Tidsspærring og kundespærring i et køsystem.

Af NIELS CHR. KNUDSEN*)

1. I det følgende betragtes et køsystem med M ($M \geqslant 1$) parallelforbundne ekspedienter og køpladser til $N-M$ ventende kunder ($N \geqslant M$). Systemet betegnes for kortheds skyld med $(M, N-M)$. Hver af de M ekspedienter kan kun ekspedere én kunde ad gangen, og hver til systemet ankommende kunde, som opnår at blive ekspederet, skal kun ekspederes én gang og forlader straks efter ekspeditionens afslutning systemet.

Kunder, som ved ankomsten til systemet finder mindst én ekspedient ledig, bliver straksekspederet af en af de ledige ekspedienter.

Kunder, som ved ankomsten finder alle M ekspedienter optaget, tager opstiling i køen, hvis der er plads i denne, og forbliver i køen, indtil ekspedition kan finde sted (tålmodige kunder). Så snart en af de M ekspedienter bliver ledig, rykker en af dt ventende kunder frem og bliver ekspederet. Der forudsættes intet om kødisciplin, d. v. s. den rækkefølge, hvori ventende kunder ekspederes.

Kunder, som ved ankomsten til systemet finder alle $N-M$ køpladser optaget, afvises.

Kundeankomsterne til systemet tænkes at følge en vilkårlig, stationær fordelingslov med gennemsnitlig a kundeankomster pr. TE. At ankomstfordelingen er stationær vil sige, at de til fordelingens karakteristik nødvendige parametre – herunder specielt det gennemsnitlige antal ankomster pr. TE – antages at være i tiden uforanderlige størrelser.

Ekspeditionstiden pr. kunde følger ligeledes en vilkårlig stationær fordelingslov med en gennemsnitlig ekspeditionstid på $1/b$ TE pr. kunde. Ekspeditionstiden pr. kunde forudsættes identisk fordelt for samtlige M ekspedienter.

*) cand. oecon., amanuensis ved Aarhus Universitet.

Tidsspærring og kundespærring i et køsystem.

Af NIELS CHR. KNUDSEN*)

1. I det følgende betragtes et køsystem med M ($M \geqslant 1$) parallelforbundne ekspedienter og køpladser til N–M ventende kunder ($N \geqslant M$). Systemet betegnes for kortheds skyld med (M, N–M). Hver af de M ekspedienter kan kun ekspedere én kunde ad gangen, og hver til systemet ankommende kunde, som opnår at blive ekspederet, skal kun ekspederes én gang og forlader straks efter ekspeditionens afslutning systemet.

Kunder, som ved ankomsten til systemet finder mindst én ekspedient ledig, bliver straksekspederet af en af de ledige ekspedienter.

Kunder, som ved ankomsten finder alle M ekspedienter optaget, tager opstiling i køen, hvis der er plads i denne, og forbliver i køen, indtil ekspedition kan finde sted (tålmodige kunder). Så snart en af de M ekspedienter bliver ledig, rykker en af dt ventende kunder frem og bliver ekspederet. Der forudsættes intet om ködisciplin, d. v. s. den rækkefølge, hvori ventende kunder ekspederes.

Kunder, som ved ankomsten til systemet finder alle N–M køpladser optaget, afvises.

Kundeankomsterne til systemet tænkes at følge en vilkårlig, stationær fordelingslov med gennemsnitlig a kundeankomster pr. TE. At ankomstfordelingen er stationær vil sige, at de til fordelingens karakteristik nødvendige parametre – herunder specielt det gennemsnitlige antal ankomster pr. TE – antages at være i tiden uforanderlige størrelser.

Ekspeditionstiden pr. kunde følger ligeledes en vilkårlig stationær fordelingslov med en gennemsnitlig ekspeditionstid på $1/b$ TE pr. kunde. Ekspeditionstiden pr. kunde forudsættes identisk fordelt for samtlige M ekspedienter.

*) cand. oecon., amanuensis ved Aarhus Universitet.

Det forudsættes endvidere, at ankomstprocessen og ekspeditionstiderne er stokastisk uafhængige. Der ses således f. eks. bort fra et tilfælde, som let kan tænkes at forekomme i praksis, nemlig at ekspedienterne arbejder hurtigere, d. v. s. nedsætter den gennemsnitlige ekspeditionstid pr. kunde, i perioder, hvor kundetilstrømningen er relativt intens.

