

## **Simulation af gasflaske-distribution.**

Af P. RESEN STEENSTRUP\*)

Som baggrund for løsning af et praktisk distributionsproblem vedrørende flaskegas udarbejdede forfatteren i foråret 1963 en kort fremstilling af den numeriske simulationsteknik. Nedenstående artikel giver først denne introduktion til simulationsteknikken og anvender derefter simulation på flaskegasdistribution. Endelig vises, hvorledes problemet også kunne løses ved en analytisk metode.

### *Simulation.*

Nedenstående artikel er lavet på basis af forfatterens hovedopgave til diplomprøven i Organisation ved Handelshøjskolen i København. Titlen på hovedopgaven var: »På baggrund af en kort fremstilling af simulationsteknikken ønskes et konkret organisatorisk problem gennemarbejdet med anvendelse af denne teknik og fremgangsmåden vurderet på baggrund af anden problemløsningsteknik«. Der er her foretaget en væsentlig reduktion i forhold til den afleverede besvarelse, der indeholdt en teoretisk og generel første del, som gav en relativ kort fremstilling af de vigtigste sider af simulationsteknikken med hovedvægten lagt på numerisk simulation ved Monte Carlo-metoden, da det er denne teknik, der var benyttet i anden del, som behandlede løsningen af det konkrete organisatoriske problem: distribution af flaskegas. Endelig var der en tredje del, som skitserede en analytisk løsning af problemet samt diskuterede problemløsningsteknikker.

### *Definition og inddeling af de forskellige former for simulation.*

Simulationsteknikken er først og fremmest en operationsanalytisk metode, der ved opstilling af en model repræsenterende det virkelige system for hvilket en problemløsning ønskes, søger at finde en optimal løsning. Denne model benyttes i en serie eksperimenter, hvor man ved at ændre på modellens størrelser og observere resultatet heraf, arbejder sig frem til en løsning, der dog kun vil være optimal, hvis modellen er blevet prøvet for de størrelser, der repræsenterer den optimale situation. Simulation bruges også i undervisnings- og træningsøjemed, i hvilket tilfælde en optimal løsning ikke tilstræbes umiddelbart.

\*) Civilingeniør og civiløkonom, A/S Industrikonsulent.

## **Simulation af gasflaske-distribution.**

Af P. RESEN STEENSTRUP\*)

Som baggrund for løsning af et praktisk distributionsproblem vedrørende flaskegas udarbejdede forfatteren i foråret 1963 en kort fremstilling af den numeriske simulationsteknik. Nedenstående artikel giver først denne introduktion til simulationsteknikken og anvender derefter simulation på flaskegasdistribution. Endelig vises, hvorledes problemet også kunne løses ved en analytisk metode.

### *Simulation.*

Nedenstående artikel er lavet på basis af forfatterens hovedopgave til diplomprøven i Organisation ved Handelshøjskolen i København. Titlen på hovedopgaven var: »På baggrund af en kort fremstilling af simulationsteknikken ønskes et konkret organisatorisk problem gennemarbejdet med anvendelse af denne teknik og fremgangsmåden vurderet på baggrund af anden problemløsningsteknik«. Der er her foretaget en væsentlig reduktion i forhold til den afleverede besvarelse, der indeholdt en teoretisk og generel første del, som gav en relativ kort fremstilling af de vigtigste sider af simulationsteknikken med hovedvægten lagt på numerisk simulation ved Monte Carlo-metoden, da det er denne teknik, der var benyttet i anden del, som behandlede løsningen af det konkrete organisatoriske problem: distribution af flaskegas. Endelig var der en tredje del, som skitserede en analytisk løsning af problemet samt diskuterede problemløsningsteknikker.

### *Definition og inddeling af de forskellige former for simulation.*

Simulationsteknikken er først og fremmest en operationsanalytisk metode, der ved opstilling af en model repræsenterende det virkelige system for hvilket en problemløsning ønskes, søger at finde en optimal løsning. Denne model benyttes i en serie eksperimenter, hvor man ved at ændre på modellens størrelser og observere resultatet heraf, arbejder sig frem til en løsning, der dog kun vil være optimal, hvis modellen er blevet prøvet for de størrelser, der repræsenterer den optimale situation. Simulation bruges også i undervisnings- og træningsøjemed, i hvilket tilfælde en optimal løsning ikke tilstræbes umiddelbart.

\*) Civilingeniør og civiløkonom, A/S Industrikonsulent.

Man skelner mellem fysisk simulation, hvor modellen er baseret på en materiel gengivelse af virkeligheden, og numerisk simulation, hvor man opbygger en abstrakt analogi til virkeligheden i form af matematiske ligninger. De opstillede ligninger benyttes herefter til at beregne en række sammenhørende værdier med, idet man indsætter talværdier, der repræsenterer de situationer og påvirkninger, modellen stilles overfor.

Der er en del diskussion om afgrænsningen af begrebet simulation, der afspejles ved, at de engelske ord »simulation«, »gaming«, »Monte Carlo«, »model sampling« og lignende til dels har været benyttet i flæng eller med en særlig betydning tillagt af de enkelte forfattere. Det, der særligt er stridspunktet, er, hvorvidt de funktioner, der indgår i en simulationsmodel, behøver at være stokastiske; men det må vist siges at være en for snæver afgrænsning at kræve dette. Som eksempel på løsning af ikke-stokastisk ligningssystem ved simulation kan nævnes løsningen af lineære programmeringsproblemer ved hjælp af simplex-metoden.

Den mest benyttede numeriske løsningsteknik er Monte Carlo-metoden, som hovedsageligt bruges, hvor der indgår stokastiske processer i modellen, men også kan bruges ved deterministiske problemer, hvis man kan opstille en kunstig stokastisk model. Monte Carlo-metodens princip er, at man ved stikprøvnings udvælger værdier fra de stokastiske processer, der indgår i modellen. Udvalgelsen sker ved at lade en række tal (slumpetal) svare til bestemte værdier i de benyttede statistiske fordelinger. Slumpetallene udvælges helt tilfældigt.

Som modstykke til simulation har man den analytiske metode, hvor man ved manipulation løser et ligningssystem, der repræsenterer det system, man ønsker at optimere. Rent principielt er det muligt at løse ethvert analytisk formuleret problem ved hjælp af simulation, mens det modsatte ikke behøver at være tilfældet.

