

Kapasitetsforutsetningen i lineær kostnadsanalyse.

Av ODD LANGHOLM*)

1. I nær sagt alle bedriftsøkonomiske anvendelser av lineær programmering må linearitetsforutsetningens analysetekniske fordeler oppveie tildels grove forenklinger i avbildningen av det problem som skal løses. Etterhvert som metodene for lokalisering av optimum i selve lineærmodellen er blitt mer finpusset, er det derfor naturlig å gi noe mer av oppmerksomheten til en annen oppgave: å finne regler for en fornuftig tilpasning av modellen til de faktiske forhold på de ulike områder der den er i bruk, for å redusere skjevheter og feil i konklusjonene som følge av de forenklinger som må gjøres.

Et av de anvendelsesområdene der dette etterhvert er blitt en nokså aktuell oppgave, er analysen av bedriftens kostnader. Til grunn for de fleste nyere metoder for kostnadsanalyse ligger en forutsetning om kostnadsfunksjon som kan presiseres i to punkter slik: Langs en vilkårlig stråle i produktrummet antas at i) totalkostnadene varierer lineært inntil ii) det nås en rigid kapasitetsgrense utover hvilken det er umulig å øke produksjonen. Kaller vi produktmengden målt langs den betraktede stråle for x og totalkostnadene for K , kan den antatte funksjons-sammenheng mellom dem framstilles grafisk ved en rett linje $K = F + vx$ mellom punktene $v = 0$ og $v = C$, der F er faste kostnader, v er variable enhetskonstanter og C kapasitetsgrensen. (Kfr. figur 1). I det enkleste tilfelle faller strålen sammen med en av aksene i produktrummet. Da er x mengden av et enkelt produkt. Ellers kan x oppfattes som en mengdeindeks.

Sentrale kostnadsproblemer er blitt bragt til enkle og lett anvendelige løsninger i denne modellen, men deres praktiske verdi er helt avhengig

*) Docent, dr. oecon., Norges Handelshøyskole.

Kapasitetsforutsetningen i lineær kostnadsanalyse.

Av ODD LANGHOLM*)

1. I nær sagt alle bedriftsøkonomiske anvendelser av lineær programmering må linearitetsforutsetningens analysetekniske fordeler oppveie tildels grove forenklinger i avbildningen av det problem som skal løses. Etterhvert som metodene for lokalisering av optimum i selve lineærmodellen er blitt mer finpusset, er det derfor naturlig å gi noe mer av oppmerksomheten til en annen oppgave: å finne regler for en fornuftig tilpasning av modellen til de faktiske forhold på de ulike områder der den er i bruk, for å redusere skjevheter og feil i konklusjonene som følge av de forenklinger som må gjøres.

