

Om den logiske kurve og dens anvendelse i praksis.

Af H. C. PLESSING^{*)}

Det første afsnit indledes med en matematisk beskrivelse af den logistiske kurve og dens modelegenskaber.

Derefter angives metoder til bestemmelse af konstanterne i kurvens ligning, og der gøres rede for usikkerheden ved bestemmelsen af den konstant, der angiver den logistiske kurves asymptote. Afsnittet slutter med en omtale af forskellige anvendelsesområder for den logistiske kurve.

Det andet afsnit indledes med træk af den logistiske kurves historie. Derefter beskrives dens anvendelse på befolkningsstatistikken og herunder påvises forbindelsen mellem *Malthus'* befolkningslov og den logistiske kurve, som den logistiske kurve beskriver. Afsnittet slutter med eksempler på de to befolkningsmodellers fremstilling af folketal fra de første folketællingers tid og op til nutiden.

I det tredje afsnit konkluderes, at de to modellens fremstilling af et folketals vækst supplerer hinanden på en hensigtsmæssig måde.

I tilslutning hertil beskrives to senere fremkomne modeller, hvis udledning er baseret på udvidede forudsætninger om de faktorer, der er bestemmende for et folketals vækst. Herunder omtales indførelsen af stokastiske elementer i en befolkningsmodel og den indvirkning disse udøver på denne.

I. Den logistiske kurves egenskaber.

- a) *Differentialligning, ligning, vendepunkt, asymptote og tangentegenskab.*
- a) Den matematiske funktion, hvis sammenhæng mellem to variable den logistiske kurve beskriver, er udledt i 1838 af den hollandske

^{*)} Civilingeniør, fhv. overingeniør i J. T. A. S., dr. oecon., h. c., Århus.

Om den logiske kurve og dens anvendelse i praksis.

Af H. C. PLESSING^{*)}

Det første afsnit indledes med en matematisk beskrivelse af den logistiske kurve og dens modelegenskaber.

Derefter angives metoder til bestemmelse af konstanterne i kurvens ligning, og der gøres rede for usikkerheden ved bestemmelsen af den konstant, der angiver den logistiske kurves asymptote. Afsnittet slutter med en omtale af forskellige anvendelsesområder for den logistiske kurve.

Det andet afsnit indledes med træk af den logistiske kurves historie. Derefter beskrives dens anvendelse på befolkningsstatistikken og herunder påvises forbindelsen mellem *Malthus'* befolkningslov og den logistiske kurve, som den logistiske kurve beskriver. Afsnittet slutter med eksempler på de to befolkningsmodellers fremstilling af folketal fra de første folketællingers tid og op til nutiden.

I det tredje afsnit konkluderes, at de to modellens fremstilling af et folketals vækst supplerer hinanden på en hensigtsmæssig måde.

I tilslutning hertil beskrives to senere fremkomne modeller, hvis udledning er baseret på udvidede forudsætninger om de faktorer, der er bestemmende for et folketals vækst. Herunder omtales indførelsen af stokastiske elementer i en befolkningsmodel og den indvirkning disse udøver på denne.

I. Den logistiske kurves egenskaber.

- a) *Differentialligning, ligning, vendepunkt, asymptote og tangentegenskab.*
- a) Den matematiske funktion, hvis sammenhæng mellem to variable den logistiske kurve beskriver, er udledt i 1838 af den hollandske

^{*)} Civilingeniør, fhv. overingeniør i J. T. A. S., dr. oecon., h. c., Århus.

statistiker *P. F. Verhulst* med det formål at beskrive væksten af en befolkning, som i modsætning til den 40 år tidligere af *Malthus* fremsatte befolkningslov – der var baseret på en teori, som ikke fastsætter nogen grænse for en befolknings vækst – er underkastet en befolkningslov, som forudsætter, at en befolknings vækst ikke kan overskride en vis grænse [1].

Denne lov, som finder sit betegnende udtryk i de kendte gamle ord: at der er sørget for, at træerne ikke vokser ind i himlen, finder sit hertil svarende matematiske udtryk i den ligning, der danner grundlaget for den logistiske kurve, idet dennes differentilligning:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b}{a} y (a - y) \quad (1)$$

fortæller, at tilvæksten i befolkning pr. tidsenhed – foruden af forholdet mellem kurvens to konstanter b og a – afhænger af såvel den opnåede vækst y som af dennes restmuligheder $a - y$, idet a angiver den grænse, befolkningen ikke kan nå op over. I overensstemmelse hermed bliver ifølge (1) den årlige tilvækst i befolkning pr. tidsenhed = 0, når denne grænse er nået.

Af (1) fremgår endvidere, at de to nævnte konstanter indvirker på forskellig måde på tilvæksten i befolkning pr. tidsenhed, idet b udøver en konstant indflydelse på denne, medens a virker hemmende på tilvæksten pr. tidsenhed.

Ved integration af (1), hvorved der tilføres vækstprocessens beskrivelse en arbitrær konstant, fremkommer ligningen for den logistiske kurve, eksponentialfunktionen

$$y = \frac{a}{1 + Ce^{-bt}} \quad (2)$$

eller som den også kan skrives:

$$y = \frac{a}{1 + e^{\log C - bt}}, \quad (3)$$

hvor e er grundtallet for de naturlige logaritmer.

Giver man t yderværdierne $+\infty$ og $-\infty$ ses, at væksten kun kan foregå i det område, der begrænses af de to vandrette linier: $y = 0$ og $y = a$, som derfor danner en henholdsvis lavere og højere asymptote for væksten.

På fig. 1 er vist, hvorledes såvel tilvæksten i befolkning pr. tidsenhed som hele befolkningens vækst afhænger af tiden, samt hvorledes den logistiske kurves vendepunkt og maksimumspunktet for vækstens hastig-

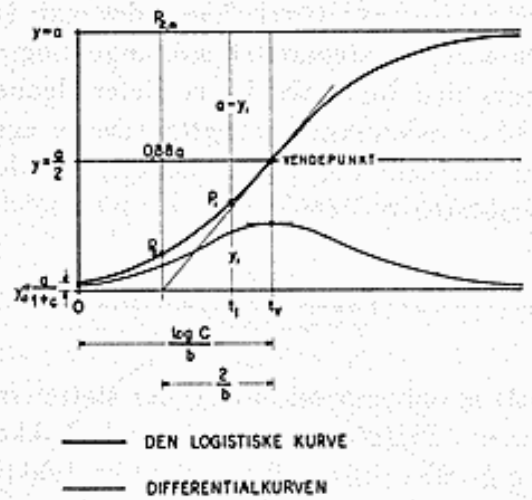


Fig. 1.

hed ligger på den samme lodrette linie, om hvilken den logistiske kurve viser omvendt symmetri. Det ses, at differentialkurven (10 gange forstørret) også har absicseaksen som asymptote.

Den logistiske kurves differentilligning giver endvidere udtryk for en egenskab, som bl. a. har betydning for en orientering om, hvorvidt et skønnet vendepunkt i en grafisk beskrivelse af et iagttagelsesmateriale hører hjemme på den logistiske kurve.

Denne egenskab giver sig udslag i, at det generelle udtryk for subtangenten i et punkt af en kurve, d. v. s. det geometriske udtryk for den reciprokke værdi af den relative vækst pr. tidsenhed:

$$s = y : \frac{dy}{dt}$$

for den logistiske kurve – ifølge (1) – er udtrykt ved:

$$s = \frac{a}{b(a-y)}, \quad (3a)$$

der for vendepunktet, hvor $y = \frac{a}{2}$, simplificeres til:

$$s_v = \frac{2}{b}, \quad (4)$$

som vist på fig. 1.

Det fremgår endvidere af figuren, hvorledes man ved at oprejse ordinaten i endepunktet for vendepunktets subtangent og måle det øverste af de to stykker, som den logistiske kurve deler denne ordinat i , på en nem måde kan blive orienteret om iagttagelserne egner sig til at blive beskrevet af den logistiske kurve, idet længden af det øverste stykke – udtrykt ved asymptoten a – er:

$$P_2 - P_{2,a} = \frac{e^2}{1 + e^2} a \approx 0,88 a.$$

Med det formål at opbygge en model, der støtter sig til den logistiske kurves princip, men i hvilken vækstens hastighed ikke – som i (1) – kun afhænger af a og b , men tillige afhænger af en funktion af tiden, fremkommer – når denne funktion udvikles i en *Taylor's* række – nedestående generelle udtryk for den logistiske kurves ligning:

$$y = \frac{a}{1 + e^{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots + b_n t^n}} \quad (5)$$

som for forskellige værdier af b_0, b, \dots, b_2 o. s. v. kan beskrive kurver med såvel en lavere som en højere asymptote, men også uden den sidstnævnte, og indeholdende fluktuationer i forskelligt antal, således som beskrevet i [2] og [3] af *Raymond Pearl* (omtales nærmere pag. 12 og 13). I (5) svarer b_0 til $\log C$ i (3).