#### *Begrundelser for at bruge simulation.*

Begrundelsen for at bruge numerisk simulation kan være:

- 1) vanskeligheder med at opstille en analytisk model og formulere problemerne i et matematisk sprog,
- 2) de observerede data for stokastiske variable, der indgår i modellen, følger ikke kendte statistiske fordelinger,
- 3) Det er ikke muligt eller uhyre kompliceret at løse den analytiske model,
- 4) der kræves ikke så stor matematisk uddannelse for at løse en simulationsmodel som en tilsvarende analytisk,
- 5) man kan bedre forklare, hvorledes et problem er blevet løst ved simulation end ved analytisk metode,
- 6) Man kan accelerere udviklingen, således at man i løbet af ganske kort tid kan indhente erfaringer, det ville tage år at få ved gennemprøvnings i praksis.
- 7) man kan retardere processen og derved bedre studere forløbet,
- 8) man kan udføre forsøgene uden at gribe ind i praksis,
- 9) man kan undersøge tilladeligheden af visse tilfældigheder og idealiseringer, der måske kan muliggøre opstillingen af en analytisk model.

På trods af dette gælder det generelt, at man først griber til simulation, hvis en analytisk metode ikke er praktisk anvendelig, da en simulation kan kræve et ret stort antal stikprøver (simulationer, gennemløb) for at give en tilstrækkelig nøjagtig løsning, samt at løsningen ofte ikke er så generel.

*Maskinsimulation contra manuel simulation.*

En af årsagerne til, at det er praktisk muligt at anvende simulation ved større opgaver, er, at man kan foretage simulationen på elektronregnemaskiner. Der er dog visse fordele ved den manuelle simulation, hvor udregningerne foretages ved hjælp af alm. regnemaskiner, bl. a. at man bedre kan følge gangen i simulationen. Principielt vil enhver maskinsimulation kunne udføres manuelt, det er blot et spørgsmål om tid. Der må derfor foretages en vurdering af de samlede omkostninger ved de to metoder.

Ved løsningen af et problem på elektronregnemaskine skal der jo foretages en programmering, hvad der i sig selv er et stort arbejde, især da hvert nyt problem som regel kræver en ny programmering. Man vil ved modelopstillingen og programmeringen skulle vurdere på, hvormeget det kan betale sig at gøre ud af variansreducerende metoder og en optimal programmering for at minimere maskintiden. Man er dog ved at opbygge generelle simulationsmodeller især for lager- og sekvensmodeller med standardprogrammer, således at man hver gang forholdene ændres eller et nyt problem dukker op blot behøver at indsætte de specifikke oplysninger.

I visse tilfælde har man fundet det fordelagtigt at kombinere maskinsimulation med håndsimulation, således at nogle af delmodellerne maskinsimuleres, og de derved fremkomne mellemresultater kombineres.

*Modelopstilling.*

Rent principielt er opbygningen af en analytisk model og en simulationsmodel ens, men kan kan komme igennem på en enklere måde ved sidstnævnte, da man ikke behøver at detailudforme i samme grad og bedre kan klare sig med flow-charts.

Da man ikke nødvendigvis vil finde en optimal løsning undtagen muligheden for denne bestemte løsning har været udkastet, er det vigtigt, at modelopbygningen er fleksibel, og at man kan gå systematisk frem. Ofte vil en simulationsmodel derfor bestå af en række delmodeller, hvad der også er en fordel bl. a. ved programtestningen og opbygningen samt ved eventuelle ændringer.

Ved modelopbygningen må der også tages stilling til, hvor fin man vil lave intervalinddelingerne for de simulerede variable i de enkelte delmodeller, idet de skal være af nogenlunde samme finhed allesammen. Som oftest svarer det sig ikke at lave en for fin inddeling.

*Antal simulationer (gennemløb).*

Et meget vigtigt punkt i enhver simulation er, hvormange gennemløb det er nødvendigt at foretage. Det er faktisk et problem, der i betragtning af dets betydning er relativt dårligt behandlet i litteraturen. Dette skyldes ikke så meget, at man underkender betydningen deraf, som det faktum, at det er meget vanskeligt.

Når man baserer en beslutning på grundlag af stikprøver, vil der være en risiko for at træffe en forkert beslutning, men denne risiko kan reduceres ved at forøge antallet af gennemløb. Faktisk kan man kun træffe en optimale (»bedste«) afgørelse med en vis sandsynlighed afhængig af omkostningerne ved at skaffe informationerne, altså dataindsamling, modelopstilling samt simulationens tilrettelæggelse og gennemførelse. Disse kan igen mere eller mindre deles i faste og variable omkostninger. Målet må være at minimere de totale omkostninger og altså finde det optimale antal gennemløb. Dette er kun praktisk muligt ved simple modeller, hvorfor man i stedet som

oftest vælger den fra den klassiske statistik kendte fremgangsmåde at fastsætte visse grænser, der skal overholdes med en vis sikkerhed af hængig af, hvor følsomt resultatet er overfor svingninger af modellens variable, men uden nogen direkte matematisk relation til omkostningerne ved at skaffe denne informationsmængde.

En anden ret benyttet metode for bestemmelse af antal nødvendige gennemløb er, efterhånden som simulationen forløber, at udregne gennemsnittet på resultatet (eller delresultaterne) for derefter at stoppe, når dette (disse) har stabiliseret sig, men det bliver da uden garanti for, at stabiliseringen ikke bliver på et midlertidigt falskt niveau.

#### *Variansreducerende metoder.*

For at nedsætte antallet af gennemløb, som vil være afhængigt af spredningen på resultatet, har man udviklet en række variansreducerende metoder for Monte Carlo-metoden, hvoraf følgende skal omtales.