Det foran anførte om systemets indretning og funktion kan illustreres som nedenfor i fig. 1:

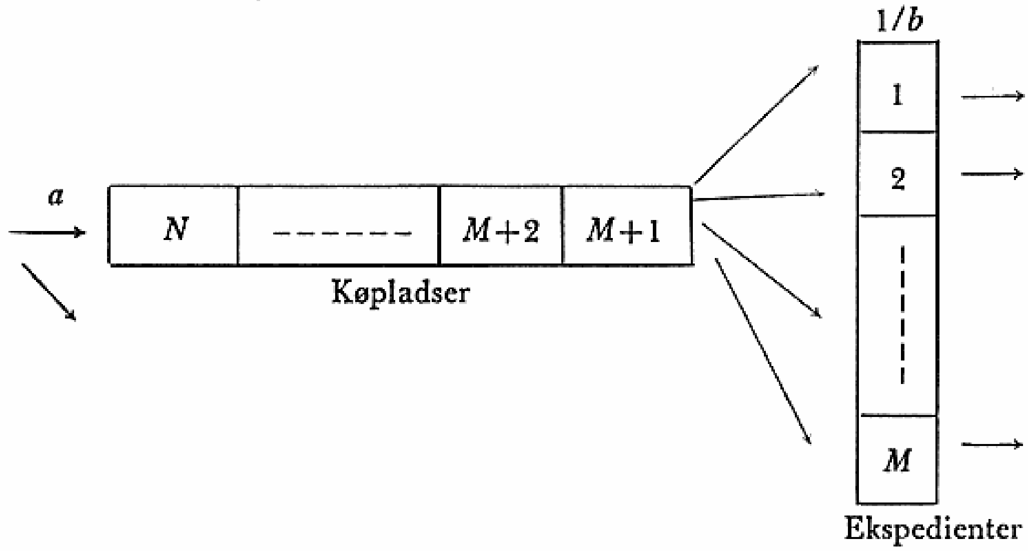

Fig. 1.

Det forudsættes, at systemet er af en sådan art, at det kan komme i statistisk ligevægt[1]) (ergodisk system). Systemets ligevægtssandsynligheder betegnes med P_n $(n = 0, 1, 2, \ldots, N)$ [2])

2. Ved *tidsspærringen* forstås den brøkdel af tiden, i hvilken systemet i det lange løb er spærret for tilgang af nye kunder, fordi alle ekspedienter og evt. køpladser er optaget. I en model af den her omhandlede art vil tidsspærringen være lig med ligevægtssandsynligheden, P_N.

Ved *kundespærringen* forstås derimod sandsynligheden for, at en til systemet ankommende kunde afvises. Kundespærringen kan for praktiske formål fortolkes som den brøkdel af kunderne, som i det lange løb afvises af systemet, fordi alle ekspeditionspladser og evt. køpladser

1) Om statistisk ligevægt, se f. eks. D. R. Cox and W. L. Smith, »Queues«, London 1961, s. 33 ff.

2) Et specialtilfælde af den ovenfor beskrevne model (med poissonfordelte kundeankomster og eksponentielt fordelte ekspeditionstider) er behandlet i Svend Fredens, »En kømodel«, Erhvervsøkonomisk Tidsskrift 1960, s. 161 ff.

i systemet er optaget i ankomsttidspunktet. Kundespærringen betegnes med P_a.

Hvis kundeankomsterne til systemet er tilfældigt fordelte i tiden (poissonfordelte), er kunde- og tidsspærring identiske, d. v. s. $P_a = P_N$. For andre ankomstfordelinger end netop poissonfordelingen gælder identiteten $P_a = P_N$ derimod *ikke*, og der knytter sig derfor en betydelig interesse til et generelt udtryk, som gør det muligt at bestemme P_a ved hjælp af systemets ligevægtssandsynligheder, P_N $(n = 0, 1, \ldots, N)$.