I tilslutning til foranstående skal gøres opmærksom på, at en befolkning, hvis udvikling i et længere åremål har været præget af sådanne fluktuationer, kan beskrives ved modeller, som er formet af den almindelige logistiske kurve (2).

Et eksempel herpå har man i den tendens, en befolkningsudvikling kan fremvise hen imod et maksimum, for – når dette er nået – at vise en tilbagegang, således som dette er typisk for folketallet i en storbykerne.

Forudsættes tidspunktet for dette maksimums fremkomst kendt og at man på grundlag af kendskab til den pågældende bykernes befolkningsmuligheder kan skønne dets folketals laveste grænse, vil en sådan tilbagegang i folketal kunne beskrives ved en logistisk kurve, hvis ligning er:

$$y = d + \frac{a}{1 + C_1 e^{b_1(t-t_m)}}, \quad (5a)$$

således som vist på fig. 2 for periode II, medens væksten i fremgang – i periode I på figuren – beskrives på sædvanlig måde ved (2).

$$y = \frac{a}{1 + Ce^{-bt}}$$

Et folketal i tilbagegang vil også kunne beskrives ved en matema-

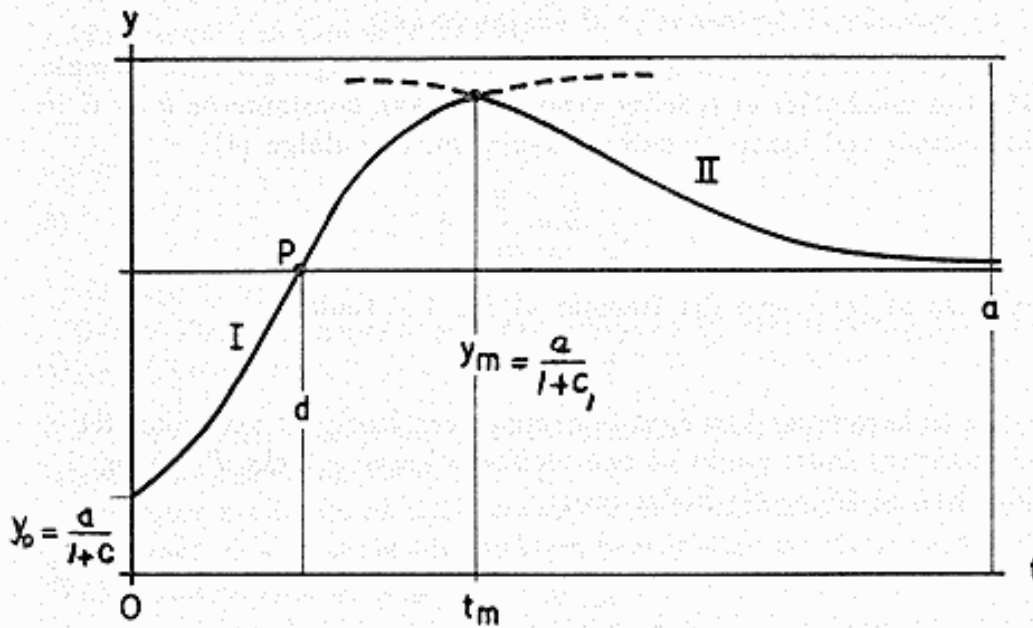


Fig. 2.

tisk model, der i sit forløb fremviser et maksimum og som tilsluttes den eksisterende logistiske kurve eksempelvis i punktet *P* på fig. 2, og som efter at have passeret det nævnte maksimum – i lighed med den logistiske kurve (5a) – med aftagende hastighed nærmer sig sin asymptote.

Den foran beskrevne befolkningsudvikling har været baseret på en betragtning af henholdsvis dennes tilvækst pr. tidsenhed: en kinetisk betragtning som i (1) og en statisk betragtning som i (2), idet denne ligning udtrykker forskellige stadier eller trin i en befolknings historie.

Ønskes en befolkningsudvikling beskrevet udfra en dynamisk betragtning må man kende bevægelsens acceleration, d. v. s. af (1) udlede differentiaalligningen af 2' orden:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{b^2}{a^2} y (a-y) (a-2y),$$

som bekræfter, at accelerationen = 0 for henholdsvis $y = 0$ ($t = -\infty$) og $y = a$ ($t = +\infty$), medens den har sit maksimum for $y = \frac{a}{2}$, således som dette også fremgår af fig. 1.

b) *Metoder til bestemmelse af konstanterne*¹⁾.

1. Såfremt det af en grafisk fremstilling af iagttagelserne fremgår, at disse indeholder et tydeligt vendepunkt, kan konstanterne b og C let bestemmes ved hjælp af dettes subtangent, idet ifølge (4):

$$b = \frac{2}{s_v} \quad (6)$$

og man af (2) – som det fremgår af fig. 1 – finder:

$$\log C = bt_v. \quad (7)$$

De to konstanter kan også bestemmes ved hjælp af vendepunktet og et vilkårligt andet punkt på den logistiske kurve – f. eks. P_1 på fig. 1 – idet man af (2) og (7) finder først:

$$b = \frac{1}{t_v - t_1} - \log \frac{a - y_1}{y_1} \quad (8)$$

og dernæst:

$$\log C = bt_1 - \log \frac{a - y_1}{y_1}. \quad (9)$$

2. En anden metode er baseret på den af *O. Strange Petersen* i [4] påviste egenskab ved den logistiske kurve, at denne – afbildet i et koordinatsystem, der har vendepunktet til begyndelsespunkt – beskriver en simpel transformation af funktionen: den hyperbolske tangens, for hvis forløb der foreligger udførlige tabeller.

Ved kurvens fremstilling i det nævnte koordinatsystem og med subtangenten som enhed på abscisseaksen og den halve asymptoteværdi som enhed på ordinataksen, kan man da hurtigt konstatere, om nogle passende valgte iagttagelser på begge sider af vendepunktet stemmer med tabellens tilsvarende værdier.

¹⁾ De i dette afsnit viste metoder 1–4 er omtalt tidligere i [8] og [9] i forbindelse med en beskrivelse af den logistiske kurves egenskaber.

Såfremt iagttagelserne ikke indeholder vendepunktet, kan følgende to metoder anvendes til at bestemme asymptotens beliggenhed.

3. Den første af disse er – i lighed med de to foran beskrevne – baseret på et logistisk kurvepunkts subtangentegenskab, idet den forudsætter, at man i 2 kurvepunkter med ordinaterne y_1 og y_2 kender længderne s_1 og s_2 af disse punkters subtangenter.

Man finder i så fald først af (3a):

$$a = y_2 + \frac{s_1 (y_2 - y_1)}{s_2 - s_1}, \quad (10)$$

derefter:

$$b = \frac{a}{s_2 (a - y_2)} \quad (11)$$

og til sidst C af (9).

Denne metodes nemhed gør den velegnet til en foreløbig bestemmelse af asymptoten.

4. Den anden metode forudsætter kendskab til 3 ækvidistante punkter på den udjævnede kurve.

Betragtes det første af disse punkter som koordinatsystemets begyndelsespunkt, d. v. s. at de tre punkters koordinater er: $(0, y_1)$, (t_1, y_2) og $(2t_1, y_3)$, findes først af (2):

$$a = \frac{2y_1 y_2 y_3 - y_2^2 (y_1 + y_3)}{y_1 y_3 - y_2^2}, \quad (12)$$

derefter:

$$b = \frac{1}{t_1} \log \frac{y_2 (a - y_1)}{y_1 (a - y_2)} \quad (13)$$

og tilsidst:

$$C = \frac{a - y_1}{y_1} \quad (14)$$

Såfremt det første punkt ikke betragtes som koordinatsystemets begyndelsespunkt, men punktfordelingens ækvidistante forhold er udtrykt ved $t_2 = t_1 + t_0$ og $t_3 = t_1 + 2t_0$, ændres (13) og (14) til:

$$b = \frac{1}{t_0} \log \frac{y_2 (a - y_1)}{y_1 (a - y_2)} \quad (15)$$

og

$$\log C = b t_1 + \log \frac{a - y_1}{y_1} \quad (16)$$

I forbindelse med en på denne måde foretagen tilpasning af den logistiske kurve til et erfaringsmateriale kan gennemføres en yderligere tilpasning ved de mindste kvadraters metode. Til dette formål indføres korrektioner på de 3 konstanter, og kurvens matematiske funktion gives et tilnærmende udtryk, som tillader en bestemmelse af dens konstanter ved den nævnte metode på sædvanlig vis. Skønner man, at de således fundne konstanter kan tiltrænge en yderligere korrektion, kan denne gennemføres ved at indføre nye korrektioner på disse konstanter og gentage beregningerne.

En sådan konstantbestemmelse er beskrevet i [2] i forbindelse med en bestemmelse af folketallet i U. S. A.²⁾.

Usikkerheden ved konstantbestemmelsen.

De foran beskrevne metoder til bestemmelse af asymptotens beliggenhed er behæftet med en vis usikkerhed.