- 1) *Vigtighedssampling.* Udvalgelsesprocessen styres således, at vigtige hændelser får større sandsynlighed, end de har i virkeligheden. Som kompensation herfor indføres spilvægte.
- 2) *Russisk roulette og kløvning* er en variation af vigtighedssampling, hvor man dels styrer udvalgelsesprocessen og dels regulerer gennemløbets længde. Som kompensation herfor indfører man spilvægte.
- 3) *Kombination med analytisk metode;* dele af modellen, som det er muligt at behandle analytisk, særlig de mere variansfrembringende, behandles analytisk, den øvrige del simuleres.
- 4) *Korreleret sampling.* Der anvendes samme række slumptal ved sammenligning af flere alternativer.
- 5) *Antitetiske variable.* Samme størrelse estimeres ved hjælp af to stokastiske variable, der er stærkt negativt korrelerede.
- 6) *Systematisk og stratificeret sampling,* en vis del af udvalgelsesprocessen bliver regelbundet i stedet for tilfældig.

Ved anvendelse af variansreducerende metoder mister simulationsmetoden dog i visse tilfælde en del af sin klarhed, og fremelskningen af visse hændelser sker på bekostning af andre hændelser, der bliver dårligere belyst; desuden kræves der mere analyse, og opstillingen af regneprogrammerne kompliceres betydeligt. En mere dyberegående matematisk behandling af de variansreducerende metoder kan findes hos Dahlquist (1961) og Kahn (1954).

#### *Fremskaffelse af slumptal.*

Generationen af slumptal kan ske ved almindelig lodtrækning eller i et særligt organ til elektronregnemaskinen f. ex. ved elektronisk støj eller fra et radioaktivt præparat. I visse tilfælde kan man ønske reproducerbare slumptal ved maskinsimulation. Dette kan enten klares ved hjælp af en tabel i maskinens lager eller generation af pseudo-tilfældige tal ad aritmetisk vej. Som regel vil man af pladshensyn foretrække det sidste.

*Afsluttende kommentarer til den teoretiske del.*

Det faktum, at der ikke er udviklet nogen egentlig simulationsteori, har ført til, at litteratur og symposier vedrørende simulation er fyldt med »cases« for derigennem at eksemplificere simulationsteknikken og dens anvendelsesområder.

Udviklingen indenfor simulationsteknikken såvel som den øvrige del af operationsanalysen hviler jo ikke i så høj grad direkte på en speciel operationsanalytisk grundforskning, men først og fremmest på den naturlige udvikling, en anvendelse fører med sig. De vigtigste anvendelser har været i forbindelser med lagerproblemer, kømodeller, trafikproblemer, sekvensmodeller (bestemmelse af den optimale rækkefølge), distribution og logistik.

Simulationsteknikken har forlængst vist sin værdi i praksis, og en kraftig udvikling snævert knyttet til udviklingen og udbredelsen af elektronregnemaskiner må forudses. Når man står over for løsningen af et problem må man dog stadig have opmærksomheden henledt på, at man ikke i stedet kan finde en »færdigsyet« analytisk løsning, der er anvendelig.

*Beskrivelse af det konkrete organisatoriske problem og baggrunden for flaskegasdistribution.*

Det konkrete organisatoriske problem, det er valgt at løse, drejer sig om distribution af gasflasker fra en fyldestation ud til fem depoter, hvorfra flaskerne med mindre vogne videredistribueres ud til kunderne (husholdninger m. v.). Depoternes faktiske salg og placering er fingeret af firmahensyn, men alle øvrige forhold er realistiske og i overensstemmelse med de virkelige forhold. Disse depoter besøges enten hver uge eller hver 14. dag, og distributionen til disse er kun en lille del af den samlede distribution fra fyldestationen med store lastvogne med anhængere, der ialt kan tage 600 flasker. For at simplificere problemet regnes der kun med en flaskestørrelse, 11 kg; denne størrelse udgør normalt ca. 85–90 % af omsætningen. En depottur vil ialt tage  $\frac{3}{4}$ –1 dag. Det leverede antal flasker fra fyldestationen bestilles dagen før pr. telefon eller post. Problemet er, hvilket alternativ er mest lønsomt, alternativ I, hvor depoterne A–E incl. alle besøges hver uge, eller alternativ II, hvor depoterne A, B og C besøges den ene uge, og A, D og E den næste uge. Et depots salg vil være en stokastisk variabel, og der vil være et samspil depoterne imellem, da der normalt kun er en vogn til rådighed en gang om ugen for levering til disse fem depoter. Der er altså en kapacitetsbegrænsning på 600 flasker pr. uge, hvilket betyder, at depoterne ikke altid vil kunne få alt, hvad de bestiller, men må vente med en mindre del til næste ordinære levering eller eventuelt selv må sende en vogn til fyldestationen. Ved alternativ I vil kørselsomkostningerne blive større, mens depoternes lagre kan holdes mindre og vice versa for alternativ II. På forhånd følges en given og ufravigelig politik om, at et depot og for den sags skyld også enhver kunde ikke kan få leveret en fyldt flaske uden at aflevere en tom undtagen i tilfælde af salg af nye flasker til anlæg. Depoternes driftspuljer af flasker er fastsat til 110 % af den gennemsnitlige omsætning i den periode, der forløber mellem hver ordinær levering. Uafhængigt af om et depot får leverancer hver uge eller hver anden, distribuerer det ud til sine kunder hver uge og søger at effektivisere deres efterspørgsel inden en uge. I tilfælde af et depot har en efterspørgsel, der er større end antallet af fulde flasker på lager, kan man udskyde leveringen, men der må regnes med ekstraomkostninger p. gr. af afbræk i den normale distribution. Bliver et depots »underskud« af flasker dvs. efterspørgslen minus

antal fulde flasker på lager, større end 10 % af periodens gennemsnitlige salg, sender depotet selv en vogn til fyldestationen for supplering, hvad der aflaster vognen, der normalt leverer. Depotet henter i så tilfælde en fuld vogntogsladning, dvs. 48 flasker.

#### *Indsamling af nødvendige data.*

Der er ved løsningen af problemet betragtet en situation, hvor der ikke optræder sæsonsvingninger eller ændringer salgsvolumenet. Det benyttede datamateriale må derfor være rensat for enhver indflydelse af denne art. Dette er et meget stort problem, men efter gennemgang af en række depoters salg lykkedes det at finde nogle stykke, hvor man kunne antage, at variansen skyldtes tilfældigheder alene. Depoternes salg afbildedes på sandsynlighedspapir og fandtes med tilstrækkelig nøjagtighed at være normalfordelt.