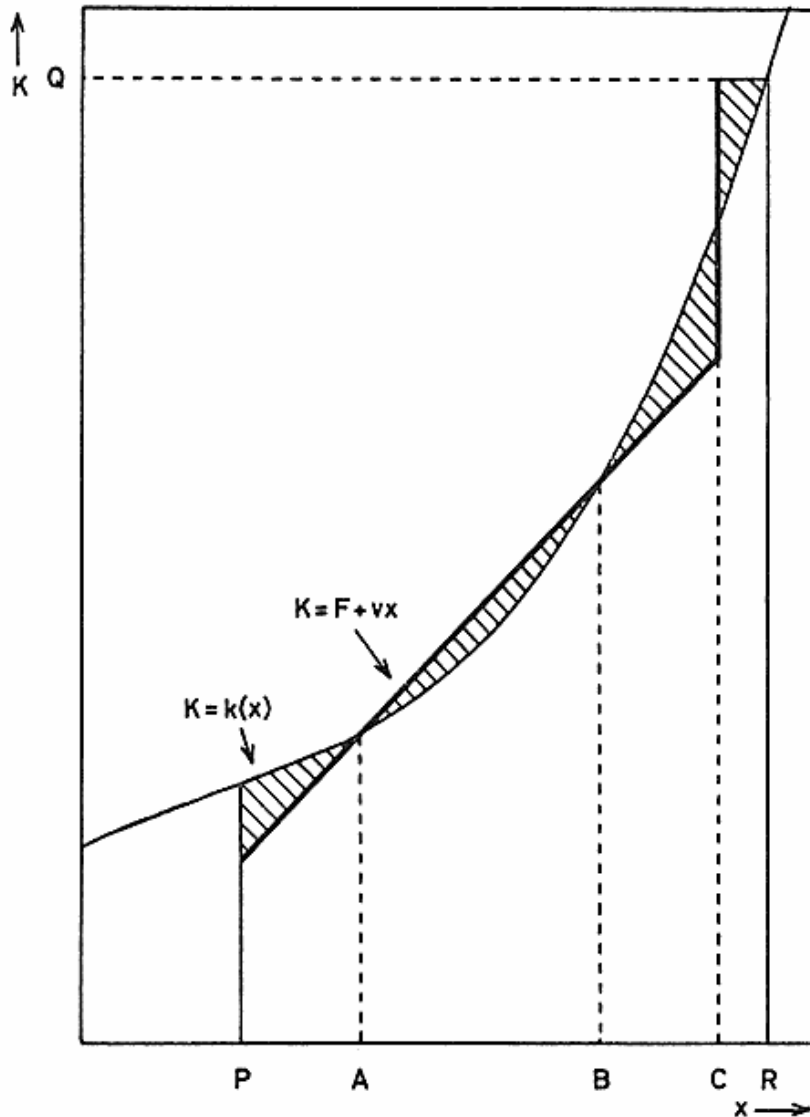
Et av de anvendelsesområdene der dette etterhvert er blitt en nokså aktuell oppgave, er analysen av bedriftens kostnader. Til grunn for de fleste nyere metoder for kostnadsanalyse ligger en forutsetning om kostnadsfunksjon som kan presiseres i to punkter slik: Langs en vilkårlig stråle i produktrummet antas at i) totalkostnadene varierer lineært inntil ii) det nås en rigid kapasitetsgrense utover hvilken det er umulig å øke produksjonen. Kaller vi produktmengden målt langs den betraktede stråle for x og totalkostnadene for K , kan den antatte funksjons-sammenheng mellom dem framstilles grafisk ved en rett linje $K = F + vx$ mellom punktene $v = 0$ og $v = C$, der F er faste kostnader, v er variable enhetskonstanter og C kapasitetsgrensen. (Kfr. figur 1). I det enkleste tilfelle faller strålen sammen med en av aksene i produktrummet. Da er x mengden av et enkelt produkt. Ellers kan x oppfattes som en mengdeindeks.

Sentrale kostnadsproblemer er blitt bragt til enkle og lett anvendelige løsninger i denne modellen, men deres praktiske verdi er helt avhengig

*) Docent, dr. oecon., Norges Handelshøyskole.

av hvor godt man får den bredt opptrukne, brukne linje i figur 1 til å passe inn i det mer kompliserte, og irregulære, kostnadsbilde man må vente i praksis. I enhver anvendelsessituasjon blir det et spørsmål om å velge fornuftige verdier på de tre parametrene F , v og C , og for denne tilpasningen skulle praksis ha stor nytte av noen enkle regler.

Som kjent har tradisjonell kostnadsteori gjerne forestilt seg funksjons-sammenhengen noe anderledes; mer i overensstemmelse med den kurven som er merket $k(x)$ i figur 1. Nå vil naturligvis enhver matematisk funksjon bare kunne være en idealisert gjengivelse av kostnadsforhol-



FIGUR 1. Kostnadslinje og kapasitetslinje (bredt opptrukne) tilpasset kontinuerlig kostnadsfunksjon. Avvik i analyseområdet angitt ved skraverte arealer.

dene slik de finnes i praksis. For begge de funksjonene som er framstilt i figuren, gjelder det således først og fremst at de utelater alle de sprang i kostnadene (bortsett fra sprangene ved $x = 0$ og for den enes vedkommende ved $x = C$) som i praksis kompliserer bildet så mye. Men blandt kontinuerlige funksjoner har den tradisjonelle kostnadsfunksjon et element av realisme som den lineære har måttet ofre til fordel for sin analysetekniske overlegenhet, nemlig det at den kan få med den karakteristiske stigning i enhetskostnadene i området henimot full kapasitetsutnyttelse, som skyldes overutnyttelse av produksjonsutstyret, overtidsarbeid og lignende forhold.