Et sådant udtryk kan udledes ud fra følgende betragtning:

Antallet af optagne ekspedienter i systemet er en stokastisk variabel, der kan antage de i nedenstående skema anførte værdier med de angivne sandsynligheder:

Antal optagne ekspedienter	0	1	2	......	$M-1$	M
Sandsynlighed	P_0	P_1	P_2	......	P_{M-1}	$\sum\limits_{n=M}^{N} P_n$

Størrelsen $E = \sum\limits_{n=0}^{M-1} n \cdot P_n + M \cdot \sum\limits_{n=M}^{N} P_n$ betegner det gennemsnitlige antal optagne ekspedienter. E kan åbenbart også fortolkes som det gennemsnitlige antal *TE* pr. *TE*, hvor der i systemet er kunder under ekspedition. Da hver ekspedition ifølge det forudsatte har en gennemsnitlig varighed på $1/b$ *TE*, vil der i det lange løb gennemsnitligt blive ekspederet $E : 1/b = E \cdot b$ kunder pr. *TE*. Da det endvidere er forudsat, at der til systemet ankommer gennemsnitlig a kunder pr. *TE*, vil det sige, at brøkdelen, Eb/a, af de til systemet ankommende kunder i det lange løb opnår at blive ekspederet. Resten, d. v. s. brøkdelen $(1-Eb/a)$, af de til systemet ankommende kunder må følgelig blive afvist, idet der, som nævnt, er tale om tålmodige kunder. Brøken $(1-\frac{Eb}{a})$ repræsenterer åbenbart systemets kundespærring, og man har derfor:

$$P_a = 1 - \frac{E}{A}, \tag{1}$$

hvor $A = \frac{a}{b}$ er trafiktilbudet, d. v. s. det gennemsnitlige antal kundeankomster pr. middelekspeditionsperiode.

3. I nogle eksempler vises nedenfor beregningen af P_a ved hjælp af udtrykket (1).

(a) *Poissonfordelte kundeankomster og eksponentielt fordelte ekspeditionstider.*

1) For system $(M, N-M)$ gælder, at $E = A\,(1-P_N)$ [3]) hvilket indsat *i (1) giver:*

$$P_a = 1 - \frac{A\,(1-P_N)}{A} = P_N\,,$$

der viser, at systemets kundespærring er lig med tidsspærringen i overensstemmelse med, at kundetilstrømningen til systemet er poissonfordelt.

2) I et rent ventesystem, d. v. s. system (M,∞), har man $E = A$.[3]) Indsættes dette i (1), får man:

$$P_a = 1 - \frac{A}{A} = 0\,,$$

hvilket stemmer overens med, at der ikke forekommer afvisning i et sådant system.

(b) *Erlangfordelte kundeankomster.*

Erlangfordelte kundeankomster af r'te orden (med parameteren a) er ensbetydende med, at ankomstintervallerne er gammafordelte af r'te orden med tæthedsfunktionen

$$f(t) = \frac{(ra)^r}{(r-1)!}\,t^{r-1}\cdot e^{-rat} \qquad (t \geqslant 0) \tag{2}$$

hvor r er et positivt, helt tal og a en positiv konstant. Det gennemsnitlige ankomstinterval er $\frac{1}{a}$ TE (= gennemsnitlige ankomstinterval i poissonprocessen med a kundeankomster pr. TE) og variansen på ankomstintervallet er $\frac{1}{ra^2}$ ($\leqslant \frac{1}{a^2}$ variansen på ankomstintervallet ved poisson ankomster). Erlangfordelingen har som specialtilfælde poissonfordelingen ($r = 1$) og de fuldstændig regelmæsige kundeankomster ($r \to \infty$). For $r > 1$ er kundeankomsterne til systemet mere regelmæssige end i den stationære poisonproces med parameteren a.

I dette ekstmpel vises, hvorledes man ved hjælp af (1) kan beregne P_a i systemet $(1, 0)$ – d. v. s. et rent afvisningssystem med én ekspedient – med erlangfordelte kundeankomster og eksponentielt fordelte ekspe-

[3]) Svend Fredens, anf. arb. s. 167, tabel 1.

ditionstider.[4]) Dernæst sammenlignes anvendelsen af formel (1) med alternative metoder til bestemmelse af P_a.

Det betragtede system (1, 0) kan befinde sig i tilstandene 0 og 1, og de hertil svarende ligevægtssandsynligheder er:

$$P_0 = 1 - \frac{a}{b}\left[1 - \left(1 + \frac{b}{ra}\right)^{-r}\right] \tag{3}$$

$$P_1 = \frac{a}{b}\left[1 - \left(1 + \frac{b}{ra}\right)^{-r}\right]$$

Da $E = P_1$, får man umiddelbart ved anvendelsen af (1):

$$P_a = \left(1 + \frac{b}{ra}\right)^{-r} \leqslant P_1 \tag{4}$$

hvor lighedstegnet kun gælder for $r = 1$, d. v. s. for poissonfordelte kundeankomster.