For de to første metoders vedkommende står denne i forbindelse med fikseringen af vendepunktet og indtegningen af tangenten i dette.

Ved den tredje metode står usikkerheden tillige i forbindelse med det rette valg af de to punkter, der benyttes til asymptotens bestemmelse og indtegningen af tangenterne i disse punkter. Ved den sidste metode står usikkerheden også i forbindelse med det rette valg af de 3 punkter på kurven, der skal bestemme asymptotens beliggenhed, og hertil kommer den usikkerhed, der skyldes strukturen af nævneren i (12), idet denne for værdien af y_2 , som nærmer sig $\sqrt{y_1 y_3}$, vil bevirke, at små ændringer i y_2 -værdien kan forårsage store ændringer i asymptotens beliggenhed.

Sammenhængen mellem de værdier af y_1 , y_2 og y_3 , som indvirker på asymptotebestemmelsens følsomhed overfor små ændringer i y_2 -værdien, kan belyses ved i (12) at dividere nævneren ind i tælleren, hvorved der fremkommer:

$$a = y_1 + y_3 + \frac{y_1 y_3 (y_1 + y_3 - 2y_2)}{y_2^2 - y_1 y_3} \quad (17)$$

Som det fremgår af dette udtryk for asymptoten, er dennes afhængighed af de tre y -værdier karakteriseret ved henholdsvis de to yderordinaters sum og produkt samt midterordinaten y_2 .

²⁾ En lignende konstantbestemmelse er vist i [8] i forbindelse med en bestemmelse af folketallet i Århus og omegns centralområde.

Denne afhængighed af y_2 og yderordinaternes sum og produkt, der for visse sammenhænge mellem disses værdier forårsager, at asymptotens bestemmelse præges af en stigende følsomhed overfor små ændringer i y_2 -værdien, er illustreret ved det på fig. 3 viste diagram, i hvilket

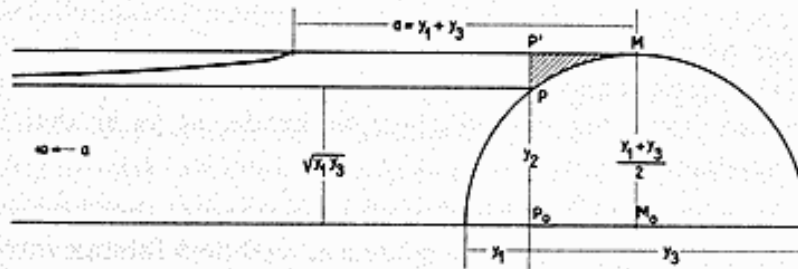


Fig. 3.

Diagram over følsomheden ved bestemmelsen af den logistiske kurves asymptote ifølge:

$$a = y_1 + y_3 + \frac{y_1 y_3 (y_1 + y_3 - 2y_2)}{y_2^2 - y_1 y_3}$$

halvcirkelns skæringspunkt P med ordinaten y_2 afbilder det mellemproportionale forhold mellem denne ordinat og y_1 og y_3 , som fremkalder de kritiske værdier af y_2 , i hvis nærhed asymptotebestemmelserne er præget af den nævnte følsomhed.

Det fremgår af diagrammet, at punktsættet: y_1 , y_2 og y_3 i P_0 er karakteriseret ved et følsomhedsområde, hvis størrelse er bestemt af det segmentformede (skraverede) areal PP_0M , der formindskes, des mere y_2 forhøjes, for helt at forsvinde, når y_2 antager sin højeste værdi: cirkelns

$$\text{radius } M_0M = \frac{y_1 + y_3}{2}.$$

Ved mellem de vandrette linier, der udgår fra de to kritiske punkter P og M på cirklen at indtegne de asymptoteværdier, som findes af (17) ved små ændringer i y_2 -værdien, illustrerer den derved fremkomne kurve, hvorledes asymptoten ved disse ændringer viser en stigende tendens til at blive forhøjet fra sin udgangsværdi:

$$a = y_1 + y_3 \text{ for } y_2 = \frac{y_1 + y_3}{2} \text{ til } a = \infty \text{ for } y_2 = \sqrt{y_1 y_3}.$$

Baggrunden for, at denne asymptotebestemmelse ved hjælp af (17) har kunnet ledsages af den i diagrammet viste følsomhedsorientering, er forudsætningen om, at de 3 til bestemmelsen benyttede punkter har en ækvidistant beliggenhed på kurven. Ligningen:

$$y_2 = \frac{y_1 + y_3}{2}, \text{ som ifølge (17) bevirker, at } a = y_1 + y_3,$$

udtrykker nemlig den lineære sammenhæng mellem de tre y -værdier, som i (17) karakteriserer den logistiske kurves overgang fra progressiv til degressiv vækst og derved giver til kende, at y_2 er den logistiske kurves vendepunkt.

5. Den metode til bestemmelse af konstanterne, som beskrives i det følgende, støtter sig på lignende måde som ved de 3 førstnævnte metoder til et skøn over asymptotens beliggenhed, men afviger fra disse ved, at baggrunden for dette skøn er en anden.

Thi medens dette skøn ved de førnævnte metoder støttede sig til den sammenhæng mellem de variable, som en grafisk beskrivelse af denne fremviste, forudsætter denne metode, at asymptotens beliggenhed skønnes ud fra et indgående kendskab til planlagte foranstaltninger i det pågældende befolkningsområde, som vil øve en afgørende indflydelse på størrelsen af det befolkningsstal, området kan rumme, når disse foranstaltninger er gennemført. Er befolkningsstallets hidtidige vækst beskrevet ved en logistisk kurve, melder der sig derfor enten det spørgsmål, om dennes asymptote giver tilstrækkeligt rum for en videre udvikling, eller – hvis dette skønnes ikke at være tilfældet – at bestemme en logistisk kurve, hvis asymptote lægger et loft af passende højde over befolkningsstallet. Til at beskrive en sådan udvikling er den logistiske kurve velegnet, idet den i ethvert punkt af sit forløb fremviser en ordinat, som forlænget op til asymptoten, deler denne i to stykker, som ved en statisk betragtning – d. v. s. når t sættes lig 0 i den logistiske kurves ligning – forholder sig til hinanden som vækstens fremtidsmuligheder til den opnåede vækst, idet ifølge (1):

$$\frac{a-y}{y} = C \quad (18)$$

Betragtes dette forhold som en speciel enhed for vækst, der ud fra dette punkt er underkastet den logistiske kurves lov, antager den logistiske kurves almindelige ligning formen:

$$\log U = bt - \log C, \quad (19)$$

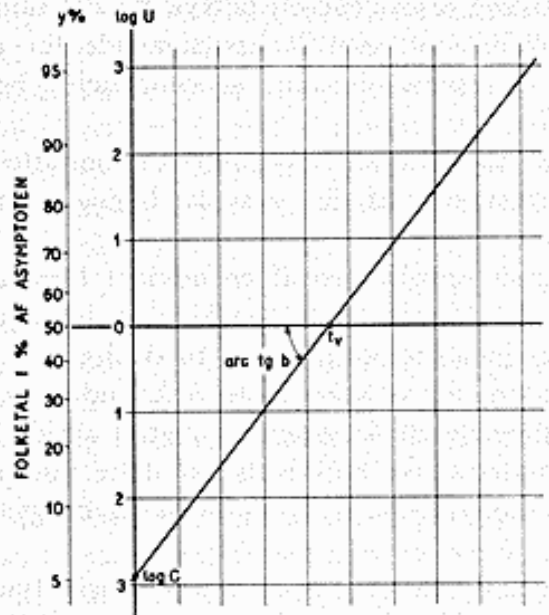
såfremt forholdet $\frac{a-y}{y}$ erstattes af dets reciprokke værdi: $\frac{y}{a-y} = U$.

Beskrivelsen af væksten simplificeres, når $\log C$ erstattes af tidspunktet for vendepunktets forekomst, idet (19) da ændres til:

$$\log U = b(t - t_v) \quad (20)$$

Det er en karakteristisk egenskab ved den logistiske kurves struktur, at medens dens differentialligning udtrykker, at den hastighed, hvorved et befolkningstal ændres pr. tidsenhed, afhænger af produktet af den opnåede vækst og dennes fremtidsmuligheder, udtrykker den logistiske kurves ligning, at befolkningstallet på et givet tidspunkt er bestemt af forholdet mellem disse to størrelser.

I semilogaritmisk afbildning beskriver (19) eller (20) – som fig. 4 viser – en ret linie, der afskærer stykkerne $\log C$ og t_v af henholdsvis ordinataksen og abscisseaksen.



SEMILOGARITMISK FREMSTILLING AF DEN LOGISTISKE KURVE

$$\left. \begin{array}{l} \log U = bt - \log C \\ \text{eller } \log U = b(t - t_v) \end{array} \right\} U = \frac{y}{100 - y}$$

Fig. 4.