Denne overensstemmelse med virkeligheten er så meget mer verdifull som den forekommer i et kritisk område der produksjonstilpasning ifølge kostnadsteorien ofte bør finne sted. Det er derfor en betydelig ulempe lineærmodellen har i dette at marginalkostnadene er konstante helt inn til kapasitetsgrensen og deretter brått springer til uendelig. Men det er en ulempe som må kunne dempes ved et fornuftig valg af verdier på parametrene i den lineære kostnadsfunksjonen og særlig på kapasitetsgrensen C , og det må være mulig å komme løsningen på dette praktiske problem nærmere ved å diskutere ett som lettere lar seg stille matematisk, nemlig den optimale tilpasning av den lineære funksjon og kapasitetsgrensen til en kontinuerlig, deriverbar funksjon slik som figurens $k(x)$, som stiger progressivt i det kritiske område. Det er formålet med den foreliggende artikkel å stille opp noen momenter til en slik diskusjon. Primært vil vi holde oppmerksomheten rettet mot valget av kapasitetsgrense, som er et spesielt blankt område i tidligere litteratur. I alminnelighet vil vi derfor komme til å betrakte parametrene i kostnadslinjen som gitt implisitt ved betingelsene for optimum som funksjoner av C .

2. Lineærmodellens overensstemmelse med faktiske kostnadsforhold er bare av betydning innenfor det aktuelle produksjonsintervall, som i praksis ofte kan være ganske begrenset. Vi skal også her tilsvarende begrense analysen til intervallet mellom produksjonsmengdene $x = P$ og $x = R$, der $P < R$. Om P vil vi anta at det ligger så langt til høyre på x -aksen at en eventuell degresjon i marginalkostnaderne har opphørt. Vi antar altså

$$(2.1.) \quad k'(x) \geq 0$$

$$(2.2.) \quad k''(x) \geq 0$$

Bare under helt særegne prisforhold vil den optimale skalatilpasning av produksjonen finne sted ved avtagende marginalkostnader, så denne forutsetning reduserer ikke analysens generalitet særlig mye. Punktet R vil vi anta ligger så langt til høyre at enhver fornuftig valgt kapasitetsgrense vil ligge innefor vårt intervall. Forøvrigt må P og R oppfattes som vilkårlig valgte rammeforutsetninger. I neste avsnitt skal konklusjonenes avhengighet av dem drøftes noe mer inngående.

Når R er valgt, begrenses også analyseområdet oppad til punktet $Q = k(R)$. Vårt matematiske problem er da å bestemme F , v og C slik at den rette linje $F + vx$ i intervallet fra $x = P$ til $x = C$, sammen med den rette linje $x = C$ i intervallet (vertikalt) fra $K = F + vC$ til $K = Q$, gir best tilnærming til den kontinuerlige funksjon $k(x)$ i intervallet fra $x = P$ til $x = R$.

En definisjon av »best mulig tilnærming« må til for å determinere problemet, og den gir seg naturligvis ikke entydig uten videre. Alt etter formålet for den kostnadsanalyse lineærmodellen skal anvendes til, kan ulike uttrykk for avvik mellom $k(x)$ og den brukne linje framstille seg som det mest naturlige å søke minimum for. Her må vi finne et generelt kriterium. Det enkleste og mest plausible er vel da å minimere summen av arealene mellom kurvene, hvert areal positivt definert, dvs. de skraverte arealer i figur 1. Den følgende diskusjon bygger i sin helhet på dette kriteriet.

Under forutsetningene (2.1.) og 2.2.) kan $F + vx$ skjære $k(x)$ høyst to ganger i det området av figur 1 som vi betrakter. Vi kaller skjæringspunktene A og B . Ved eventuell tangering mellom $F + vx$ og $k(x)$ faller A og B sammen. I andre grensetilfeller kan A falle i P og/eller B falle i C eller i R . Men i alle disse tilfellene kan summen av de positivt definerte arealer skrives på formen

$$(2.3.) \quad U = \int_P^A [k(x) - F - vx] dx + \int_A^B [k(x) - F - vx] dx + \\ \int_B^C [k(x) - F - vx] dx + \int_C^R [Q - k(x)] dx$$

$$\text{der} \quad F + vA = k(A), \quad F + vB = k(B)$$

Etter vårt kriterium vil altså lineærmodellen gi den beste tilnærming til $k(x)$ når F , v og C velges slik at U blir minst mulig.