Herudover skal der skaffes oplysninger om omkostninger til driftspuljen af flasker, dvs. lagerrum og selve flaskerne, kørselsomkostninger, ordreudskrivningsomkostninger og omkostninger ved underskud af flasker på depoterne. Ved beregning af omkostningerne er der ingen grund til at se på omkostninger, der er fælles for de to alternativer, hvis det er lettere og relevant at udelade dem.

Omkostningerne i tilfælde af underskud af flasker på et depot, således at efterspørgslen ikke kan tilfredsstilles indenfor en uge, regnes lig med de omkostninger, der vil opstå ved senere at skulle foretage en ekstratur ud til en kunde, der bor i en afstand svarende til gennemsnittet for kundernes afstande til depotet, og derfra fortsætte den afbrudte distribution. I tilfælde af et større »underskud« regnes yderligere med omkostninger ved at sende en vogn til fyldestationen; alle disse omkostninger regnes betalt som overarbejde.

De samlede omkostninger kan deles i »Faste« og »Tilfældige«. Som »Faste« er medtaget fyldestationens kørselsomkostninger til lagerrum for depoterne og disses flaskepuljer dog exclusive forrentning af deres indhold af gas. Disse »Faste« er uafhængige af, hvilke slumptal der vælges og dermed hvilken efterspørgsel, der simuleres; men varierer selvfølgelig for de to alternativer. De »Tilfældige« er omkostninger til forrentning af gas i flaskerne (der nu ikke varierer meget over et helt år) og omkostninger ved »underskud« af flasker (til overtidsbetaling og for ekstratur til kunder og fyldestation), alt sammen afhængige af den simulerede efterspørgsel.

#### *Fremgangsmåde ved selve simulationen.*

Opgaven blev løst ved manuel simulation. Depoternes efterspørgsel er fundet ved at lade de ved dataindsamlingen fundne salgstal svare til efterspørgslen, hvad der er en tilnærmelse, da en periodes salg og efterspørgsel ikke nødvendigvis er ens. De kumulerede hyppigheder for depoternes efterspørgsel er jævnet ud til rette linier på sandsynlighedspapir (A4-format), og fra disse kurver er de simulerede efterspørgsler fundet, idet slumptallene svarer til hyppighederne. (Se fig. 1). Der er benyttet to-cifrede slumptal hentet fra en tabel. Depotets bestilling af flasker på fyldestationen findes herefter som periodens efterspørgsel plus evt. underskud fra tidligere perioder plus evt. antal flasker fyldestationen mangler at levere fra forrige besøg. Der kan dog højst bestilles et antal svarende til driftspuljens størrelse, da depotet ikke kan have flere tomme end størrelsen af denne. Faktisk er der 1-1½ dag tilbage af ugen, når der bestilles, idet ugen slutter den dag, der kommer ny ordinær levering, så ugens efterspørgsel kan i virkeligheden kun være et skøn. Depoternes samlede bestillinger

## SLUMPTAL

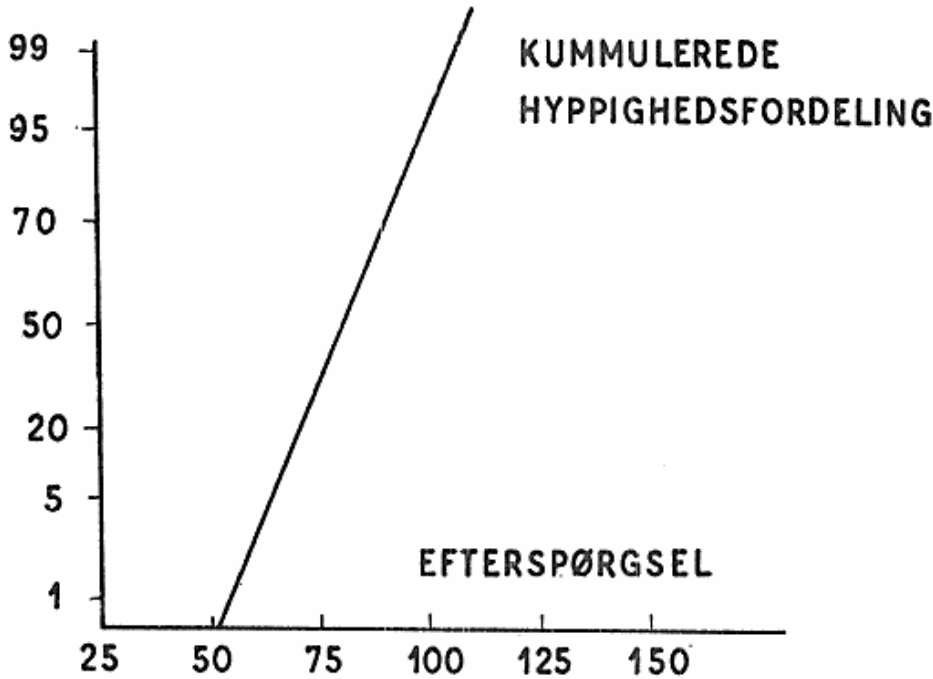


FIG. 1

summeres herefter, og det konstateres, om antallet overstiger 600 flasker; i tilfælde heraf reduceres de enkelte depoters bestillinger relativt lige meget, så der nås ned på 600. Depoterne vil således have fået leveret en vis mængde flasker, og det må herefter konstateres om det samlede antal fulde flasker til rådighed kan klare efterspørgslen for den kommende periode plus evt. underskud fra tidligere perioder. Bliver der et samlet underskud på mindre end 10 % af periodens gennemsnitlige efterspørgsel, skal der kun regnes med ekstraomkostninger for distributionen ud til kunderne, men overstiger det 10 % af periodens gennemsnitlige efterspørgsel, må depotet foretage en extratur til fyldestationen. (Denne situation er på skemaet nedenfor markeret med \*). I fig. 2 er vist udregninger for depot B ved alternativ I. Af hensyn til udregningen af lageromkostningerne bestemmes antal fulde flasker henholdsvis ved ugens (periodens) begyndelse og slutning; og for regneteknisk at lette regnskabet med levering af flasker haves også en kolonne, der angiver det antal flasker, som fyldestationen eventuelt underleverer. Således er eet år simuleret igennem i hånden for begge alternativer og alle depoterne, hvorefter de samlede omkostninger er regnet ud og omkostningsstrukturen analyseret bl. a. for at konstatere, om det er nødvendigt at fortsætte simulationen.