Til orientering om forbindelsen mellem de to variable U og y er til venstre for $\log U$ -aksen anbragt en målestok, der angiver de til $\log U$ -værdierne svarende y -værdier udtrykt i procent af asymptoten.

Konstanterne $\log C$ og b kan let bestemmes af (19), og metoden har det fortrin fremfor de tidligere beskrevne metoder, at *alle* iagttagelsesresultaterne kan medvirke til denne bestemmelse.

c) *Anvendelsesområder for den logistiske kurve.*

Den logistiske kurve er anvendt på mangfoldige områder, som har tilknytning til livets udfoldelse under forskellige vilkår.

Som et eksempel herpå skal nævnes de af den amerikanske biolog *Raymond Pearl* i 1928 beskrevne forsøg, der viser, hvorledes levende organismer, der er bundet til at leve i et afgrænset rum, formerer sig efter den logistiske kurves lov [3]³⁾.

Lignende undersøgelser i forbindelse med en videregående matematisk fremstilling af det samspil mellem komponenter eller faktorer af forskellig art, som er bestemmende for såvel biologisk vækst som vækst, der har relation til et samfunds udvikling, er beskrevet af den amerikanske biolog og samfundsforsker *Alfred J. Lotka* i [5]. Heri påvises bl. a., at der ved opstilling af et generelt udtryk for det samspil mellem komponenter af forskellig art, som er bestemmende for en biologisk proces, fremkommer et udtryk, der som specialtilfælde beskriver den logistiske kurves lov.

Senere undersøgelser af biologisk vækst, ligeledes omfattende et større erfaringsområde, er beskrevet af den russiske biolog og matematiker *K. A. Kostitzin* i [6].

I dette skrift betegner opstillingen af en udvidet form af den logistiske funktion, med det formål ud fra en kinetisk betragtning at beskrive det samspil mellem komponenter af forskellig art, som kendetegner en biologisk proces, der er underkastet vekslende vilkår af vækstfremmende og væksthemmende karakter, et vigtigt skridt i retning af at komplettere den matematiske beskrivelse af dette samspil, som den italienske fysiker og matematiker *Vito Volterra* havde gjort de første skridt til i [7].

En anden betydningsfuld anvendelse af den logistiske funktions princip betegner opstillingen af en dynamisk teori om samspillet mellem de forskellige kræfter, der indvirker på en biologisk proces, og udformningen af en bevægelsesligning for denne.

Den almindelige logistiske kurve er sammen med to andre matematiske funktioner, af hvilke den ene var den i (5) beskrevne generelle form af den logistiske kurve, anvendt til at fremstille radiolyttertallets vækst i Danmark fra radioens fremkomst i begyndelsen af 1920'erne til 1950 [8]. Det fremgik heraf, at den almindelige logistiske kurve var bedst egnet til dette formål. I samme artikel er – som nævnt pag. 8 – også beskrevet den logistiske kurves anvendelse til at fremstille folke-

³⁾ Se kapitel II.

tallets vækst i Århus og omegns centralområde. En lignende anvendelse af kurven til fremstilling af folketallet i andre jyske byer og bebyggelser af forskellig størrelse er beskrevet i [9].

Det fremgår af de på denne måde beregnede fremtidige folketal, at disse i flere tilfælde stemmer helt godt med den udvikling, som har fundet sted. For folketallet i Århus og omegns centralområde viser denne udvikling – som det vil fremgå af det følgende afsnit – en særlig god overensstemmelse med den beregnede.

Af særlige forhold, som man for de mindre byers vedkommende blev opmærksom på ved disse forsøg, skal nævnes, at ændringer i lokale forhold kan komme til at øve en større indflydelse på disse byers folketal end lignende forhold i større byer. Dette gælder f. eks. for til- og fraflytning af virksomheder eller institutioner, som beskæftiger et stort personel, eller forbedrede trafikmuligheder til de pågældende byer.

Den logistiske kurve er endvidere anvendt som efterspørgselskurve i en analyse, der havde til formål at klarlægge efterspørgslen af telefoner i Århus og omegns centralområde [10]. I denne analyse blev telefon-efterspørgslen karakteriseret ved henholdsvis efterspørgernes bopæl i distrikter med forskellig befolkningstæthed og erhverv i forbindelse med årlig indkomst.

Den logistiske kurve er i vid udstrækning benyttet til at beregne forskellige landes og byers fremtidige udvikling på grundlag af disses befolkningsstatistik. Beregninger af den art omfattende et stort antal lande af forskellig størrelse er således foretaget af *Raymond Pearl* og er beskrevet i [2].

Forinden den logistiske kurves anvendelse på et aktuelt by-befolkningsproblem belyses, skal fremdrages nogle få træk af dens historie for at vise, at denne kurve indebærer muligheder for også i nutiden at kunne være et nyttigt hjælpemiddel til i befolkningsstatistikken at beskrive de store træk i en befolknings udvikling.

a) *Træk af den logistiske kurves historie i nutidsbelysning.*

I tiden med de mange problemer, som er knyttet til befolkningernes stigende vækst hele verden over, vil et tilbageblik af forannævnte art måske kunne bidrage til at skabe en udvidet baggrund for et skøn om en befolknings fremtidige vækstmuligheder.

Et sådant skøn må naturligvis i første række støtte sig til statistiske undersøgelser af de pågældende befolkningers aldersfordeling, fødsels-hyppighed og dødelighed samt ind- og udvandringsforhold. Parallelt

med disse undersøgelser er det af betydning at foretage konjunkturanalyser, der står i forbindelse med de virkninger, som dels fremkomsten af nye faktorer, dels ændringer i bestående faktorer vil udøve i det samspil af faktorer, der er bestemmende for et folkets vækst.

Af faktorer af den art er der i vor tid med dens mange vigtige indenrigske og udenrigske problemer anledning til at fremhæve ind- og udvandringsforholdene samt sådanne ændringer i et lands erhvervs-muligheder, som kan skabe nye vilkår for produktion og dennes afsætning og derved vil kunne øve indflydelse på en befolknings fordeling indenfor en given sektor. I den forbindelse bør også peges på de mange vigtige byplanlægningsproblemer, som er fremme i tiden.

Men uafhængig af analyser af ovennævnte art bør en prognose – opstillet ved hjælp af en model, om hvilken man har erfaret, at den har kunnet danne baggrund for et skøn om en udvikling, som i mange tilfælde har peget i den rigtige retning – have sin plads i det fremtidsbillede af en befolknings udvikling, som man har dannet sig ved hjælp af de foran omtalte analyser, således som der er gjort opmærksom på dette forhold af *Adolph Jensen* i [11] i en omtale af prognoseproblemet i forbindelse med den logistiske kurve, idet denne slutter med at fremhæve, at jo bedre det lykkes i statistikken at udvikle prognosens teknik til den størst mulige fuldkommenhed desto større udbytte vil man have af: at lytte til tallenes tale.

Som et grundtræk i den logistiske kurves historie indgår dens forbindelse med den model, som har været årsag til dens fremkomst, nemlig den i indledningen nævnte – af den engelske præst og nationaløkonom *Thomas Robert Malthus* i 1798 fremsatte – befolkningslov [12].

Malthus' befolkningslov og den logistiske kurves befolkningslov.

Denne befolkningslov fandt sit første udtryk i den overbefolknings-teori, som *Malthus* fremsatte i 1798 [12], og som gik ud på, at der i naturen finder et misforhold sted mellem menneskenes tendens til at formere sig i stærkere grad, end de formår at fremskaffe de næringsmidler, som naturen stiller til rådighed for dem.

Dette misforhold formulerede *Malthus* i de to velkendte progressioner, som udtrykker, at medens befolkningstallet stræber mod en stadig fordobling efter en geometrisk progression, forøges mængden af næringsmidler i samme tidsintervaller efter en aritmetisk progression.

Træk af den bevægelse, som denne teori vakte hos mange sociologer og statistikere, er fremdraget i [13].

I sin generelle form er den af Malthus angivne sammenhæng mellem folketal og mængden af næringsmidler udtrykt i eksponentialfunktionen:

$$y = y_0 e^{at}, \quad (21)$$

hvor y_0 er befolkningstallet ved en periodes begyndelse, medens a angiver den relative befolkningstilvækst pr. tidsenhed i den periode, i hvilken befolkningstallets vækst tænkes beskrevet. Mængden af de næringsmidler, der i samme periode stilles til befolkningens rådighed, finder sit udtryk i t . I overbefolkningsteorien var forudsat, at y_0 blev fordoblet i løbet af 25 år.

Den nævnte sammenhæng mellem befolkningstilvækst og mængden af næringsmidler udtrykkes mere direkte i den differentiaalligning, der danner grundlaget for (21):

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad (22)$$

idet denne, når t angiver tiden, beskriver en vækst, der er karakteriseret ved, at dens tilvækst pr. tidsenhed øges proportionalt med konstanten a og den opnåede vækst.

