Et eksempel til belysning af begrebet statistisk ligevægt

Af SVEND FREDENS*)

1. Formålet med nærværende artikel er at yde et beskedent bidrag til belysning af begrebet statistisk ligevægt i tilknytning til en stærkt forenklet kømodel. Med dette formål for øje betragter vi i det følgende et „system“, som opsøges af „kunder“, der ønsker at blive „ekspederet“ i systemet. Systemet har følgende egenskaber (se fig. 1):

1) Der er 1 ekspedient i systemet. Ekspedienten kan kun ekspedere 1 kunde ad gangen, og hver kunde skal kun ekspederes 1 gang af ekspedienten. Færdigekspederede kunder forlader systemet, så snart ekspeditionen er afsluttet.

2) Kunder, som ved ankomsten til systemet finder ekspedienten ledig, henvender sig straks til denne for at blive ekspederet.

I systemet er der plads til 1 ventende kunde (den maksimale kølængde er 1). Kunder, som ved ankomsten til systemet finder ekspedienten optaget (med ekspedition af en kunde), tager opstilling i „køen“, hvis der er plads i denne på ankomsttidspunktet, og forbliver i køen, indtil ekspeditionen kan finde sted. Så snart ekspeditionen af den i systemet værende kunde er afsluttet, rykker kunden i køen frem og bliver ekspederet.

Kunder, som ved ankomsten til systemet finder begge pladser i systemet (ekspeditionspladsen og ventepladsen i køen) optaget, afvises, d. v. s. forlader straks systemet uden at blive ekspederet.

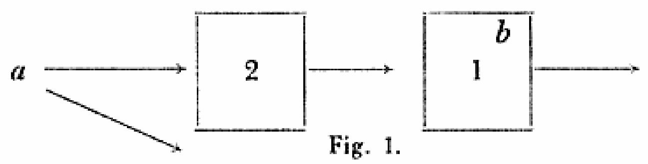


Fig. 1.

*) Professor ved Aarhus Universitet.

Et eksempel til belysning af begrebet statistisk ligevægt

Af Svend Fredens*)

1. Formålet med nærværende artikel er at yde et beskedent bidrag til belysning af begrebet statistisk ligevægt i tilknytning til en stærkt forenklet kømodel. Med dette formål for øje betragter vi i det følgende et „system“, som opsøges af „kunder“, der ønsker at blive „ekspederet“ i systemet. Systemet har følgende egenskaber (se fig. 1):

1) Der er 1 ekspedient i systemet. Ekspedienten kan kun ekspedere 1 kunde ad gangen, og hver kunde skal kun ekspederes 1 gang af ekspedienten. Færdigekspederede kunder forlader systemet, så snart ekspeditionen er afsluttet.

2) Kunder, som ved ankomsten til systemet finder ekspedienten ledig, henvender sig straks til denne for at blive ekspederet.

I systemet er der plads til 1 ventende kunde (den maksimale kølængde er 1). Kunder, som ved ankomsten til systemet finder ekspedienten optaget (med ekspedition af en kunde), tager opstilling i „køen“, hvis der er plads i denne på ankomsttidspunktet, og forbliver i køen, indtil ekspeditionen kan finde sted. Så snart ekspeditionen af den i systemet værende kunde er afsluttet, rykker kunden i køen frem og bliver ekspederet.

Kunder, som ved ankomsten til systemet finder begge pladser i systemet (ekspeditionspladsen og ventepladsen i køen) optaget, afvises, d. v. s. forlader straks systemet uden at blive ekspederet.

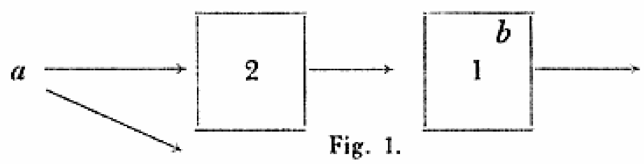


Fig. 1.

*) Professor ved Aarhus Universitet.

3) Ekspeditionstiden pr. kunde er eksponentielt fordelt, idet sandsynligheden for, at en ekspedition, der er i gang (herunder specielt netop påbegyndt) på et vilkårligt tidspunkt T, afsluttes i løbet af de følgende h tidsenheder, er $bh + o(h)$, hvor b er en positiv konstant. Sandsynligheden for, at en igangværende ekspedition ikke afsluttes i løbet af de følgende h tidsenheder, er følgelig $1 - bh - o(h)$. Middelekspeditionstiden pr. kunde er $1/b$ tidsenheder.