Efter simulering af det første år kom resultatet da til at se således ud (visse omkostninger, der er ens for de to alternativer, er udeladt):



*Simulation for depot B ved I*

| Uge | Slump-<br>tal | Efter-<br>spørgsel | Antal fulde flasker |           | Underskud | Ab fyldestation |                    |
|-----|---------------|--------------------|---------------------|-----------|-----------|-----------------|--------------------|
|     |               |                    | ved beg.            | ved slut. |           | Lev.            | Under-<br>levering |
| 1   | 66            | 95                 | 98                  | 3         |           | 95              |                    |
| 2   | 6             | 66                 | 98                  | 32        |           | 66              |                    |
| 3   | 57            | 92                 | 98                  | 6         |           | 92              |                    |
| 4   | 47            | 88                 | 98                  | 10        |           | 88              |                    |
| 5   | 17            | 75                 | 98                  | 23        |           | 75              |                    |
| 6   | 34            | 82                 | 98                  | 16        |           | 82              |                    |
| 7   | 7             | 66                 | 98                  | 32        |           | 66              |                    |
| 8   | 27            | 80                 | 98                  | 18        |           | 80              |                    |
| 9   | 68            | 96                 | 98                  | 2         |           | 96              |                    |
| 10  | 50            | 89                 | 98                  | 9         |           | 89              |                    |
| 11  | 36            | 83                 | 98                  | 15        |           | 83              |                    |
| 12  | 69            | 96                 | 98                  | 2         |           | 96              |                    |
| 13  | 73            | 98                 | 98                  |           |           | 96              | 1                  |
| 14  | 61            | 93                 | 96                  | 3         |           | 95              |                    |
| 15  | 70            | 97                 | 98                  | 1         |           | 97              |                    |
| 16  | 65            | 95                 | 98                  | 3         |           | 95              |                    |
| 17  | 81            | 102                | 98                  |           | 4         | 97              | 1                  |
| 18  | 33            | 82                 | 97                  | 11        |           | 86              |                    |
| 19  | 98            | 120                | 98                  | 26        | 22*       | 72              |                    |
| 20  | 85            | 104                | 98                  |           | 6         | 98              |                    |
| 21  | 11            | 71                 | 98                  | 21        |           | 77              |                    |
| 22  | 19            | 76                 | 98                  | 22        |           | 76              |                    |
| 23  | 92            | 110                | 98                  | 36        | 12*       | 62              |                    |
| 24  | 91            | 109                | 98                  | 37        | 11*       | 61              |                    |
| 25  | 70            | 97                 | 98                  | 1         |           | 96              | 1                  |
| 26  | 63            | 95                 | 96                  | 1         |           | 96              |                    |
| 27  | 57            | 92                 | 98                  | 6         |           | 92              |                    |
| 28  | 33            | 82                 | 98                  | 16        |           | 82              |                    |
| 29  | 21            | 77                 | 98                  | 21        |           | 77              |                    |
| 30  | 35            | 83                 | 98                  | 15        |           | 83              |                    |
| 31  | 5             | 64                 | 98                  | 34        |           | 64              |                    |
| 32  | 32            | 82                 | 98                  | 16        |           | 82              |                    |
| 33  | 54            | 87                 | 98                  | 11        |           | 87              |                    |
| 34  | 70            | 97                 | 98                  | 1         |           | 97              |                    |
| 35  | 48            | 88                 | 98                  | 10        |           | 88              |                    |
| 36  | 90            | 108                | 98                  | 38        | 10*       | 60              |                    |
| 37  | 55            | 91                 | 98                  | 7         |           | 91              |                    |
| 38  | 35            | 83                 | 98                  | 15        |           | 83              |                    |
| 39  | 75            | 99                 | 98                  |           | 1         | 96              | 2                  |
| 40  | 48            | 88                 | 96                  | 7         |           | 91              |                    |
| 41  | 28            | 80                 | 98                  | 18        |           | 80              |                    |
| 42  | 46            | 87                 | 98                  | 11        |           | 87              |                    |

|    |    |     |      |     |    |    |   |
|----|----|-----|------|-----|----|----|---|
| 43 | 82 | 102 | 98   |     | 4  | 98 |   |
| 44 | 87 | 106 | 98   | 36  | 8* | 62 |   |
| 45 | 9  | 69  | 98   | 29  |    | 69 |   |
| 46 | 83 | 103 | 98   |     | 5  | 97 | 1 |
| 47 | 49 | 89  | 97   | 3   |    | 95 |   |
| 48 | 12 | 71  | 98   | 27  |    | 71 |   |
| 49 | 56 | 91  | 98   | 7   |    | 91 |   |
| 50 | 24 | 78  | 98   | 20  |    | 78 |   |
| 51 | 73 | 98  | 98   |     |    | 98 |   |
| 52 | 79 | 101 | 98   |     | 3  | 97 | 1 |
|    |    |     | 5088 | 678 | 86 |    |   |

Fig. 2.

|                                                  | Alternativ |           |
|--------------------------------------------------|------------|-----------|
|                                                  | I          | II        |
| »Faste« omkostninger:                            |            |           |
| Kørsel fra fyldestation til depoterne .....      | 5668 kr.   | 4455 kr.  |
| Lagerrum og flaskepuljer .....                   | 5489 —     | 9839 —    |
| Ordreomkostninger .....                          | 130 —      | 78 —      |
|                                                  | 11287 kr.  | 14372 kr. |
| »Tilfældige« omkostninger:                       |            |           |
| Forrentning af gas i flasker på depoterne* ..... | 205 kr.    | 434 kr.   |
| Flasker udbragt til overtidsbetaling .....       | 141 —      | 69 —      |
| Extra kundeture p. g. a. »underskud« .....       | 563 —      | 295 —     |
| Extra ture til fyldestationen .....              | 2019 —     | 272 —     |
|                                                  | 2928 kr.   | 1070 kr.  |
| »Faste« plus »variable« omkostninger .....       | 14215 kr.  | 15442 kr. |

Der kan heraf umiddelbart udledes følgende:

1) Alternativ I bør vælges som det mest lønsomme. De forøgede omkostninger til en større flaskepulje og mere depotrum ved alternativ II opvejes ikke af tilsvarende besparelser i kørselsomkostningerne ved II. Omkostningerne på grund af »underskud« af flasker på depoterne bliver betydelig mindre ved II, da sandsynligheden for »underskud« formindskes væsentlig, idet spredningen på den gennemsnitlige efterspørgsel for den periode, der forløber mellem leveringerne fra fyldestationen, kun bliver  $\sqrt{2}$  større ved alternativ II, mens driftspuljerne af flasker bliver dobbelt så store. Da omkostningerne ved »underskud« er de samme ved I som ved II, virker dette ikke rimeligt, selv om det ikke i dette tilfælde ændrer på valget mellem de to alternativer; men det fører til en videre diskussion i næste punkt.