Det er betegnende for matematikkens nære forbindelse med befolkningsstatistikken, at den første fremstilling af en befolknings vækst ved en geometrisk række blev foretaget så tidligt som i 1760 af den tids mest kendte matematiker *Euler*.

Det kan vises, at Malthus' model er en speciel form af den logistiske kurve.

Denne egenskab belyses bedst ved hjælp af den logistiske kurves differentiaalligning (1):

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b}{a} y (a - y), \quad (23)$$

eller

$$\frac{dy}{dt} = by \left(1 - \frac{y}{a}\right), \quad (24)$$

som, når asymptoten ligger uendelig højt oppe, d. v. s. $a = \infty$ og følgelig $\frac{y}{a} = 0$, ændres til:

$$\frac{dy}{dt} = by, \quad (25)$$

der er identisk med (22).

Af dette slægtskab med den logistiske kurve fremgår, at denne i sit første forløb, hvor y er lille i forhold til asymptoten, fremviser en vækst, som nærmer sig til Malthus' model.

I semilogaritmisk afbildning fremstiller Malthus' model en ret linie. Denne fremstilling er derfor i lighed med den logistiske kurves funktion velegnet til en bestemmelse af dens to konstanter ved hjælp af en beskrivelse af væksten, i hvilken *alle* iagttagelser indgår.

Da den i (22) angivne proportionale sammenhæng mellem tilvækst pr. tidsenhed og opnået vækst for såvel positive som negative værdier af α udtrykker en sammenhæng mellem to variable, der forekommer indenfor mange erfaringsområder udover de foran nævnte, som har relation til såvel biologiske processer som naturkræfternes praktiske udnyttelse, har den eksponentialfunktion, der fremstiller Malthus' model, fundet en udstrakt anvendelse. Som et eksempel på en teknisk virkning, der udtrykkes ved (22), når α er negativ, kan nævnes den elektriske energis svækkelse og talens tilsvarende dæmpning i en telefonledning.

Også på det økonomiske område anvendes denne funktion i vid udstrækning. Det er således velkendt, hvorledes den her i praksis, for positive værdier af α , benyttes til at forudbestemme væksten af en kapital, der forrentet med en given rentefod forudsættes at henstå urørt i en bank eller sparekasse i et vist åremål.

Til dette formål er det hensigtsmæssigt i stedet for at benytte den af erfaringsresultaterne fundne α -værdi, som i (21) udtrykker en kontinuert rentetilskrivning, at anvende den gængse årlige rentetilskrivning ved en given rentefod r , idet sammenhængen mellem denne og α , jfr. [14], findes af:

$$(1+r) = e^{\alpha} \quad (26)$$

ved opslag i tabellen over e -funktionen, f. eks. i [15].

b) *Iagttagelsesmateriale fra Århus.*

De iagttagelser fra Århus, som behandles i dette afsnit, har relation til folketallets vækst i Storåarhus og Århus kommune i tiden 1770–1960, idet denne vækst vil blive beskrevet ved såvel den logistiske kurve som Malthus' model.

Når disse folketal er valgt til eksempler på de to modeller evne til at fremstille et folketals vækst, er grunden den, at der – som nævnt i det foranstående afsnit – for Storåarhus' vedkommende i 1938 blev foretaget en prognose, der støttede sig til en beskrivelse af folketallets vækst, som havde sit udgangspunkt år 1800, idet der ikke før dette

tidspunkt forelå oplysninger om folketallets vækst i Århus og forstæder, udover at dette ikke havde vist nogen nævneværdig stigende tendens i tiden fra 1600-tallet til 1800-tallet, på hvilket tidspunkt Århus havde et folketal på ca. 4000 indbyggere.

Den prognose, der blev foretaget i 1938, havde til formål at skabe grundlag for et skøn over befolkningstallets fremtidige udvikling i det område, der omfattede Århus og omegns centralområde, idet man med henblik på telefonanlæggenes udbygning var interesseret i, at dette skøn strakte sig 25 år frem i tiden.

Ved at sammenholde de resultater, man ville komme til ved hjælp af den logistiske kurves fremstilling med en af stadsingeniør *A. J. Rambo*ll udarbejdet bebyggelsesplan, kunne man da få et udvidet grundlag for et skøn over, hvorledes det fremtidige behov for telefoner måtte forventes at ville forme sig i kvarterer med forskellig eksisterende eller planlagt bebyggelse i Århus og forstæders centralområde.

Vejledende for bestemmelsen af beliggenheden af den logistiske kurves asymptote var en af stadsingeniøren på statistisk grundlag bestemt folketalskurve, der viste, at folketallet i det nævnte område som slutresultat ville nå op på ca. 240.000 indbyggere og have sit vendepunkt i tiden omkring 1945-50, således som dette fremgår af [16].

Da der nu foreligger fyldige historiske oplysninger om folketallet udbredelse i Storårrhus-området lige fra de første folketællinger i 1769 og til 1960 i såvel det nuværende Storårrhus-område som i de forskellige kommuner dette omfatter, har det haft interesse at søge denne udvikling belyst ved hjælp af en logistisk kurve, hvis konstanter er bestemt af det udvidede statistiske materiale, som nu foreligger.

Til dette formål er benyttet den på fig. 4 viste metode, ifølge hvilken *alle* iagttagelsesresultater kan medvirke til at beskrive et folketals vækst. Man får derfor mulighed for at få karakteriseret folketallets vækst i hele åremålet 1770-1960 ved en opdeling af denne i perioder, som griber ind i hinanden og hvis - af forskellig hastighed præget - vækst stræber op imod den samme asymptote.

1. *Folketallet i Storårrhus.*

I tabel I er i dennes første kolonne opført folketallet i Storårrhus, således som dette fremgår af [17], idet tallene er angivet i enheder på 1000 indbyggere afrundet således, at de kun indeholder een decimal.

Tabel I. Folketal i Storårrhus i enheder à 1000 indbyggere, beskrevet ved den logistiske kurve og Malthus' model.

År	Ifølge statistik	Den logistiske kurve		Malthus' model			
		Beregnet for $a = 310$	Beregnet for $a = 400$	Beregnet			
1770	6,6	Periode A _I {	Periode B _I {	Periode M _I {			
1787	6,9				5,9	6,9	6,9
1801	7,0				6,8	6,9	6,9
1840	11,4				7,0	6,9	6,9
1850	12,5				11,3	11,0	11,1
1860	16,8	Periode B _{II} {	Periode M _{II} {	Periode M _{II} {			
1870	22,3				12,5	12,7	12,4
1880	32,1				16,8	17,4	17,2
1890	41,5				22,6	23,8	23,6
1901	60,4				30,2	32,6	32,1
1911	73,5	Periode B _{III} {	Periode M _{III} {	Periode M _{III} {			
1916	79,8				40,6	44,3	44,3
1921	90,5				46,6	50,3	50,3
1925	97,0				54,1	60,5	60,3
1930	105,4				59,5	74,5	73,6
1935	120,1	Periode A _{II} {	Periode B _{IV} {	Periode M _{IV} {			
1940	131,9				78,7	82,5	81,4
1945	142,4				88,5	93,5	90,0
1950	156,9				96,5	99,0	97,5
1955	168,7				107,0	109,0	107,8
1960	180,8	Periode B _{IV} {	Periode M _{IV} {	Periode M _{IV} {			
1961	183,5				119,0	119,0	119,1
			130,0	131,6			
			141,5	145,5			
			153,0	160,7			
			165,0	177,6			
			178,0	184,9			
			181,0	200,3			

I den tidligere beskrivelse af dette folketal blev asymptoten beregnet til 306.000 indbyggere, og når hertil blev lagt de 4000 indbyggere, som forefandt ved periodens begyndelse, fremkom nedenstående udtryk for folketallet i Århus og omegn:

$$y = 4000 + \frac{306.000}{1 + e^{5,245 + 0,03504 t}} \quad (27)$$

Beregnes ved hjælp heraf folketallet i 1961, finder man for dette 185.000 indbyggere. Et tal som sammenlignet med det i tabel I anførte folketal på samme tidspunkt ifølge [18] på 183.500 indbyggere viser en forskel på kun 1/2 procent.

Foruden at bestemme folketallets vækst med den nævnte asymptote 310.000 er med henblik på at belyse, hvilke ændringer der vil fremkomme i den logistiske kurves beskrivelse af det samme folketal, så-

fremt asymptoten gives en mærkbar forhøjelse, foretaget en bestemmelse af folketallets vækst under forudsætning af, at asymptoten er 400.000 indbyggere.

De grafiske fremstillinger, som er benyttet til det nævnte formål, er for den logistiske kurves vedkommende vist på fig. 5.

Til sammenligning mellem de ved hjælp af de to asymptoter beregnede folketal er til venstre på figuren indtegnet målestokken for disse folketal i enheder à 1000 indbyggere.