Kundeankomsterne til systemet er tilfældigt fordelt i tiden (poissonfordelt), idet (a) sandsynligheden for, at der indtræffer netop 1 kundeankomst til systemet i løbet af et vilkårligt tidsinterval $(T, T + h)$ af længden h tidsenheder, er $ah + o(h)$, hvor a er en positiv konstant, og (b) sandsynligheden for, at der indtræffer mere end 1 kundeankomst til systemet i løbet af et vilkårligt tidsinterval $(T, T + h)$ af længden h tidsenheder, er $o(h)$. Sandsynligheden for 0 kundeankomster i intervallet $(T, T + h)$ er følgelig $1 - ah - o(h)$. Det gennemsnitlige antal kundeankomster pr. tidsenhed til systemet er a.

Trafiktilbudet til systemet (defineret som det gennemsnitlige antal kundeankomster pr. middelekspeditionsperiode) er $A = a/b$ erlang.[1])

2. Systemet siges at befinde sig i tilstanden n i et givet tidspunkt t, når der i dette tidspunkt er n kunder i systemet. I nærværende eksempel må systemet i ethvert tidspunkt enten befinde sig i tilstanden 0 (ingen kunder i systemet, ekspedienten ledig, ingen ventende kunde i køen) eller i tilstanden 1 (1 kunde i systemet, ekspedienten optaget, ingen ventende kunde i køen) eller i tilstanden 2 (2 kunder i systemet, ekspedienten optaget, 1 ventende kunde i køen).

Sandsynligheden for, at systemet befinder sig i tilstanden 0, 1 resp. 2 i tidspunktet t betegnes i det følgende med henholdsvis $P_0(t)$, $P_1(t)$ og $P_2(t)$. Idet h er et positivt tal, har man da ifølge sandsynlighedsregningens „enten-eller" og „både-og" regel

$$P_0(t+h) = P_0(t)\,(1-ah-o(h)) + P_1(t)\,(bh+o(h))\,(1-ah-o(h)) + o(h)$$

$$P_1(t+h) = P_1(t)\,(1-bh-o(h))\,(1-ah-o(h)) + P_0(t)\,(ah+o(h)) + P_2(t)\,(bh+o(h)) + o(h)$$

$$P_2(t+h) = P_2(t)\,(1-bh-o(h)) + P_1(t)\,(1-bh-o(h))\,(ah+o(h)) + o(h),$$

hvoraf ved omordning af leddene og division med h på begge sider af lighedstegnet

[1]) Det ovenfor beskrevne system er et specialtilfælde af den i artiklen „En kømodel" (Erhvervsøkonomisk Tidsskrift 1960, s. 161 ff.) behandlede model (idet $M = 1$ og $N - M = 1$).

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}+aP_0(t)-bP_1(t)=\frac{o(h)}{h}$$

$$\frac{P_1(t+h)-P_1(t)}{h}+(a+b)P_1(t)-aP_0(t)-bP_2(t)=\frac{o(h)}{h}$$

$$\frac{P_2(t+h)-P_2(t)}{h}+bP_2(t)-aP_1(t)=\frac{o(h)}{h}$$

Foretages dernæst grænseovergangen $h\to 0^+$, fås heraf følgende system af sammenhørende differentialligninger

$$\begin{aligned} &P_0'(t)+aP_0(t)-bP_1(t)=0\\ &P_1'(t)+(a+b)P_1(t)-aP_0(t)-bP_2(t)=0\\ &P_2'(t)+bP_2(t)-aP_1(t)=0 \end{aligned} \tag{1}$$

til bestemmelse af tilstandssandsynlighederne $P_0(t)$, $P_1(t)$ og $P_2(t)$. Det gælder altså nu om at løse ligningssystemet (1) m. h. t. $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$. Det kan vises, at den fuldstændige løsning til (1) er givet ved

$$P_0(t)=\frac{1}{1+A+A^2}+C_1e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}+C_2e^{-b(1+A+\sqrt{A})t} \tag{2}$$

$$P_1(t)=\frac{A}{1+A+A^2}-(1-\sqrt{A})C_1e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}-(1+\sqrt{A})C_2e^{-b(1+A+\sqrt{A})t} \tag{3}$$

$$P_2(t)=\frac{A^2}{1+A+A^2}-\sqrt{A}C_1e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}+\sqrt{A}C_2e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}, \tag{4}$$

hvor C_1 og C_2 er integrationskonstanter, der kan bestemmes ved følgende betragtning:

a) Lad os antage, at systemet påbegynder sin virksomhed i tidspunktet $t=0$ og at systemet i dette tidspunkt befinder sig i tilstanden 0, således at $P_0(0)=1$ og $P_1(0)=P_2(0)=0$. Af (2) og (4) fås da

$$P_0(0)=\frac{1}{1+A+A^2}+C_1+C_2=1$$

$$P_2(0)=\frac{A^2}{1+A+A^2}-\sqrt{A}C_1+\sqrt{A}C_2=0,$$

hvoraf ved løsning m. h. t. C_1 og C_2

$$C_1=\frac{1}{2}\,\frac{A+A^2+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}$$

$$C_2=\frac{1}{2}\,\frac{A+A^2-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}$$