\* Det gennemsnitlige antal fulde flasker på et depot er fundet som differensen mellem antallet ved begyndelsen af en uge minus antallet ved slutningen summeret over hele året og divideret med  $2 \cdot 52$ ; f. ex. for depot B, alt. I:  $\frac{5088-678}{2 \cdot 52} = 42,4$ .

2) Den førte lagerpolitik, der bestemmer driftspuljens størrelse som en fast procent af periodens gennemsnitlige salg, er principielt forkert. Driftspuljens størrelse bør ikke udelukkende være en funktion af den gennemsnitlige efterspørgsel, men derimod også af spredningen på efterspørgslen (altså sandsynligheden for at få »underskud« af fyldte flasker), omkostningerne ved »underskud« samt af lageromkostningerne.

Ud af dette dukker altså et helt nyt problemkompleks op, nemlig ikke blot valget mellem alternativ I og II, men valget mellem I og II under forudsætning af en rationel lagerpolitik, og altså dermed fastsættelse af de optimale flaskepuljer for depoterne. Dette problem er ikke løst her under simulationsmetoden, men under den analytiske løsning er der givet et oplæg dertil. Problemet kan let løses med maskinsimulation, idet man blot som en parameter mere indfører varierende antal flasker for depoterens driftspuljer og dermed de omkostninger, som dette involverer, og simulerer hvert alternativ igennem for en række parametre, indtil man finder størrelserne på de optimale driftspuljer (eller noget nær optimale). Men det mangedobler selvfølgelig opgavens omfang.

3) Endelig ses, at det ikke er nødvendigt at fortsætte simulationen, og at problemet med den givne talkombination kunne være løst lettere ved analyse. Med den benyttede talkombination vil det ret sjældent hænde, at de samlede bestillinger fra depoterne overstiger 600 flasker. Samspillet depoterne imellem er derfor ikke så udpræget. (På sin vis en skønhedsplet ved eksemplet). Det er således muligt analytisk nogenlunde at beregne antallet af gange med »underskud« og antallet af extratur, der skyldes et momentant »underskud« af flasker, altså »underskud« der ikke skyldes, at der allerede i den forrige periode var et mindre »underskud«, som i sig selv ikke var stort nok til en extratur, men store nok, når flere sådanne summeres. Disse akkumulerede »underskud« er det derimod ikke muligt umiddelbart at beregne, men man kan danne sig et skøn over det maximale antal, således at man kan se, at alternativ I med den benyttede talkombination er det mest lønsomme. Dette viser, hvor vigtigt det er på forhånd at foretage en omhyggelig analyse af problemerne, og minder om, at simulationsmetoden som oftest kun anbefales, hvis det ikke er muligt at finde en analytisk metode, men ændrer selvfølgelig intet principielt ved den her anvendte løsningsteknik.

Den eneste variansreducerende metode, der er benyttet, er korreleret sampling, idet efterspørgslen for alternativ II er dannet af to på hinanden følgende ugers salgstal fra alternativ I. Selv om det allerede efter simulation af eet år og i øvrigt ved et analytisk skøn var fundet, at I var bedst, simuleredes alligevel eet år mere for II for at se, om omkostningerne havde stabiliseret sig. Det havde de ikke, hvorfor man må forvente at skulle foretage et større antal simulationer ved en anden talkombination.

Der er ikke gjort forsøg på at beregne det nødvendige antal simulationer, men i et tilfælde som dette må det i høj grad afhænge af, hvor stor forskellen mellem gennemsnitsomkostningerne for de to alternativer er, da en lille forskel må kræve en mindre spredning for at give den samme sikkerhed (som hvis forskellen var større) og dermed flere gennemløb.

#### *Anden problemløsningsteknik.*

Ofte vil man ved løsningen af et problem af denne art nøjes med at se på, hvad der ovenfor under 1) er kaldt de »faste« omkostninger plus forrentning af gas i depoterens flasker og i øvrigt slavisk følge den givne lagerpolitik. Denne løsningsteknik

er selvfølgelig uhyre enkel, men tager intet hensyn til, at depoternes salg er stokastiske variable, og metoden giver ingen mulighed for at udregne de mest økonomiske lagerstørrelser. Dette er der ganske vist heller ikke gjort forsøg på med simulationsmodellen, men den opstillede model giver mulighed derfor. Den opstillede simulationsmodel giver desuden mulighed for at beregne den optimale størrelse af de vogne, der leverer gas fra fyldestationen og deres antal, hvad hverken denne grove metode eller den nedenfor opstillede analytiske model giver mulighed for.

Endelig er der opstillet en analytisk model, som dog har en begrænset gyldighed, da den intet hensyn tager til »akkumulerede underskud«, dvs. flere på hinanden følgende mindre underskud, der ikke hver for sig giver anledning til extrature til fyldestationen, men nok når de summeres. Der tages heller intet hensyn til samspillet depoterne imellem p. g. a. begrænsning i vognkapaciteten; skal der tages hensyn hertil kræves en kømodel. Den analytiske model er opstillet således, at den skulle kunne give mulighed for at beregne de optimale driftspuljer. For hvert depot findes dets omkostninger (excl. kørsel) som en funktion af størrelsen af driftspuljen samt hyppighederne for »underskud« og extrature. Disse funktioners minima findes ved differentiation m. h. t. driftspuljestørrelsen for henholdsvis ugentlige eller 2-ugentlig besøg, hvorefter de samlede omkostninger incl. kørsel for de to alternativer findes. Den analytiske model er dog ikke regnet igennem og kræver anvendelse af numerisk integration. Den vil kræve en noget større matematisk viden af opgaveløseren og ikke give samme indlevelse i problemstilling. P. g. a. den begrænsede gyldighed vil en vis kombination med en simulationsmodel sikkert være den bedste løsningsteknik, da man herved dels kan få et begreb om, hvad denne tilnærmelse, der foretages ved den analytiske model, betyder, og dels give et fingerpeg om, hvilket parametre der med største sandsynlighed giver den optimale løsning i tilfælde af, at man ville søge at bestemme de optimale driftspuljer af flasker ved simulation.