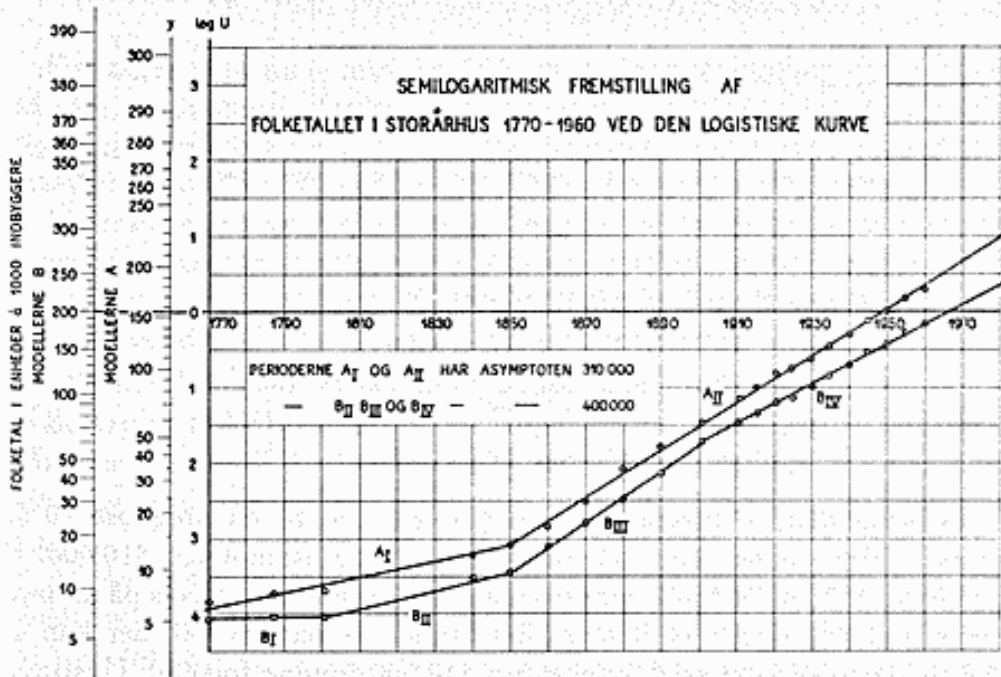


Fig. 5.

Det fremgår heraf, at medens den fremstilling, der belyser væksten, når asymptoten er 310.000, viser en opdeling af denne i kun 2 perioder, opdeles væksten i 4 perioder, når asymptoten er 400.000 indbyggere.

Efter ved hjælp af de grafiske semilogaritmiske fremstillinger at have bestemt konstanterne b og c , fremkommer nedennævnte modeller:

I perioderne A med asymptoten 310.000 indbyggere:

$$A_I \quad 1770-1850: \log U = 0,0096 t - 3,95 \quad (28)$$

$$A_{II} \quad 1850-1960: \log U = 0,0318 t - 3,18 \quad (29)$$

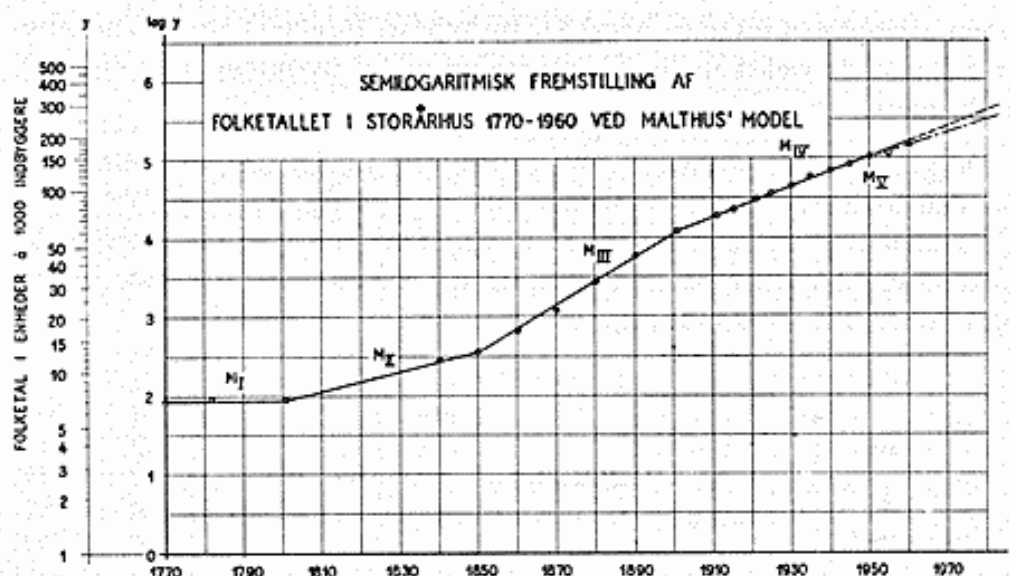


Fig. 6.

og i perioderne B med asymptoten 400.000:

$$B_I \quad 1770-1801: \log U = 4,05 \quad (30)$$

$$B_{II} \quad 1801-1850: \log U = 0,0124 t - 4,05 \quad (31)$$

$$B_{III} \quad 1850-1901: \log U = 0,0336 t - 3,43 \quad (32)$$

$$B_{IV} \quad 1901-1960: \log U = 0,0256 t - 1,73 \quad (33)$$

Benyttes disse i forbindelse med (29) og (33) til en prognose 10 år frem i tiden, finder man, når denne baseres på asymptoten 310.000, et folketal i 1970 på 202.500, medens man, når prognosen baseres på asymptoten 400.000, finder et folketal det samme år på 203.700, der kun er 0,6 % større end det med asymptoten 310.000 fundne folketal. Udstrækkes prognosen til 20 år, finder man med asymptoten 310.000 et folketal i 1980 på 224.000, medens man ved asymptoten 400.000 finder et folketal på 229.200, der er 2,3 % større end det foran nævnte med asymptoten 310.000 fundne folketal.

Beskrives folketallet ved Malthus' modeller, hvis konstanter bestemmes af den på fig. 6 viste semilogaritmiske fremstilling, fremkommer nedenstående modeller for folketallet i de 4 perioder, i hvilke denne beskrivelse opdeler folketallets vækst i hele åremålet 1770-1960:

$$M_I \quad 1770-1801: \log y = 1,95 \quad (34)$$

$$M_{II} \quad 1801-1850: \log y = 1,95 + 0,0117 t \quad (35)$$

$$M_{III} \quad 1850-1901: \log y = 2,53 + 0,0316 t \quad (36)$$

$$M_{IV} \quad 1901-1960: \log y = 4,10 + 0,02 t \quad (37)$$

Beregnes derefter folketallet i de forskellige år ved hjælp af disse ligninger, fremkommer de i den sidste kolonne af tabellen anførte tal.

Man bemærker, at disse tal efter 1950 viser tendens til at stige stærkere end de i tabellens første kolonne angivne folketal, der støtter sig til befolkningsstatistikken.

Søger man ved hjælp af statistikkens folketal for 1950 og 1960 at udlede en Malthus' model, som beskriver denne periodes svagere årlige befolkningstilvækst, således som denne er vist på fig. 6 (den stiplede linie) fremkommer:

$$Mv \text{ 1950-1960: } \log y = 5,056 + 0,0142 t \quad (38)$$

Foretager man nu – med henblik på en sammenligning – ved hjælp af (38) en prognose, finder man i 1970 et indbyggerantal på 208.500, som sammenlignet med det af den logistiske kurve med asymptoten 400.000 fundne indbyggerantal 203.700 afviger 2 % fra dette.

Udstrækkes prognosen til 1980, viser denne en til det øgede åremål svarende afvigelse fra de af den samme logistiske model fundne resultater, idet man finder et folketal på 207.500 indbyggere, som sammenlignet med det af den logistiske kurve med asymptote 400.000 fundne tal afviger 3,6 % fra dette.

Beskrives folketallet aritmetisk, fremkommer de på fig. 7 viste kurver, der illustrerer, hvorledes ændrede vilkår for folketallets vækst fra 1950 og frem i tiden har forårsaget en stærkt øget årlig befolkningsvækst.

Af de punkterede forlængelser af de to anvendte modeller ses således, at uden fremkomsten af de nævnte ændrede vilkår for væksten af folketallet, ville dette beskrevet ved den logistiske kurve i 1960 være blevet forøget til 33.000 indbyggere, medens det beskrevet ved Malthus' model ville være nået op til 45.000 indbyggere.

Forudsættes at folketallet beregnes ved hjælp af den logistiske kurve med dennes højere asymptote, fremkommer et tal, som nærmer sig meget til det foran nævnte ved hjælp af Malthus' model fundne, idet dette i 1960 ville være steget til 44.500 indbyggere.

Århus kommune.

Medens man ved beskrivelsen af folketallets vækst i Storårrhus ved hjælp af den logistiske kurve havde støtte i sit skøn over dettes fremtidige vækst i dennes tidligere bestemte asymptote, er en sådan bestemmelse ikke foretaget for Århus kommune.