Man får altså, takket være de mere regelmæssige kundeankomster (i relation til poissonprocessen), der karakteriserer erlangprocessen, en bedre udnyttelse af ekspedienten (idet $E = P_1$ er en *voksende* funktion af r), samtidig med at de ankommende kunders afvisningsrisiko mindskes (idet P_a er en *aftagende* funktion af r).

En alternativ måde, der kan anvendes til beregning af P_a, er følgende: Man betragter et ankomsttidspunkt, T, hvor systemet vil befinde sig i tilstand 1. Sandsynligheden, P_a, for at den næste kunde, der ankommer til systemet i tidspunkt $T+t$ ($t \geqslant 0$), afvises, er da:

$$P_a = \int_0^\infty e^{-bt} \cdot f(t)\, dt\,, \tag{5}$$

idet e^{-bt} er sandsynligheden for, at den i T igangværende (evt. netop påbegyndte) ekspedition endnu ikke er afsluttet i $T+t$, og $f(t)\,dt$ er sandsynligheden for, at den »næste« kundeankomst indtræffer i tidspunktet $T+t$, idet $f(t)$ er den i (2) anførte tæthedsfunktion for gammafordelingen af r'te orden.

Udtrykket (5) gælder kun for eksponentielt fordelte ekspeditionstider, idet ræsonnementet forudsætter, at ophørssandsynligheden for en igangværende ekspedition er uafhængig af ekspeditionens hidtidige varighed. Desuden lader ræsonnementet bag (5) sig ikke anvende, når der er tale om et system med flere (parallelforbundne) ekspedienter eller et system med køpladser. I så henseende er (1) generelt anvendelig.

[4]) Modellen findes bl. a. diskuteret i P. M. Morse »Queues, Inventories and Maintenance«, N. Y. 1958, s. 47 ff.

Morse bestemmer P_a ud fra et tredie synspunkt[5]):

Idet vi med F_s betegner intensiteten i de mulige tilstandsændringer, som er ensbetydende med, at en til systemet ankommende kunde finder en ledig ekspedient, evt. en ledig køplads, og tilsvarende med F_a betegner intensiteten i de mulige tilstandsovergange, der repræsenterer situationer, hvor en til systemet ankommende kunde finder såvel ekspedienter som køpladser optaget (d. v. s. afvises), må det gælde, at

$$\frac{P_a}{P_s} = \frac{F_a}{F_s},$$

hvor P_s = sandsynligheden for, at en kunde opnår ekspedition. Da endvidere $P_a + P_s = 1$, har man:

$$P_a = \frac{F_a}{F_s + F_a} \tag{6}$$

Udtrykket i (6) lader sig ligesom (1) anvende også i det tilfælde, at system $(1, 0)$ udvides med et antal (parallelforbundne) ekspedienter og/eller køpladser, ligesom det beregningsmæsige arbejde ved de to fremgangsmåder stort set er ens. (6) forudsætter imidlertid, at der er tale om erlangfordelte kundeankomster, idet der kun da vil være tale om en *ændring* i tilstanden i det »udvidede« system – der foruden det faktiske system omfatter en imaginær »modtagemekanisme« (erlangkanal) – *hver gang* en kunde afvises.

For andre ankomstprocessers vedkommende kan man vel tænke sig, at der ikke vil være tale om sådanne tilstandsovergange, selv om en kunde afvises. Dette vil således være tilfældet, når kundeankomsterne til systemet er hyper-poissonfordelte.

I dette tilfælde vil (1) også kunne anvendes. For et hvilket som helst køsystem $(M, N-M)$ med parallelforbundne ekspedienter, hvor der gælder stationære og indbyrdes uafhængige fordelingslove for hhv. kundeankomster pr. TE og ekspeditionstid pr. kunde, kan afvisningssandsynligheden, P_a, beregnes ved hjælp af udtrykket i (1).