#### *Opstilling af den tilnærmede analytiske model.*

Fremgangsmåden ved denne problemløsningsteknik er følgende:

Først opstilles ligninger for de forventede omkostninger for hvert depot for sig, idet de fælles kørselsomkostninger og ordreomkostningerne i første omgang holdes udenfor. Disse omkostninger minimeres for de enkelte depoter hver for sig ved differentiation dels ved ugentlig levering og dels ved levering hver anden uge. Herved vil man finde de optimale lagre (dog med de ovenfor omtalte begrænsninger). Herefter summeres omkostningerne for de to alternativer hver for sig incl. de fælles kørselsomkostninger og ordreudskrivningsomkostninger, og det mest lønsomme alternativ vælges.

Nedenfor er brugt følgende symboler (der er i dette generelle oplæg ikke benyttet indices for depoterne):

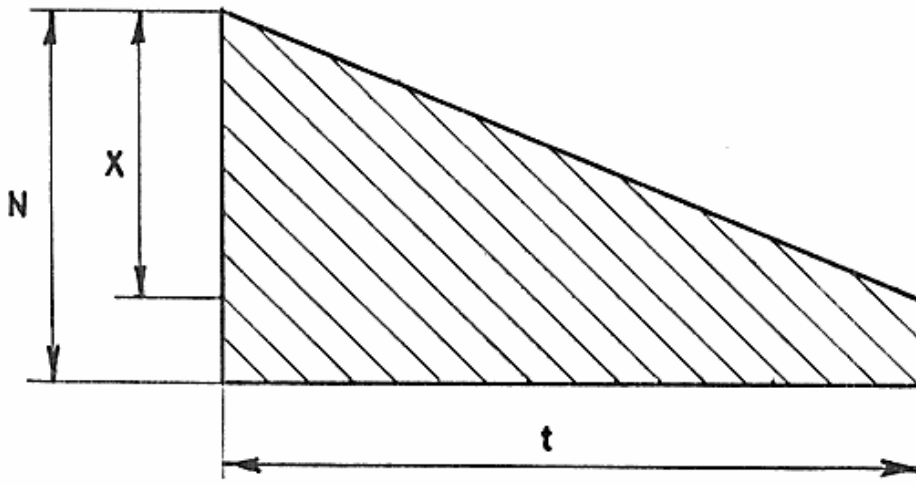
- $x$ : efterspørgslen efter flasker i tiden  $t$ ,
- $\bar{x}$ : gennemsnitlige efterspørgsel mellem hver ordinær levering,
- $f$ : faste omkostninger ved at have en flaske på lager (kan omfatte såvel omkostningerne til lagerpladsen som kun selve flasken alene, alt efter hvad der er relevant).
- $v$ : variable omkostninger ved at have en flaske på lager,
- $t$ : tid mellem to depotture, dvs. i dette tilfælde enten  $t = 1$  el.  $t = 2$ .
- $s$ : spredningen på det ugentlige salg,
- $P^t(x)$ : sandsynligheden for en efterspørgsel på  $x$  i tiden  $t$  for et depot (normalfordelt),

- $z$ : størrelsen af driftspuljen af flasker for et depot,  
 $u$ : ekstraomkostningerne ved at udbringe en flaske til overtidsbetaling i tilfælde af »underskud«,  
 $U$ : omkostningen ved en extra kundetur p. g. a. »underskud«,  
 $E$ : omkostningerne ved at depotet selv kører til fyldestationen efter flasker i tilfælde af en efterspørgsel på mere end  $g \cdot z$ ,  
 $g$ : en faktor (større end een), som bestemmer grænsen for ved hvilken efterspørgsel der skal rekvireres extra flasker fra fyldestationen,  
 $K_I$ : kørsels- og ordreudskrivningsomkostninger for alternativ I,  
 $K_{II}$ : do. for alternativ II.

Omkostningerne, der skal medtages her ved sammenligning af de to alternativer, er i første omgang følgende:

- 1) De betingede variable lageromkostninger, når depotets lager i en periode er større end efter spørgslen, dvs.  $z > x$ , er lig arealet af nedenstående figur multipliceret med  $v$ , dvs:

$$v \cdot t \cdot \left(z - \frac{x}{2}\right) \quad \text{for } x \leq z$$



- 2) I tilfælde af større efterspørgsel end lager, dvs.  $x > z$ , er de betingede variable lageromkostninger lig arealet af den højreskraverede del af figuren multipliceret med  $v$ , mens de betingede variable omkostninger ved »underskud« er lig med den venstreskraverede del af figuren multipliceret med  $u$ .

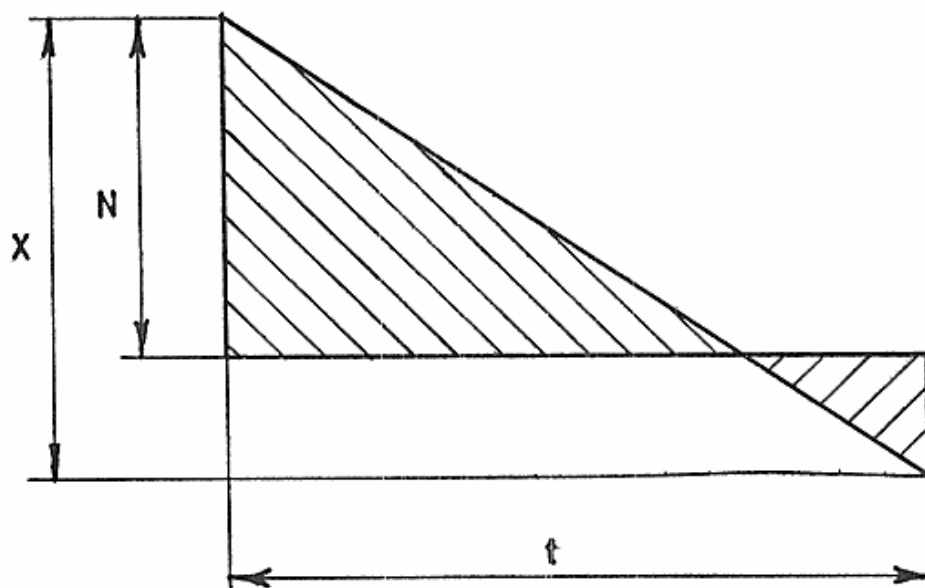
Arealet findes ved anvendelse af ensvinklede trekanter.