På grund af de store indlemmelser i Århus kommune fra nabokommunerne, som har fundet sted i den seneste tid, og hvorved Århus kommunes areal er blevet fordoblet, vil der ikke være den rette baggrund for et skøn over folketallets fremtidige vækst, som kan benyttes til en bestemmelse af asymptoten for denne kommune, før der foreligger resultater af den langtidsplanlægning af bebyggelsen i hele Storårrhusområdet, som er under udarbejdelse.

Aritmetisk fremstilling af folketallet i Storårrhus ved den logistiske kurve.

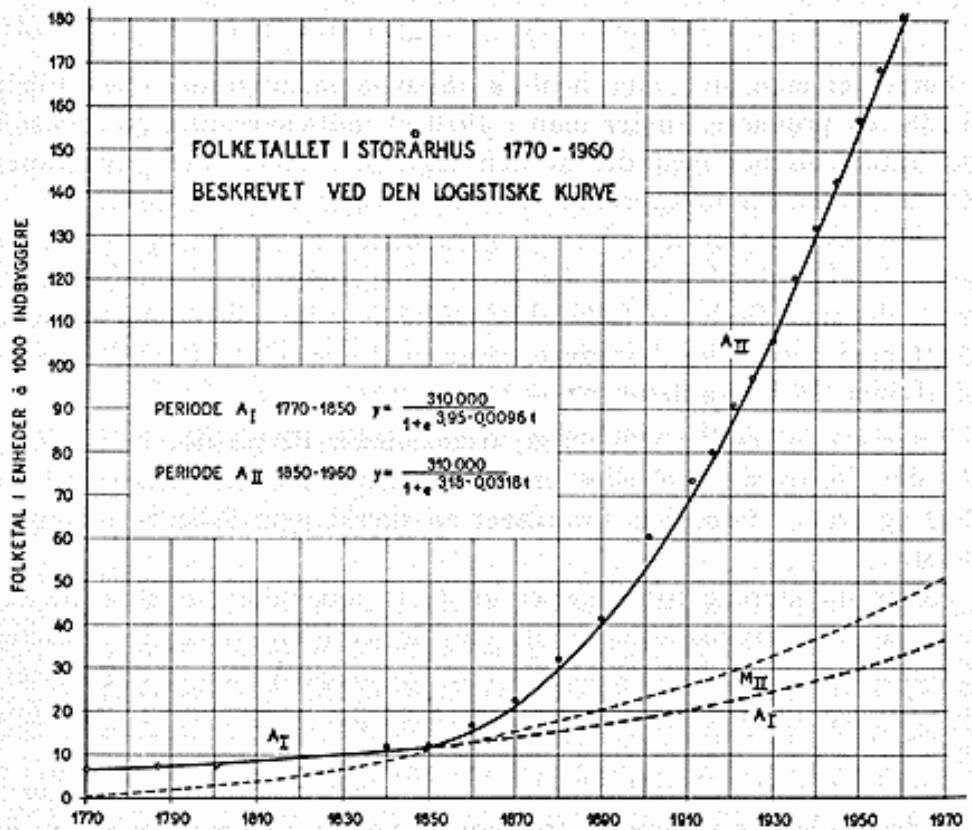
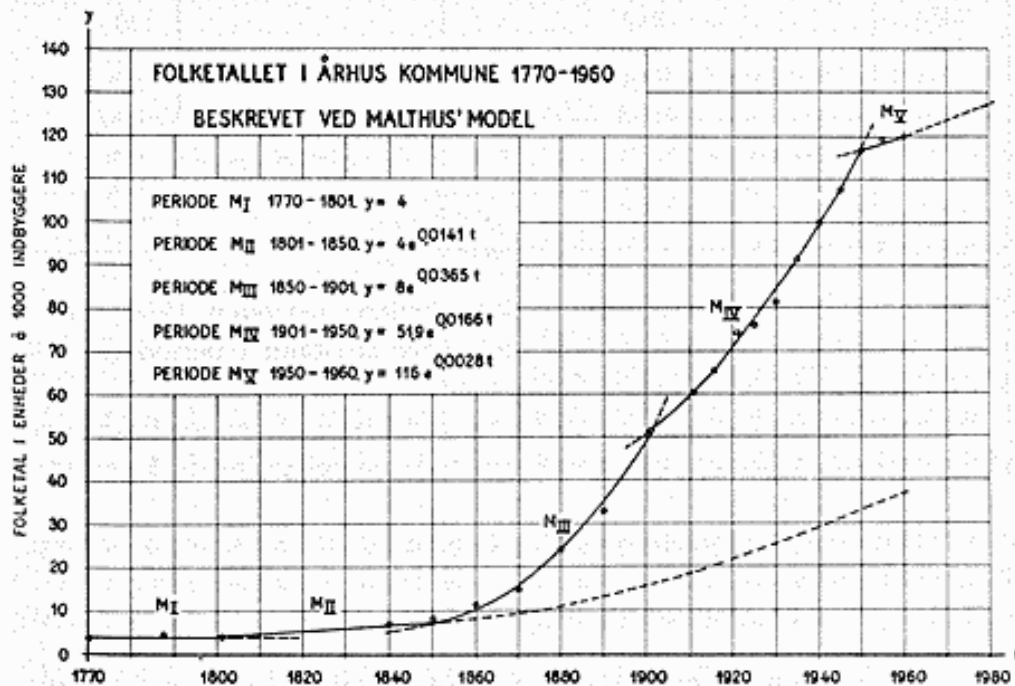
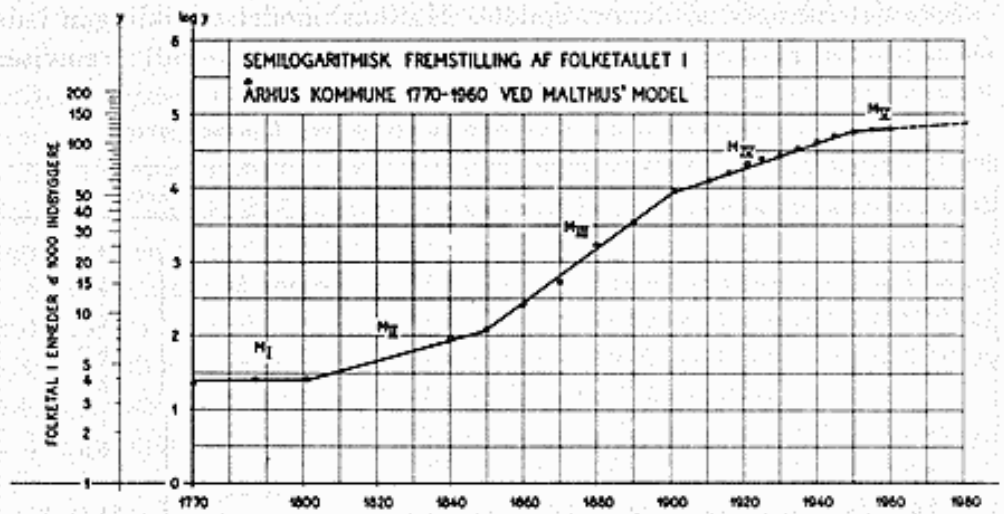


Fig. 7.

For dog at få en forestilling om, hvorledes den hittidige udvikling af folketallet i Århus kommune har formet sig, er der ved hjælp af de foran omtalte statistiske oplysninger om folketallets vækst i hele Storårrhus-området og [17] givet en fremstilling af folketallets vækst specielt i Århus kommunes område, idet der hertil er benyttet en Malthus' model, således som vist på fig. 8, jfr. omstående tabel II.



Som det fremgår af denne, opdeler Malthus' model udviklingen i de forløbne 190 år i 5 perioder, af hvilke perioden 1850–1901 fremviser

Tabel II. Folketal i Århus kommune beskrevet ved Malthus' model.

År	Ifølge statistik	Beregnet folketal	
1770	3,8	Periode M _I { 4,0	
1787	4,1		4,0
1801	4,1		4,0
1840	7,1	Periode M _{II} { 6,9	
1850	7,9		8,0
1860	11,1		11,5
1870	15,0	Periode M _{III} { 16,6	
1880	24,8		23,8
1890	33,3		34,5
1901	51,8		51,9
1911	61,8		61,0
1916	65,8	Periode M _{IV} { 66,7	
1921	74,3		73,0
1925	76,2		77,4
1930	81,3		84,0
1935	91,4		91,0
1940	99,9	Periode M _V { 99,5	
1945	107,4		107,4
1950	116,2		116,0
1955	118,9		118,0
1960	119,4	119,0	
1961	119,8	120,0	

den største årlige befolkningstilvækst, medens perioden 1950–1960 – når man ser bort fra folketallets stationære stilstand i perioden 1770–1801 – fremviser den svageste årlige tilvækst.