Minimumsbetingelsene uttrykkes enklest i A , B og C , idet parametrene i kostnadslinjen oppfattes som funksjoner av A og B , nemlig

$$F = \frac{Ak(B) - Bk(A)}{A - B}, \quad v = \frac{k(A) - k(B)}{A - B}$$

Differensiering viser at U har en ekstremverdi når

$$(2.4.) \quad 4k(C) + k(A) = 3k(B) + 2Q$$

$$(2.5.) \quad 4A = C + 3P$$

$$(2.6.) \quad 4B = 3C + P$$

Idet det følger av (2.2.) og definisjonene av A og B at $k'(A) \leq v \leq k'(B) \leq k'(C)$, viser Hessian-determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta^2 U}{\delta A^2} & \frac{\delta^2 U}{\delta B \delta A} & \frac{\delta^2 U}{\delta C \delta A} \\ \frac{\delta^2 U}{\delta A \delta B} & \frac{\delta^2 U}{\delta B^2} & \frac{\delta^2 U}{\delta C \delta B} \\ \frac{\delta^2 U}{\delta A \delta C} & \frac{\delta^2 U}{\delta B \delta C} & \frac{\delta^2 U}{\delta C^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 [k'(A) - v] & 0 & \frac{1}{2} [k'(A) - v] \\ 0 & 2 [k'(B) - v] & \frac{3}{2} [k'(B) - v] \\ \frac{1}{2} [k'(A) - v] & \frac{3}{2} [k'(B) - v] & 2k'(C) - v \end{vmatrix}$$

og dens underdeterminanter at annenordensbetingelsene for et minimum er oppfylt.

Det tilfellet vi har betraktet i figur 1, er et eksempel på optimal tilpassning av A , B og C ifølge vårt kriterium. $k(x)$ er der en tredjegradsfunksjon.

3. Selve valget av kriterium i forrige avsnitt vil naturligvis belaste optimumsbetingelsene med en viss vilkårlighet som er uungåelig. Det er derfor av interesse å notere at den ytterligere vilkårlighet som kan tilskrives de nødvendige rammebetingelser i modellen, ikke er særlig stor. I ligningssystemet (2.4.) – (2.6.) kan etter tur A , B og C (eller ved substitusjon, F og v) oppfattes som funksjon av Q og P og deres følsomhet overfor disse parametrene uttrykkes ved de partielle deriverte. Når det gjelder C , finner vi således:

$$\frac{\delta C}{\delta P} = \frac{3}{N} [k'(B) - k'(A)]$$

$$\frac{\delta C}{\delta Q} = \frac{8}{N}$$

$$\text{der} \quad N = 16k'(C) + k'(A) - k'(B)$$

For begge disse uttrykk er det lett å utlede øvre grenser. Da $k''(C) \geq k''(B) \geq k''(A)$ ifølge (2.1.) og $C - B = \frac{1}{2}(B - A)$ ifølge (2.5.) og (2.6.), må vi ha

$$k'(C) - k'(B) \geq \frac{1}{2} [k'(B) - k'(A)]$$

Herav følger

$$N \geq 8[k'(B) - k'(A)] + 7k'(B) + k'(A) \geq 15[k'(B) - k'(A)]$$

dvs.

$$(3.1.) \quad \frac{\delta C}{\delta P} \leq \frac{1}{5}$$

Videre følger

$$N = 8k'(C) + 8[k'(C) - k'(B)] - [k'(B) - k'(A)] \geq 8k'(C)$$

dvs.

$$(3.2.) \quad \frac{\delta C}{\delta Q} \leq \frac{1}{k'(C)}$$

Både $\frac{\delta C}{\delta P}$ og $\frac{\delta C}{\delta Q}$ er ikke-negative. Når det venstre ytterpunkt P for analyseområdet forskyves mot høyre eller mot venstre, påvirkes den optimale C i samme retning, men forskyvningen er ifølge (3.1.) mindre enn 20 prosent av P 's, i de fleste tilfeller sannsynligvis betydelig mindre.