Altså:

$$\frac{v \cdot t \cdot z^2}{2x} + \frac{u \cdot t \cdot (x-z)^2}{2x} \quad \text{for } x \geq z.$$

- 3) Ved  $x > z$  kommer tillige en betinget omkostning på  $U$  for extratur ud til en kunde, der bor i middelfstanden.

- 4) Ved  $x > g \cdot z$  kommer foruden, hvad der er angivet under 2) og 3), en betinget omkostning på  $E$  til extratur til fyldestationen.



De forventede omkostninger excl. normal kørsel og ordreudskrivning bliver da:

$$F(z) = \int_{x=0}^z v \cdot t \cdot (z - \frac{x}{2}) \cdot P(x) dx + \int_z^{\infty} (\frac{v \cdot t \cdot z^2}{2x} + \frac{u \cdot t \cdot (x-z)^2}{2x} + U) \cdot P(x) dx \\ + \int_{g \cdot z}^{\infty} E \cdot P(x) dx + f \cdot z \quad (I)$$

For at finde hvor denne omkostningsfunktion har minimum, når  $z$  er den variable, differentieres den m. h. t.  $z$ , den første afledede sættes lig nul, og  $z$  findes.

$$\frac{dF(z)}{dz} = v \cdot t \cdot \int_{x=0}^z P(x) dx + v \cdot t \cdot z \int_z^{\infty} \frac{P(x)}{x} dx - U \cdot t \cdot \int_z^{\infty} \frac{x-z}{x} P(x) dx \\ - U \cdot P(z) - g \cdot E \cdot P(g \cdot z) + f = 0 \quad (II)$$

Denne ligning kan kun løses ved numerisk integration, »trial and error« og tabeller, hvad der dog ikke skal komme nærmere ind på. Det skal dog påpeges, at det er temmelig besværligt. For hver af de enkelte depoter findes værdier  $z_0$ , der tilfredsstiller (II) ved henholdsvis  $t = 1$  og  $t = 2$  (for depot A dog kun for  $t = 1$ ).

Det bør derefter for en ordens skyld undersøges, om  $F(z)$  får minimum for  $z_0$ .

De samlede omkostninger fås herefter ved for  $t = 1$  og  $t = 2$  at indsætte de dertil svarende værdier for  $z_0$  i (I) for de forskellige depoter, lægge dem sammen og hertil addere henholdsvis  $K_I$  og  $K_{II}$ . Herefter kan det mest lønsomme alternativ vælges (altså enten ved  $t = 1$  eller  $t = 2$ ).

Havde man fastholdt de oprindelig givne forudsætninger med hensyn til driftspuljen, kan modellen dog også give oplysninger om, hvilket alternativ der er mest lønsomt, idet man i stedet for  $z_0$  benytter  $1,1 \cdot \bar{x}$ .

#### Konklusion.

Det her behandlede problem udgør kun en lille del af den samlede distribution fra en fyldestation, men viser dog, at simulation er velegnet til løsning heraf og bedre

end nogen anden metode kan tage hensyn til de fleste relevante forhold. I tilfælde af, at forudsætningerne m. h. t. driftspuljens størrelse, og hvor stort et »underskud« der kan tillades, før der hentes extra forsyning af flasker, ikke er givet på forhånd som i det her behandlede tilfælde, må man dog gå over til maskinsimulation, ligeledes hvis man ønsker at se på en større del af distributionen. Det er meget vanskeligt at afgøre, om der virkelig vil kunne opnås større besparelser, hvis man systematisk begyndte at simulere distributionen igennem for de forskellige fyldestationer, men for mindre, isolerede problemer vil jeg anse teknikken for anvendelig.

*Litteraturliste:*

- Churchman, Ackoff og Arnoff: Introduction to Operations Research, John Wiley, 1957.  
 Dahlquist: Monte Carlo-metoden. Ingeniörvetenskapsakademien, F. K. O. – Meddelande nr. 41, Stockholm 1961.  
 Friedman, Sasieni og Yaspan: Operations Research – methods and problems. John Wiley, 1959.  
 Kahn, Meyer m. fl.: Symposium on Monte Carlo-Methods. Held at the University of Florida, March 1954. J. Wiley.

end nogen anden metode kan tage hensyn til de fleste relevante forhold. I tilfælde af, at forudsætningerne m. h. t. driftspuljens størrelse, og hvor stort et »underskud« der kan tillades, før der hentes extra forsyning af flasker, ikke er givet på forhånd som i det her behandlede tilfælde, må man dog gå over til maskinsimulation, ligeledes hvis man ønsker at se på en større del af distributionen. Det er meget vanskeligt at afgøre, om der virkelig vil kunne opnås større besparelser, hvis man systematisk begyndte at simulere distributionen igennem for de forskellige fyldestationer, men for mindre, isolerede problemer vil jeg anse teknikken for anvendelig.

*Litteraturliste:*

- Churchman, Ackoff og Arnoff: Introduction to Operations Research, John Wiley, 1957.  
 Dahlquist: Monte Carlo-metoden. Ingeniörvetenskapsakademien, F. K. O. – Meddelande nr. 41, Stockholm 1961.  
 Friedman, Sasieni og Yaspan: Operations Research – methods and problems. John Wiley, 1959.  
 Kahn, Meyer m. fl.: Symposium on Monte Carlo-Methods. Held at the University of Florida, March 1954. J. Wiley.