^- = R - A + U \tag{3}$$

Gennemsnitslageret L^- kan for praktiske formål fortolkes som den gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning umiddelbart før supplering i en *lang* periode, der indeholder et *stort* antal leveringsperioder (suppleringstidspunkter). For $R > 0$ er L^- en voksende funktion af R, en aftagende funktion af A og en funktional af $f(t)$, og L^- er positiv (men mindre end R): hvis $R \gg A$, vil en yderligere forøgelse af R, alt andet lige, kun i meget ringe udstrækning påvirke værdien af U, og gennemsnitslageret L^- vil derfor alt andet lige vokse med praktisk taget samme beløb som R. For $R = 0$ er L^- naturligvis lige med 0 (uafhængigt af formen af $f(t)$) i overensstemmelse med, at $U = A$ for $R = 0$.

Den gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning L^+ umiddelbart *efter* supplering er lig med L^- forøget med ordrestørrelsen Q, altså:

$$L^+ = L^- + Q = R - A + U + Q \tag{4}$$

For $R > 0$ er L^+ en voksende funktion af Q og R, en aftagende funktion af A og en funktional af $f(t)$, og for $R = 0$ er L^+ altid lig med ordrestørrelsen Q (uafhængigt af formen af $f(t)$).

b) Ifølge (1) er den *gennemsnitlige ordreperiode* (*suppleringsperiode*) lig med summen af den gennemsnitlige leveringstid pr. ordre og den gennemsnitlige restperiode, og da den gennemsnitlige restperiode er lig med den gennemsnitlige lagerafgang $L^{+} - R$ pr. restperiode divideret med den gennemsnitlige efterspørgsel a pr. tidsenhed, fås herefter følgende udtryk for den gennemsnitlige ordreperiode (suppleringsperiode):

$$P = \frac{1}{b} + \frac{L^{+} - R}{a} = \frac{L^{+} - R + A}{a} = \frac{1}{b}\,\frac{L^{+} - R + A}{A}$$

hvoraf under hensyn til (4):

$$\text{(5a)} \qquad P = \frac{Q+U}{a} = \frac{1}{b}\,\frac{Q+U}{A}$$

eller med middelleveringstiden $1/b$ pr. ordre som tidsenhed:

$$\text{(5b)} \qquad P = \frac{Q+U}{A}$$

Rigtigheden af (5) er i virkeligheden umiddelbart indlysende, idet den gennemsnitlige ordreperiode (suppleringsperiode) åbenbart må være lig med den gennemsnitlige efterspørgsel $A+U$ pr. ordreperiode (suppleringsperiode) divideret med den gennemsnitlige efterspørgsel a resp. A pr. tidsenhed. For $R > 0$ er den ved (5b) bestemte gennemsnitlige ordreperiode (suppleringsperiode) en aftagende funktion af A og R, en voksende funktion af Q og en funktional af $f(t)$; hvis $R \gg A$, bliver middelafvisningen U pr. leveringsperiode relativt lille, og den gennemsnitlige ordreperiode (suppleringsperiode) er da tilnærmelsesvis Q/A middelleveringsperioder i overensstemmelse med, at der i så fald kun i begrænset omfang forekommer afvisning i systemet (dette gælder især, hvis Q samtidig er væsentlig større end R, d. v. s. hvis $Q \gg U$). For $R = 0$ er den gennemsnitlige ordreperiode (suppleringsperiode) $1 + Q/A$ middelleveringsperioder, uafhængigt af formen af $f(t)$.

Det *gennemsnitlige antal afgivne* (*hjemtagne*) *ordrer B pr. tidsenhed* er den reciprokke værdi af den gennemsnitlige ordreperiode (suppleringsperiode):

$$\text{(6a)} \qquad B = b\,\frac{A}{Q+U}$$

eller med middelleveringstiden $1/b$ pr. ordre som tidsenhed:

$$\text{(6b)} \qquad B = \frac{A}{Q+U}$$

Størrelsen B kan naturligvis for praktiske formål fortolkes som det gennemsnitlige antal afgivne (hjemtagne) ordrer pr. tidsenhed i en lang tidsperiode, der indeholder et stort antal ordretidspunkter (suppleringstidspunkter). Hvis den gennemsnitlige efterspørgsel efter varen f. eks. udgør $a = 5$ enheder pr. uge, og leveringstiden pr. ordre er *eksponentielt fordelt* med en gennemsnitlig leveringstid på $1/b = 4$ uger pr. ordre (svarende til en forventet efterspørgsel på $A = 20$ vareenheder pr. leveringsperiode), og virksomheden vælger ordrepunktet $R = 30$ (svarende til et »sikkerhedslager« på 10 vareenheder), bliver middelafvisningen $U = 4{,}63$ vareenheder pr. leveringsperiode (resp. ordreperiode eller suppleringsperiode), jfr. tabel 2. Med en ordrestørrelse på $Q = 40$ bliver den gennemsnitlige ordreperiode (suppleringsperiode) herefter $P = (40+4{,}63)/5 = 8{,}93$ uger, svarende til at virksomheden i det lange løb afgiver gennemsnitlig $B = 1/8{,}93 = 0{,}112$ ordrer pr. uge til leverandøren (d. v. s. gennemsnitlig $4 \cdot 0{,}112 = 0{,}448$ ordrer pr. middelleveringsperiode og gennemsnitlig $52 \cdot 0{,}112 = 5{,}82$ ordrer pr. år). Hvis leveringstiden pr. ordre derimod er *konstant* (4 uger), bliver middelafvisningen under iøvrigt uændrede forudsætninger kun $U = 0{,}03$ vareenheder pr. leveringsperiode, og den gennemsnitlige ordreperiode (suppleringsperiode) bliver da i det lange løb $P = 8{,}01$ uger, svarende til at virksomheden i det lange løb afgiver gennemsnitlig $52/8{,}01 = 6{,}49$ ordre pr. år til leverandøren.

c) Ifølge (1) er den gennemsnitlige ordreperiode (suppleringsperiode) lig med summen af den gennemsnitlige lagertid og den gennemsnitlige tomgangstid pr. ordreperiode (suppleringsperiode). Den gennemsnitlige lagertid pr. ordreperiode (suppleringsperiode) er lig med den gennemsnitlige salgstid for de Q vareenheder, som sælges fra lageret i løbet af hver ordreperiode, altså Q/a tidsenheder, og den gennemsnitlige tomgangstid pr. ordreperiode (suppleringsperiode) er derfor $P - Q/a$ tidsenheder, hvoraf under hensyn til (5a):

Gennemsnitlig tomgangstid pr. ordreperiode (suppleringsperiode)

$$= \frac{Q+U}{a} - \frac{Q}{a} = \frac{U}{a},$$

i overensstemmelse med, at der gennemsnitlig afvises U vareenheder pr. ordreperiode (suppleringsperiode). Herefter kan man bestemme *den gennemsnitlige lagertid pr. tidsenhed* og *den gennemsnitlige tomgangstid pr. tidsenhed* ved at dividere den gennemsnitlige lagertid Q/a resp. den gennemsnitlige tomgangstid U/a pr. ordreperiode med den gennemsnitlige ordreperiode $(Q+U)/a$. Herved fås:

(7) *Gennemsnitlig lagertid pr. tidsenhed* $= \dfrac{Q}{Q+U}$

og

(8) *Gennemsnitlig tomgangstid pr. tidsenhed* $= \dfrac{U}{Q+U}$

Den gennemsnitlige lagertid pr. tidsenhed kan for praktiske formål fortolkes som den brøkdel af *tiden*, i hvilken virksomheden i det lange løb råder over en positiv fysisk lagerbeholdning af varen, eller (da den imod lageret rettede efterspørgsel er poissonfordelt) som den brøkdel af *efterspørgselen*, som bliver *tilfredsstillet* i det lange løb, fordi den finder sted på tidspunkter, hvor virksomhedens fysiske lagerbeholdning er positiv. Den gennemsnitlige tilfredsstillede efterspørgsel S pr. tidsenhed er naturligvis lig med den genemsnitlige efterspørgsel a pr. tidsenhed multipliceret med faktoren $Q/(Q+U)$, altså:

(9a) $$S = b\frac{AQ}{Q+U}$$

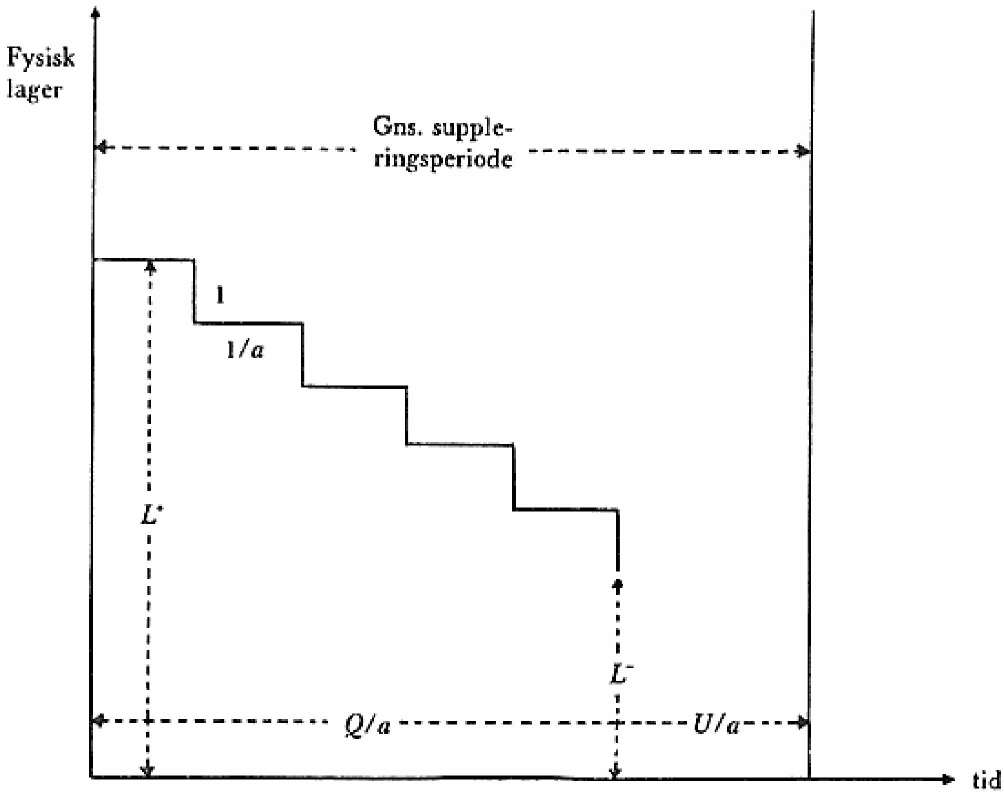
eller med middelleveringstiden $1/b$ pr. ordre som tidsenhed:

(9b) $$S = \frac{AQ}{Q+U}$$

Det gennemsnitlige antal afgivne (og hjemtagne) ordrer pr. tidsenhed er lig med den gennemsnitlige lagerafgang S pr. tidsenhed divideret med ordrestørrelsen Q, altså $B = Ab/(Q+U)$, jfr. (6a). Virksomhedens *servicegrad S/A over for kunderne* (defineret som den brøkdel af efterspørgselen, som tilfredsstilles i det lange løb) er lig med den gennemsnitlige lagertid $Q/(Q+U)$ pr. tidsenhed, fordi efterspørgselen er poissonfordelt. For $R > 0$ er servicegraden en voksende funktion af Q og R, en aftagende funktion af A og en funktional af $f(t)$. Med samme værdier af A, R og Q som i det numeriske eksempel i afsnit (b) ovenfor, bliver servicegraden over for kunderne 0,896 ved eksponentielt fordelte leveringstider pr. ordre, og 0,999 ved konstant leveringstid (svarende til, at henholdsvis 89,6 % og 99,9 % af efterspørgselen tilfredsstilles i det lange løb). Hvis $R \gg A$, bliver servicegraden over for kunderne praktisk taget lig med 1, og enhver yderligere forøgelse af R vil i så fald kun medføre en meget lille forøgelse af servicegraden (dette gælder især, hvis Q samtidig er meget større end R). For $R = 0$ er servicegraden lig med $Q/(Q+A)$ uanset formen af $f(t)$; servicegraden er altid $\geqq Q/(Q+A)$.