Lad nu $P_{n0}(t)$ betegne sandsynligheden for, at systemet befinder sig i tilstanden n (hvor $n=0$, 1 eller 2) i tidspunktet $t\geqq 0$ under forudsætning af, at systemets initialtilstand (d. v. s. tilstanden i $t=0$) er 0. Ved at indsætte ovenstående udtryk for C_1 og C_2 i (2), (3) og (4) finder man da

$$P_{00}(t)=\frac{1}{1+A+A^2}+\frac{1}{2}\,\frac{A+A^2+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}+\frac{1}{2}\,\frac{A+A^2-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{10}(t)=\frac{A}{1+A+A^2}-\frac{1-\sqrt{A}}{2}\,\frac{A+A^2+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}-\frac{1+\sqrt{A}}{2}\,\frac{A+A^2-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{20}(t)=\frac{A^2}{1+A+A^2}-\frac{\sqrt{A}}{2}\,\frac{A+A^2+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}+\frac{\sqrt{A}}{2}\,\frac{A+A^2-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

Af disse udtryk fremgår det *dels* at sandsynlighederne $P_{00}(t)$, $P_{10}(t)$ og $P_{20}(t)$ for at systemet befinder sig i en af de mulige tilstande 0, 1 eller 2 i et givet tidspunkt t, er en *funktion af t*, d. v. s. afhænger af den tid, der er forløbet siden systemet påbegyndte sin virksomhed, og *dels* at de nævnte tilstandssandsynligheder for $t\to\infty$ går imod hver sin *af t uafhængige grænseværdi*, nemlig henholdsvis $1/(1+A+A^2)$, $A/(1+A+A^2)$ og $A^2/(1+A+A^2)$, idet eksponenterne $-b(1+A-\sqrt{A})t$ og $-b(1+A+\sqrt{A})t$ går imod $-\infty$ for $t\to\infty$.

b) Hvis systemets initialtilstand er 1 (d. v. s. $P_1(0)=1$ og $P_0(0)=P_2(0)=0$), finder man med at indsætte $t=0$ i (2) og (4) og løse det hedved fremkommende ligningssystem m. h. t. C_1 og C_2

$$C_1=-\frac{1}{2}\,\frac{1-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}$$

$$C_2=-\frac{1}{2}\,\frac{1+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}$$

$$P_{00}(t)=\frac{1}{1+A+A^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{A+A^2+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}+\frac{1}{2}\,\frac{A+A^2-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{01}(t)=\frac{1}{1+A+A^2}-\frac{1}{2}\,\frac{1-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}-\frac{1}{2}\,\frac{1+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{02}(t)=\frac{1}{1+A+A^2}-\frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{1+A+\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}+\frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{1+A-\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{10}(t)=\frac{A}{1+A+A^2}-\frac{1-\sqrt{A}}{2}\,\frac{A+A^2+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}-\frac{1+\sqrt{A}}{2}\,\frac{A+A^2-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{11}(t)=\frac{A}{1+A+A^2}+\frac{1-\sqrt{A}}{2}\,\frac{1-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}+\frac{1+\sqrt{A}}{2}\,\frac{1+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{12}(t)=\frac{A}{1+A+A^2}+\frac{1-\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\,\frac{1+A+\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}-\frac{1+\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\,\frac{1+A-\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{20}(t)=\frac{A^2}{1+A+A^2}-\frac{\sqrt{A}}{2}\,\frac{A+A^2+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}+\frac{\sqrt{A}}{2}\,\frac{A+A^2-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{21}(t)=\frac{A^2}{1+A+A^2}+\frac{\sqrt{A}}{2}\,\frac{1-A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}-\frac{\sqrt{A}}{2}\,\frac{1+A\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

$$P_{22}(t)=\frac{A^2}{1+A+A^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1+A+\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A-\sqrt{A})t}+\frac{1}{2}\,\frac{1+A-\sqrt{A}}{1+A+A^2}\,e^{-b(1+A+\sqrt{A})t}$$

Tabel 1.