Følsomheten overfor forskyvninger i det høyre ytterpunkt R er større. Vi har $\frac{\delta C}{\delta R} = k'(R) \frac{\delta C}{\delta Q} \leq \frac{k'(R)}{k'(C)}$. For denne partielle deriverte kan vi altså etter den framgangsmåte vi har benyttet, ikke finne noen øvre grense lavere enn 1. På den annen side skulle det vel som regel ikke kunne bli tale om særlig store relevante variasjonsmuligheter i R om man først antar at den vil ligge så langt til høyre at $k(x)$ er begynt å stige kraftig. Da er det i Q at avgrensningen av analyseområdet i høyre del av figur 1 vil gi seg sitt vesentlige utslag. (3.2.) viser imidlertid at følsomheten overfor denne parameteren ikke vil være større enn den inverse verdi av $k'(C)$. Særlig når analyseområdet velges litt rumslig, vil denne inverse verdi være et ganske lite tall.

Ytterligere redusert blir dessuten følsomheten overfor modellens rammeforutsetning når variasjonene skjer som utvidelse eller innsnevring av analyseområdet i begge ytterpunkter samtidig, dvs. ved at R økes mens P minskes, eller omvendt.

4. Optimumsbetingelsene (2.4.) – (2.6.) beskriver implisitt en samvariasjon mellom formen på kostnadskurven $k(x)$ og den optimalt tilpassede kapasitetsgrense C . Hovedtendensen i denne samvariasjon uttrykkes lett analytisk.

La z være en parameter i $k(x)$ slik at variasjon i z endrer funksjonsformen i intervallet mellom P og R , mens funksjonen har konstante verdier i disse ytterpunktene. For den partielle deriverte av kostnadsfunksjonen m. h. p. x vil vi opprettholde betegnelsen $k'(x)$, men skrive den partielle deriverte m. h. p. z for vilkårlig x : $\frac{\delta k(x)}{\delta z}$. Da forutsettes

altså $\frac{\delta k(P)}{\delta z} = \frac{\delta k(R)}{\delta z} = 0$ (dvs. $k(P)$ og $k(R) = Q$ konstante), men om

mellomliggende x -verdier enten $\frac{\delta k(x)}{\delta z} > 0$ for enhver $P > x > R$ eller

$\frac{\delta k(x)}{\delta z} < 0$ for enhver $P > x > R$. En økning i z vil altså enten heve

$k(x)$ over sitt tidligere nivå eller senke $k(x)$ under sitt tidligere nivå i hele analyse området mellom P og R .

I (2.4.) – (2.6.) skal vi nå betrakte A og B som funksjoner av C og C som funksjon av z , idet de tre parametrene antas tilpasset optimalt til enhver z . Differensiering av (2.4.) m. h. p. z gir da

$$4 \frac{\delta k(C)}{\delta z} + 4k'(C) \frac{dC}{dz} + \frac{\delta k(A)}{\delta z} + k'(A) \frac{\delta A}{\delta C} \frac{dC}{dz} = 3 \frac{\delta k(B)}{\delta z} + 3k'(B) \frac{\delta B}{\delta C} \frac{dC}{dz}$$

som ved innsetting av uttrykk for $\frac{\delta A}{\delta C}$ og $\frac{\delta B}{\delta C}$ ifølge (2.5.) og (2.6.) og

ordning, gir

$$\frac{dC}{dz} = \frac{4 \left[4 \frac{\delta k(C)}{\delta z} + \frac{\delta k(A)}{\delta z} - 3 \frac{\delta k(B)}{\delta z} \right]}{16k'(C) + k'(A) - 9k'(B)}$$

På grunn av (2.2.) vil nevneren til høyre alltid være positiv. Dvs. at

$$\frac{dC}{dz} \cong 0$$

alt ettersom

$$4 \frac{\delta k(C)}{\delta z} + \frac{\delta k(A)}{\delta z} \cong 3 \frac{\delta k(B)}{\delta z}$$

Det vi har funnet, er altså at C vil gå mot høyre dersom en økning i z enten utvirker en relativt større heving av $k(x)$ ved B enn ved A og C eller senker kurven mye ved A og C sammenlignet med B . Når motsatte relasjoner mellom kurvens nivåendringer ved disse tre punktene er tilstede, går C mot venstre. Enklest forklart, visuelt, betyr dette at kapasitetsgrensen (optimalt tilpasset) tenderer mot høyre når kostnadskurven flates ut, mot venstre når dens krumningsgrad i analyseområdet tiltar.