Den gennemsnitlige tomgangstid pr. tidsenhed kan på tilsvarende måde fortolkes som den brøkdel af *tiden*, i hvilken virksomhedens fysiske lager i det lange løb er udsolgt, eller (da efterspørgselen er poissonfordelt) som den brøkdel af *efterspørgselen*, som i det lange løb bliver *afvist*, fordi lageret er udsolgt på de tidspunkter, hvor efterspørgselen finder sted. Den gennemsnitlige afviste efterspørgsel udgør i det lange løb $AbU/(Q+U)$ vareenheder pr. tidsenhed ($AU/(Q+U)$ vareenheder pr. middelleveringsperiode).

d) For at bestemme virksomhedens *gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning* af varen bemærker vi, at det gennemsnitlige fysiske lager udgør $L^{+}=R-A+U+Q$ vareenheder ved begyndelsen og $L^{-}=R-A+U$ vareenheder ved slutningen af suppleringsperioderne, i overensstemmelse med, at den gennemsnitlige lagerafgang pr. suppleringsperiode er Q vareenheder. Figur 2 viser lagerkurvens forløb i en »gennemsnitlig« (eller »typisk«) suppleringsperiode. Den gennemsnitlige tidsafstand fra begyndelsen af en suppleringsperiode til det første efterspørgsels-



Figur 2.

tidspunkt i suppleringsperioden er i det lange løb $1/a$ tidsenheder, og middelafstanden mellem de resterende $Q-1$ efterspørgselstidspunkter i den »typiske« suppleringsperiode er ligeledes $1/a$ tidsenheder. Den samlede lagertid Z i den »typiske« suppleringsperiode (svarende til arealet under lagerkurven i figur 2) er følgelig:

$$Z = \frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{3}{a}+\ldots+\frac{Q}{a}+\frac{Q}{a}\cdot L^{-} = \frac{Q}{a}\left(\frac{Q+1}{2}+L^{-}\right)$$

og den gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning L kan herefter på sædvanlig måde bestemmes ved at dividere lagertiden Z med længden $(Q+U)/a$ af den »typiske« suppleringsperiode[1]). Herved fås:

$$L = \frac{Q}{Q+U}\left(\frac{Q+1}{2}+L^{-}\right)$$

eller under hensyn til (3) og (4):

$$L = \frac{Q}{Q+U}\left(\frac{1}{2}+L^{+}-\frac{Q}{2}\right) = \frac{Q}{Q+U}\left(\frac{1}{2}+\frac{L^{+}+L^{-}}{2}\right) \tag{10}$$

Gennemsnitslageret L, der for praktiske formål kan fortolkes som virksomhedens gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning af varen i en lang tidsperiode, der indeholder et stort antal suppleringsperioder (ordreperioder), er en voksende funktion af Q og R, en aftagende funktion af A og (for $(R > 0)$ en funktional af $f(t)$. For $R = 0$ er $L = Q(Q+1)/2(Q+A)$ uafhængigt af formen af $f(t)$; gennemsnitslageret er altid $\geqq Q\,(Q+1)/2\,(Q+A)$. Faktoren $Q/(Q+U)$ (servicegraden) på højre side af lighedstegnet i (10) er en »korrektionsfaktor«, som beror på, at der er tale om et afvisningssystem (i et rent ventesystem, hvor al efterspørgsel tilfredsstilles i det lange løb, er servicegraden 1), og addenden 1/2 i parentesen på højre side af lighedstegnet er et »korrektionsled«, som beror på, at vareafgangen fra lageret er diskontinuert (med 1 vareenhed ad gangen). Med samme numeriske forudsætninger som i eksemplet i afsnit (*b*) ovenfor bliver den gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning 31,48 vareenheder ved eksponentielt fordelte leveringstider pr. ordre og 30,50 vareenheder ved konstant leveringstid.

Hvis $R \gg A$, vil enhver yderligere forøgelse af ordrepunktet alt andet lige bevirke, at gennemsnitslageret L forøges med praktisk taget samme beløb som R, medens en forøgelse af ordrestørrelsen vil medføre en stigning i L med et beløb, der praktisk taget svarer til *halvdelen* af for-

[1]) Lagerkurven i figur 2 er altså en trappekurve med en trinhøjde på 1 (vareenhed) og en trinlængde på $1/a$ (tidsenheder). Det understreges. at figuren refererer til en *»gennemsnitlig«* suppleringsperiode med et *positivt* slutlager L^{-} og en *positiv* tomgangstid på U/a tidsenheder. I en *konkret* suppleringsperiode kan der naturligvis ikke både forekomme et positivt slutlager *og* en positiv tomgangsperiode.