Bestemmes konstanterne i modellerne ved hjælp af den grafiske fremstilling på fig. 8, fremkommer nedenstående modeller for de 5 perioder:

$$M_I \text{ 1770–1801: } \log y = 1,39 \quad (39)$$

$$M_{II} \text{ 1801–1850: } \log y = 1,39 + 0,0141 t \quad (40)$$

$$M_{III} \text{ 1850–1901: } \log y = 2,08 + 0,0365 t \quad (41)$$

$$M_{IV} \text{ 1901–1950: } \log y = 3,95 + 0,0166 t \quad (42)$$

$$M_V \text{ 1950–1960: } \log y = 4,755 + 0,0028 t \quad (43)$$

Ved hjælp af disse ligninger er derefter for de i tabellens første kolonne angivne år beregnet de folketal i Århus kommune, som er anført i tabellens sidste kolonne, og hvis tilsvarende folketal ifølge statistikken fremgår af tabellens anden kolonne.

Til yderligere orientering om den nævnte opdeling i perioder er på fig. 9 vist en aritmetisk beskrivelse af disse ved hjælp af kurver, hvis ligninger er anført på figuren.

Som det ses, giver denne en tydelig illustration af såvel de 5 perioders indgriben i hinanden som af den svage årlige befolkningstilvækst i den sidste 10-års periode, der – som nævnt i det foregående – også gav et vægtigt bidrag til at forøge folketallets vækst i Storårrhus.

Forudsættes at man i lighed med den tilsvarende fremstilling for Storårrhus beskriver det videre forløb af folketallets vækst udover 1850 ses, at Århus kommune under uændrede vilkår for folketallets vækst i 1960 ville have haft et folketal på 38.000 indbyggere.

I tabel III er vist en oversigt, der oplyser, hvorledes folketallets procentvise årlige tilvækst har været underkastet variationer i Århus kommunes og Storårrhus-områdets forskellige vækstperioder i åremålet 1770–1960.

Tabel III. Folketallets procentvise vækst i Århus kommune og Storårrhus.

Århus kommune				Storårrhus			
Periode	α	$l+r$	Procentvis årlig vækst	Periode	α	$i+r$	Procentvis årlig vækst
1770–1801	1	1	0	1770–1801	1	1	0
1801–1850	0,0141	1,0141	1,4	1801–1850	0,0117	1,0118	1,2
1850–1901	0,0365	1,0372	3,7	1850–1901	0,0316	1,032	3,2
1901–1950	0,0166	1,0167	1,7	1901–1950	0,02	1,02	2,0
1950–1960	0,0028	1,0028	0,3	1950–1960	0,0142	1,014	1,4

Det fremgår heraf, at folketallet i Århus kommune i perioderne indtil 1901 viser en noget større årlig tilvækst end i Storårrhus, hvorimod det i perioden 1901–1950 viser en noget mindre årlig tilvækst, for derefter i perioden 1950–1960 at vise en betydelig mindre årlig tilvækst i folketal end Storårrhus.

I forbindelse med disse på historisk baggrund fremdragne træk af virkningen af de vekslende vilkår, der har været bestemmende for folketallets vækst i Storårrhus-området, kan det have interesse også at

søge belyst, hvorledes folketallets vækst ville have formet sig, såfremt den i hele åremålet 1770–1960 størst forekommende årlige tilvækst, nemlig den der fandt sted i perioden 1850–1901 i Århus kommunes område, var fortsat til 1960.

Af (45) finder man, at dette folketal ville være kommet op på 433.000 indbyggere, et tal, som sammenlignet med folketallet i hovedstaden København (København, Frederiksberg og Gentofte) det samme år, udgør ca. halvdelen af dette.

Slutning.

Det foran beskrevne tilbageblik på den logistiske kurves og Malthus' models anvendelse til at beskrive væksten af befolkningen, som har relation til forskellige erfaringsområder, viser at disse modeller, når det drejer sig om en større bys folketal, supplerer hinanden på en praktisk måde m. h. t. at danne baggrund for et skøn over den retning, hvori et befolkningstals fremtidige vækst sandsynligvis vil bevæge sig indenfor de af de to nævnte modeller angivne rammer.

I den forbindelse er der – blandt de bestræbelser, der er udvist med henblik på at klarlægge samspillet mellem de faktorer, som bestemmer en befolknings vækst – anledning til at pege på det skridt, der er gjort i den retning af *Trygve Haavelmo* ved indførelsen af 3 generalisationer af den logistiske kurves lov. Til dette formål er i den logistiske kurves differentialligning på forskellig måde udtrykt forbindelsen mellem et befolkningstals vækst og størrelsen af det pågældende samfunds produktion, akkumulerede kapital og befolknings uddannelsesniveau. I tilslutning hertil peges på betydningen af at indføre stokastiske elementer i de modeller, der belyser samfundsproblemerne, med det formål at gøre disse mere fleksible i deres beskrivelse af samspillet mellem de faktorer, der indvirker på de pågældende processer.

Et andet skridt til udvikling af en befolkningsprognoses teknik er gjort af *Arne Jensen* i [21] ved i forbindelse med indførelsen af dynamiske stokastiske elementer i befolkningsstatistikken at skelne mellem »den klassiske eller *Lotkas* befolkningsmodel« og »den moderne befolkningsmodel«, der er udviklet med udgangspunkt i de stokastiske processers teori.

I forbindelse hermed vises, at de resultater vedrørende et folketal, som man kommer til ved at benytte den logistiske kurve og Malthus' model, der repræsenterer den klassiske model, kan opfattes som specialtilfælde af den moderne befolkningsmodels beskrivelse af disse befolkningstals middelværdier.

Litteratur, som der er henvist til i teksten.

- [1] *P. F. Verhulst*: Notice sur la loi, que population suit dans son accroissement, Bruxelles 1838.
 - : Recherches mathématique sur la loi d'ariossment de la population, Mem. de l'Academie roy. de Bruxelles T. XVIII, 1844.
 - : Deuxieme Memoire sur la loi d'accroissement de la Population, ibid. T. XX, 1846
- [2] *Raymond Pearl*: Studies in Human Biology, Baltimore 1927, pag. 572-635.
- [3] - : The Biology of Population Growth, New York 1928, pag. 25-44.
- [4] *O. Strange Petersen*: Note om den logistiske kurve, Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi 1943, pag. 31.
- [5] *Alfred J. Lotka*: Elements of the Mathematical Biology (tidligere publiceret under titlen: Elements of the Physical Biology, Baltimore 1935), Dover Publications Inc., New York 1956, pag. 58-66.
- [6] *K. A. Kostitzin*: Biologi Mathematique, Libraire Armand Colin, Paris 1937, chapitre V et VI.
- [7] *V. Volterra*: Leçons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, [Gauthier Villars, Paris 1931].
V. Volterra et d'Ancona: Les associations biologiques aux point de vue mathematique (Paris, Hermann 1935).
- [8] *H. C. Plessing*: Træk af Telefonens Udvikling, Nordisk Tidsskrift for teknisk Økonomi 1942, pag. 95-96 og 119.
- [9] - : Abonnement- og Samtalefordeling, samme tidsskrift 1946, pag. 7.
- [10] *Th. Herborg Nielsen*: Om Undersøgelser af Telefonesterspørgsel, festskrift til professor, dr. polit. Jørgen Pedersen, Aarhus 1951, pag. 81.
- [11] *Adolph Jensen*: Tallenes Tale, Poul Branners Forlag 1941, pag. 241-250.
- [12] *J. R. Malthus*: Essay on the Population Growth, 1798.
- [13] *Adolph Jensen*: Befolkningsspørgsmålet i Danmark, Poul Branners Forlag 1937.
- [14] *E. Schneider*: Investering og Rente, København 1944, pag. 142.
- [15] *Karl Rottmann*: Mathematische Funktionstafeln, Hochschultaschbücher, 1959.
- [16] *A. J. Rambøll*: Aarhus bys tekniske udvikling, særtryk af »Ingeniøren« nr. 43, 1941, pag. 7.
- [17] Statistisk Årbog for Århus 1961, pag. 1.
- [18] Statistisk Kvartalsskrift: »Befolkningens bevægelser i Storårrhus«, Århus kommunes statistiske kontor, oktober 1961.
- [19] Statistisk Kvartalsskrift: »Indlemmelser i Århus«, Århus kommunes statistiske kontor, juli 1961.
- [20] *Trygve Haavelmo*: A Study in the Theory of Economic Evolution, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1954, pag. 25-44 og 64 f.f.
- [21] *Arne Jensen*: Befolkningsstatistik. En statistisk bevægelseslære, København 1960, pag. 60-78.

Anden litteratur om den logistiske kurve og Malthus' model:

- J. Tinbergen*: »Økonometri«, Ejnar Munksgaard 1948, pag. 75 og 180.
- Paul Anthon Samuelson*: »Foundations of Economic Analysis«, Cambridge. Harvard University Press 1948, pag. 291 f. f.
- Raymond Pearl and Lowell J. Reed*: »Predicted Growth of Population of New York and its Environs«, New York 1923.
- Wilhelm Winkler*: »Grundfragen der Økonometrie«, Wien. Springer-Verlag 1951, pag. 152-174.