Skal denne teorien presiseres, krever den imidlertid et eksakt mål for graden av krumning. Et slikt mål, som både er plausibelt og har en umiddelbar grafisk mening, er arealsummen U definert ved (2.3.) ved optimalt tilpasset lineær kostnadsfunksjon og kapasitetsgrense. At U da fortsatt er stor, må bety at en lineærmodell ikke lett lar seg føye til $k(x)$ i analyseområdet fordi funksjonens krumning er stor. Liten U svarer på samme måte til en kostnadsfunksjon med liten krumning.

Bruken av U gjør det også lett å se den praktiske motsvarighet til det som i figur 1 kommer til uttrykk som en mer eller mindre krum kostnadskurve. Summen av arealene mellom $k(x)$ og den brukne, rette linje er større jo mer gradvis overgangen er mellom lave, tilnærmet konstante til prohibitivt høye marginalkostnader i området henimot maksimal beskjeftigelse. I praksis er det muligheten for å tøye kapasitetsgrensen på bekostning av et aksellererende kostnadsnivå på grunn av overtidsarbeid og overutnyttelse av kapitalutstyret som bestemmer denne overgangen. Er det ingen mulighet for dette, vil vi nettopp få det skarpe omslag i marginalkostnadene som gjør at lineærmodellen kan tilpasses $k(x)$ med ubetydelige avvik.

Uttrykket for U kan forenkles i forhold til (2.3.), men det vil stadig være nokså uhåndterlig for en generell analyse. Det gjelder forøvrig også et par andre krumningsmål som kunne komme på tale. Men sammenhengen mellom U og optimal C ved endring i kurveforløp som beskrevet ovenfor har det også interesse å studere innenfor mer spesielle klasser av kostnadsfunksjoner. I en slik klasse vil kostnadsfunksjonen være spesifisert på visse parametre nær. Sammenhengen mellom optimal kapasitetsgrense og krumningsgrad uttrykt ved U kan da studeres ved variasjon i en eller flere slike parametre.

5. Som eksempel skal her bare betraktes den ytterst enkle klasse av funksjoner $k(x) = x^z$ for varierende z i analyseområdet fra $x = P = 0$ til $x = R = 1$. I ytterpunktene har vi $k(0) = 0$ og $k(1) = Q = 1$ for enhver z . For at betingelsen (2.2.) skal være oppfylt i hele området, må vi ha $z \geq 1$. Når z økes fra 1, synker kurvens nivå i hele området.

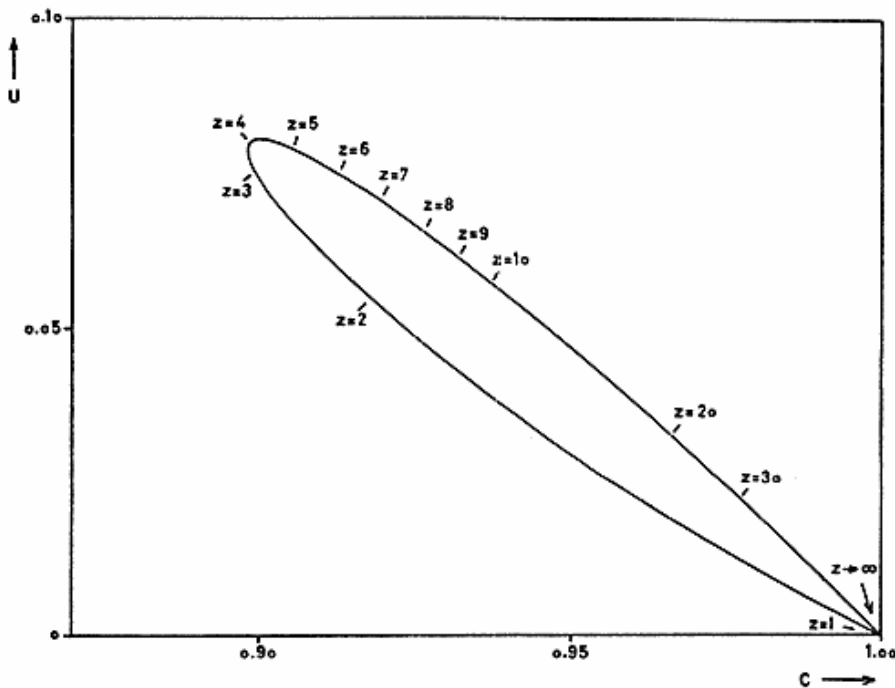
Optimal kapasitetsgrense C og kurvekrumning U beregnes av ligningene