Gns. efterspørgsel pr. tidsenhed	$a = Ab$
Gns. efterspørgsel pr. leveringsperiode	A
Gns. afvist efterspørgsel pr. leveringsperiode	$U = U\{A,R;\, f(t)\};\ U\{A,0;\, f(t)\} = A$
Gns. efterspørgsel pr. ordre-periode (suppleringsperiode)	$Q+U$
Gns. fysisk lagerbeholdning før resp. efter supplering	$L^- = R-A+U$ $L^+ = L^-+Q = R-A+U+Q$
Gns. ordreperiode (suppleringsperiode)	$P = (Q+U)/Ab$
Gns. antal afgivne ordrer pr. tidsenhed	$B = Ab/(Q+U)$
Gns. lagertid pr. tidsenhed (servicegrad)	$Q/(Q+U)$
Gns. tomgangstid pr. tidsenhed	$U/(Q+U)$
Gns. tilfredsstillet efterspørg-sel (lagerafgang) pr. tidsenh.	$S = AbQ/(Q+U)$
Gns. fysisk lagerbeholdning	$L = \frac{Q}{Q+U}\left(\frac{1}{2}+\frac{L^+ + L^-}{2}\right)$
Omsætningshastighed	$H = 2Ab/(1+L^+ + L^-)$

Tabel 8.

Q	A	Funktion	$R = 5$	$R = 10$	$R = 20$	$R = 30$	$R = 40$	$R = 50$
20	10	S/A	0,763	0,838				
		B	0,382	0,419				
		L	8,94	12,04				
		H	0,85	0,70				
	50	S/A	0,306	0,328				
		B	0,766	0,819				
		L	3,30	3,78				
		H	4,64	4,34				
40	10	S/A	0,866	0,912	0,964	0,986		
		B	0,216	0,228	0,241	0,246		
		L	18,79	22,21	30,84	40,49		
		H	0,46	0,41	0,31	0,24		
	50	S/A	0,469	0,494	0,543	0,592		
		B	0,586	0,617	0,679	0,740		
		L	9,75	10,62	13,12	16,63		
		H	2,41	2,33	2,07	1,78		
60	10	S/A	0,906	0,940	0,976	0,991	0,996	0,999
		B	0,151	0,157	0,162	0,165	0,166	0,166
		L	28,74	32,28	40,97	50,59	60,50	70,48
		H	0,32	0,29	0,24	0,20	0,16	0,14
	50	S/A	0,570	0,594	0,641	0,685	0,726	0,764
		B	0,475	0,495	0,534	0,571	0,605	0,636
		L	17,54	18,72	21,88	26,10	31,32	37,49
		H	1,62	1,59	1,46	1,31	1,16	1,02

Tabel 4.

øgelsen af ordrestørrelsen. For $Q \geqq U$ er gennemsnitslageret L tilnærmelsesvis lig med den gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning L^{+} ved begyndelsen af suppleringsperioderne, formindsket med halvdelen af den gennemsnitlige lagerafgang Q pr. suppleringsperiode, eller (hvad der er ensbetydende hermed) tilnærmelsesvis lig med det aritmetiske gennemsnit $(L^+ + L^-)/2$ af det gennemsnitlige fysiske lager henholdsvis ved begyndelsen og slutningen af suppleringsperioderne.

Lagerets *gennemsnitlige omsætningshastighed H pr. tidsenhed,* defineret som forholdet mellem den gennemsnitlige lagerafgang S pr. tidsenhed og den gennemsnitlige fysiske lagerbeholdning L, er en aftagende funktion af Q og R, en voksende funktion af A og (for $R > 0$) en funktional af $f(t)$; for $R = 0$ er omsætningshastigheden pr. tidsenhed lig med $2a/(Q+1)$ uafhængigt af formen af $f(t)$; omsætningshastigheden er altid $\leqq 2a/(Q+1)$ pr. tidsenhed.