(c) *Hyper-poissonfordelte kundeankomster.*

At kundeankomsterne er en hyper-poissonproces af 2. orden (med parametrene a og p) er ensbetydende med hyper-eksponentielt fordelte ankomstintervaller af 2. orden med tæthedsfunktionen

$$f(t) = 2ap^2 \cdot e^{-2apt} + 2aq^2 \cdot e^{-2aqt} \qquad (t \geqslant 0) \tag{7}$$

hvor p og q er positive konstanter ($p + q = 1$), og hvor a ligeledes er en positiv konstant. Det gennemsnitlige ankomstinterval er $1/a$ TE (= gns. ankomstinterval i poissonprocessen med parameteren a) og

[5]) Anf. arb. s. 49 ff.

variansen på ankomstintervallet er $\frac{1-2pq}{2pqa^2}$ $(\geqslant \frac{1}{a^2}$ = variansen på ankomstintervallet ved poissonfordelte ankomster). Hyper-poissonfordelingen har som specialtilfælde poissonfordelingen (for $p = q = \frac{1}{2}$).

Da udtrykket for $f(t)$ i (7) er symmetrisk i p og q, kan man nøjes med at betragte de tilfælde for hvilke $0 < p \leqslant 1/2$. Når $0 < p < 1/2$, vil kundeankomsterne være mere uregelmæssige end i poissonprocessen med parameteren a. Kundeankomsterne har en tendens til at indtræffe i »bundter«, jo mere udpræget desto mindre p er.

I et rent afvisningssystem med én ekspedient – system (1, 0) – med hyper-poissonfordelte kundeankomster og eksponentielt fordelte ekspeditionstider[6]) gælder følgende ligevægtssandsynligheder:

$$P_0 = \frac{1+A}{(1+2Ap)\ (1+2Aq)} \tag{8}$$

$$P_1 = \frac{A\,(1+4Apq)}{(1+2Ap)\ (1+2Aq)}$$

Da $E = P_1$, får man ved anvendelse af (1) umiddelbart:

$$P_a = 1 - \frac{1+4Apq}{(1+2Ap)\ (1+2Aq)} = \tag{9}$$

$$= \frac{A\,(1+4Apq)}{(1+2Ap)\ (1+2Aq)} + \frac{A\,(1-4pq)}{(1+2Ap)\ (1+2Aq)} \geqslant P_1,$$

hvor lighedstegnet kun gælder for $p = q = 1/2$, d. v. s. for poissonfordelte kundeankomster.

På grund af den kraftigere »bundtning« af kundeankomsterne (i relation til poissonprocessen), der karakteriserer hyper-poissonprocessen, får man en ringere udnyttelse af systemets ekspedient (idet P_1 aftager med aftagende p i intervallet $0 < p < 1/2$), medens kundernes afvisningsrisiko øges (idet P_a vokser med aftagende p i intervallet $0 < p < 1/2$).

4. De to sidste eksempler viser tillige, hvorledes man ved hjælp af gamma- og hyper-eksponentialfordelingen kan generere ankomstprocesser, i hvilke variationskoefficienten i ankomstintervallets fordeling (standardafvigelse : middelværdi) går fra 0 (ved de fuldstændig regelmæssige kundeankomster, d. v. s. for $r \to \infty$) over 1 (poissonprocessen)

[6]) Denne model findes behandlet hos bl. a. Morse, anf. arb. s. 55 ff.

til $\rightarrow\infty$ (for $p\rightarrow 0$ i hyper-poissonprocessen), idet variationskoefficienten, V, i de tre fordelinger for ankomstintervallet er givet ved

$V_G = \sqrt{\frac{1}{r}}$ (for gammafordelingen af r'te orden)

$V_E = 1$ (for eksponentialfordelingen)

$V_H = \sqrt{\frac{1-2pq}{2pq}}$ (for hyper-eksponentialfordelingen af 2. orden)

Tidsspærringen og kundespærringen i det rene afvisningssystem (1, 0) kan, alt andet lige, opfattes som en funktion af V, hvor $P_1 = P_1(V)$ er en stadigt aftagende funktion af V, medens $P_a = Pa(V)$ er en stadigt voksende funktion af V.

Disse sammenhænge er for trafiktilbudet, $A = 1$, illustreret i nedenstående tabel:

	$V = 0$ $(r\rightarrow\infty)$	$V = 1$	$V\rightarrow\infty$ $(p\rightarrow 0)$
$P_1(V)$	0,632	0,500	$\rightarrow$ 0,333
$P_a(V)$	0,368	0,500	$\rightarrow$ 0,667