$$(5.1.) \quad \frac{4^{z+1} + 1 - 3^{z+1}}{2 \cdot 4^z} C^z = 1, \quad U = (1-C) \frac{z}{z+1}$$

I klassen av kostnadsfunksjoner av formen $k(x) = x^z$ finnes noen som har betydelig krumning. Størst er U for en z -verdi på litt over 4. Men når z antar sin minste tillatte verdi og når z er meget stor, forsvinner krumningen helt:

$$U = \lim_{z \rightarrow \infty} U = 0$$

At U etter et visst punkt avtar mot 0 med stigende z , skyldes nettopp at overgangen fra lave til meget høye marginalkostnader går stadig mer brått, noe som slår ut i vårt krumningsmål fordi en rett kostnadslinje



FIGUR 2. Sammenhengen mellom optimal kapasitetsgrense C og krumning U for eksponensial kostnadsfunksjon x^z ved varierende eksponent.

og en vertikal kapasitetslinje da kan føyes til henholdsvis venstre og høyre del av kostnadskurven med stadig mindre avvik.

Samtidig går den tilsvarende optimale C mot høyre. I figur 2 er gitt en grafisk parameterframstilling av sammenhengen mellom U og optimal C ved variasjon i z . Den karakteristiske smale bladform som kurven tegner i figuren, bekrefter klart teorien i forrige avsnitt for den funksjonsklassen vi har valgt som eksempel. Den framkommer ved at C varierer motsatt av U ettersom krumningen først tiltar og deretter avtar mot 0 ved økning af C .

Som en klasse av kostnadsfunksjoner har $k(x) = x^2$ ingen interesse utover dette illustrasjonsformålet. For mer realistiske funksjonsklasser må nok settet (5.1.) erstattes med mer kompliserte uttrykk for samvariasjon mellom U og C . Men det vil alltid være overkommelig å konstruere beregningsprogram, slik at samvariasjonen kan kartlegges ved tilsvarende parameterframstillinger.

6. Den rettleddning litteraturen om empirisk bestemmelse av kostnadsfunksjoner gir, går stort sett ut på å tilpasse en rett linje til et foreliggende observasjonsmateriale ved regresjonsberegning. Spørsmålet om hvor regresjonslinjen skal brytes av den kapasitetsgrense lineærmodellen forutsetter i de fleste av sine anvendelser, blir ikke tatt med i beregningen. Avsnitt 2 viser at F , v og C (eller evt. A , B og C) må tilpasses under hensyntagen til hverandre om våre optimumsbetingelser skal oppfylles.

Denne simultane tilpasning har som følge en invers samvariasjon mellom optimal kapasitetsgrense og krumning i den kostnadskurve $k(x)$ som lineærmodellen skal føyes til. Slik krumning framkommer i alminnelighet ved aksellererende kostnader på grunn av overtid av arbeidskraft og kapitalutstyr i området henimot maksimal beskjeftigelse.

Vår foreløpige undersøkelse skal ikke her tas til støtte for særlig kategoriske råd på det praktiske plan. Men den er med å underbygge kravet om ny og forsterket innsats i det empiriske studium av kostnadsfunksjonen, for å teste deres samsvar med de lineære modeller i teorien.