e) Tabel 3 indeholder en summarisk oversigt over de vigtigste af de størrelser, der er omtalt i det foregående. De for lagerprocessens forløb karakteristiske gennemsnitsstørrelser afhænger af middelefterspørgselen a pr. tidsenhed, den gennemsnitlige leveringstid $1/b$ pr. ordre, ordrestørrelsen Q og ordrepunktet R samt (for $R > 0$) af formen af fordelingsloven $f(t)$ for leveringstiden pr. ordre. Hvis man specielt ønsker at benytte den gennemsnitlige leveringstid pr. ordre som tidsenhed, behøver man blot at sætte $b = 1$ i de i tabellen anførte udtryk. Når den gennemsnitlige leveringstid pr. ordre er givet, kan fordelingsloven $f(t)$ for leveringstiden pr. ordre *kun* øve indflydelse på de i tabellen anførte gennemsnitsstørrelser gennem middelafvisningen U.

I tabel 4 er servicegraden S/A, det gennemsnitlige antal afgivne (hjemtagne) ordrer B pr. middelleveringsperiode, gennemsnitslageret L og lagerets omsætningshastighed H pr. middelleveringsperiode tabuleret for en række forskellige værdier af A, Q og R under forudsætning af eksponentielt fordelte leveringstider pr. ordre.[1]) Hvis man ønsker at beregne det gennemsnitlige antal afgivne (hjemtagne) ordrer resp. lagerets omsætningshastighed *pr. år,* skal de i tabellen anførte værdier af B og H multipliceres med antallet af middelleveringsperioder pr. år. For $A = 50$, $Q = 60$ og $R = 40$ er $B = 0{,}605$ og $H = 1{,}16$ ifølge tabellen; hvis den gennemsnitlige leveringstid pr. ordre f. eks. er 2 måneder (svarende til 6 middelleveringsperioder pr. år), vil virksomheden herefter i det lange løb afgive gennemsnitlig $6 \cdot 0{,}605 = 3{,}63$ ordrer pr. år til leverandøren, og lageret vil i det lange løb blive omsat gennemsnitlig $6 \cdot 1{,}16 = 6{,}96$ gange pr. år.

[1]) Denne specielle lagermodel er behandlet mere indgående i *E. Lykke Jensens* afhandling: Lager, produktion og prisfastsættelse fra et stokastisk synspunkt (København 1963), side 29 ff. Lykke Jensen betegner ordrestørrelsen med Δ, ordrepunktet med s og den gennemsnitlige efterspørgsel pr. leveringsperiode med $1/\varrho$.

III. Lagerpolitik.

En række af de størrelser, der er omtalt i foregående afsnit, vil kunne anvendes som udgangspunkt for fastlæggelsen af virksomhedens lagerpolitik, d. v. s. for virksomhedens valg af ordrepunktet R og ordrestørrelsen Q (idet vi et øjeblik betragter middelefterspørgselen a og fordelingsloven $f(t)$ som givne). I den traditionelle lagerteori antages det hyppigt, at virksomheden vil tilstræbe at minimere de gennemsnitlige anskaffelses- og lageromkostninger pr. tidsenhed (incl. eventuelle »bødeomkostninger« for afvist efterspørgsel). Omkostningsminimeringen kan eventuelt gennemføres uder hensyntagen til visse på forhånd fastsatte *bibetingelser*, f. eks. i form af et krav om, at servicegraden over for kunderne ikke må komme ned under et vist niveau, eller at lageret i det lange løb højst må blive udsolgt et vist antal gange pr. år.

Imidlertid kan også andre hensyn spille ind. Det kan f. eks. tænkes, at virksomheden primært er interesseret i at indrette sin lagerpolitik på en sådan måde, at lagerprocessens forløb (karakteriseret ved de i tabel 3 anførte gennemsnitsstørrelser) i størst mulig udstrækning bliver *uafhængig* af udefra kommende påvirkninger. Lad os eksempelvis antage, at virksomheden betragter middelefterspørgselen a pr. tidsenhed og den gennemsnitlige leveringstid $1/b$ pr. ordre som givne og konstante i tiden, men at den iøvrigt ikke kender formen af fordelingsloven $f(t)$ for leveringstiden pr. ordre og følgelig heller ikke middelafvisningen U pr. leveringsperiode (medmindre $R = 0$); virksomheden regner måske også med den (nærliggende) mulighed, at formen af $f(t)$ vil kunne ændres i tidens løb. Hvis virksomheden nu ønsker at indrette sin lagerpolitik således, at lagerprocessens forløb i størst mulig udstrækning bliver *uafhængig af formen af* $f(t)$, d. v. s. uafhængig af, om de til leverandøren afgivne ordrer indgår mere eller mindre »regelmæsigt« til virksomhedens lager, kan den ifølge bemærkningerne i de to foregående afsnit opnå dette formål ved *enten* at arbejde med et meget lille *eller* et meget stort ordrepunkt R; (for små værdier af R er middelafvisningen U og dermed lagerprocessens forløb praktisk taget uafhængig af formen $f(t)$, og for meget store værdier af R er U praktisk taget 0, uafhængigt af $f(t)$). Af oversigten i tabel 3 ses tillige, at middelafvisningens indflydelse på lagerprocessens forløb vil være relativt lille ved *store* værdier af Q (fordi $Q+U \approx Q$ for $Q \gg A \geqq U$). Lagerprocesens *følsomhed* over for formen af $f(t)$ vil derfor være forholdsvis lille, hvis virksomheden arbejder med en *stor* ordrestørrelse Q i forbindelse med et meget *lille* eller et meget *stort* ordrepunkt R, og processens følsomhed over for $f(t)$ vil omvendt være stor, hvis virkhvis virksomheden vælger en »*middelstor*« værdi af R (f. eks. $R \approx A$) i forbindelse med en forholdsvis *lille* ordrestørrelse (idet Q dog skal være $> R$), jfr. de numeriske eksempler i tabel 5, hvor B og H er

$A = 50$	$R = 10,\ Q = 80$		$R = 50,\ Q = 60$		$R = 150,\ Q = 200$	
Leveringstid pr. ordre	Konstant	Eksponentiel	Konstant	Eksponentiel	Konstant	Eksponentiel
S/A	0,667	0,661	0,955	0,764	1,000	0,987
B	0,417	0,413	0,796	0,636	0,250	0,247
L	27,68	28,10	31,82	37,49	200,50	200,42
H	1,20	1,18	1,50	1,02	0,25	0,24

Tabel 5.

beregnet med middelleveringstiden $1/b$ pr. ordre som tidsenhed. Det endelige valg af Q og R kan eventuelt træffes under hensyntagen til omkostningsmæssige overvejelser af den traditionelle type.

ERHVERVSØKONOMISK TIDSSKRIFT

Pris pr. hefte kr. 10,00, pr. årgang (4 hefter) kr. 24,00

Hovedredaktør:

Professor, dr. polit. Bjarke Fog, Handelshøjskolen, København V., ☏ (01) 35 13 60, privat Søborg 1440.

Aarhus-redaktion (nr. 3):

Professor Svend Fredens, Aarhus Universitet, Aarhus, ☏ (061) 3 43 11, privat (061) 7 79 16. Lektor, civiløkonom G. Graversen, Handelshøjskolen, Aarhus, ☏ (061) 2 50 88, privat (061) 3 17 33.

Københavns-redaktion (nr. 1, 2 og 4):

Lektor, kontorchef P. P. Sveistrup, Københavns Universitet, København K, ☏ privat (01) 87 09 14. Direktør, lic. merc. O. Loff, Sønderborg Handelshøjskole, Sønderborg, ☏ (044) 2 30 87.

Erhvervsøkonomiske cases:

Civiløkonom Fl. Klöcker-Larsen, ☏ (01) 35 14 22 kl. 12–13, privat (01) 70 56 37.

Økonomisk dokumentation:

Overbibliotekar, lektor, cand. polit. Per Boesen, Handelshøjskolens Bibliotek, ☏ (01) 35 13 36.

Redaktionssekretær:

Amanuensis, cand. oecon. Erik Johnsen, Handelshøjskolen, København V., ☏ (01) 35 13 60, privat (01) 81 21 41.

Annoncer, ekspedition og administration:

© Foreningen af Danske Civiløkonomer, kontorchef, civiløkonom Poul Rasmussen, Ved Stranden 14, København K., ☏ Minerva 9045.

Trykt hos Hansen & Andreasen, Godthåbsvej 22, København F., ☏ (01) 34 42 15.