Sandsynlighederne $P_{01}(t)$, $P_{11}(t)$ og $P_{21}(t)$ for at systemet befinder sig i tilstanden 0, 1 resp. 2 i tidspunkt $t \geqq 0$ under forudsætning af, at systemets initialtilstand er 1, kan da bestemmes ved at indsætte de ovenfor fundne udtryk for C_1 og C_2 i (2), (3) og (4) (jfr. oversigten i tabel 1). Også i dette tilfælde finder man, at tilstandssandsynlighederne afhænger af t og at de for $t \to \infty$ hver for sig går imod de samme af t uafhængige grænseværdier, $1/(1+A+A^2)$, $A/(1+A+A^2)$ resp. $A^2/(1+A+A^2)$, som i tilfælde (a).

c) Hvis systemets initialtilstand er 2 (d. v. s. $P_2(0)=1$ og $P_0(0)= P_1(0)=0$), finder man på tilsvarende måde som ovenfor

$$C_1 = -\frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{1+A+\sqrt{A}}{1+A+A^2}$$

$$C_2 = \frac{1}{2\sqrt{A}}\,\frac{1+A-\sqrt{A}}{1+A+A^2},$$

hvorefter sandsynlighederne $P_{02}(t)$, $P_{12}(t)$ og $P_{22}(t)$ for at systemet befinder sig i tilstanden 0, 1 resp. 2 i tidspunktet $t \geqq 0$ under forudsætning af, at systemets initialtilstand er 2, kan bestemmes ved at indsætte de fundne udtryk for C_1 og C_2 i (2), (3) og (4) (jfr. tabel 1). Også i dette tilfælde finder man, at tilstandssandsynlighederne afhænger af t og at de for $t \to \infty$ hver for sig går imod de samme af t uafhængige grænseværdier som i tilfældene (a) og (b).

3. Sammenholder man nu funktionssættene $[P_{00}(t),\ P_{01}(t),\ P_{02}(t)]$, $[P_{10}(t),\ P_{11}(t),\ P_{12}(t)]$ resp. $[P_{20}(t),\ P_{21}(t),\ P_{22}(t)]$ i tabel 1, kan man umiddelbart aflæse følgende:

a) Sandsynligheden $P_{nj}(t)$ for, at systemet befinder sig i en given tilstand n (hvor $n = 0$, 1 eller 2) i et givet tidspunkt t $(0 \leqq t < \infty)$, afhænger dels af systemets *initialtilstand* j (hvor $j = 0,1$ eller 2), og dels af den *tid*, der er forløbet siden systemet påbegyndte sin virksomhed.

b) For $t \to \infty$ går de til enhver mulig tilstand n svarende tilstandssandsynligheder $P_{nj}(t)$ imod samme *af systemets initialtilstand j og tiden t uafhængige grænseværdi P_n:*

$$(5)\quad \lim_{t\to\infty} P_{00}(t) = \lim_{t\to\infty} P_{01}(t) = \lim_{t\to\infty} P_{02}(t) = 1/(1+A+A^2) = P_0$$

$$(6)\quad \lim_{t\to\infty} P_{10}(t) = \lim_{t\to\infty} P_{11}(t) = \lim_{t\to\infty} P_{12}(t) = A/(1+A+A^2) = P_1$$

$$(7)\quad \lim_{t\to\infty} P_{20}(t) = \lim_{t\to\infty} P_{21}(t) = \lim_{t\to\infty} P_{22}(t) = A^2/(1+A+A^2) = P_2$$

Når tilstandssandsynlighederne P_{nj} således er uafhængige *både* af systemets initialtilstand j *og* af tiden t, siges systemet at befinde sig i *statistisk ligevægt.* Et system, der har den egenskab, at det *kan* komme i statistisk ligevægt (d. v. s. at $\lim_{t\to\infty} P_{nj}(t) = P_n$ for alle i betragtning kommende værdier af n og j), kaldes et *ergodisk* system.

Ifølge (5), (6) og (7) vil den statistiske ligevægt først indtræde for $t \to \infty$, d. v. s. efter uendelig lang tids forløb. Da man imidlertid ved de praktiske anvendelser af køteorien normalt er henvist til udelukkende at arbejde med *ligevægtssandsynlighederne* P_n (i nærværende eksempel sandsynlighederne P_0, P_1 og P_2), er det af største praktiske betydning at undersøge, *hvor hurtigt systemet nærmer sig den statistiske ligevægtstilstand,* således at man med en *for praktiske formål* tilfredsstillende tilnærmelse kan benytte ligevægtssandsynlighederne P_n som udtryk for systemets tilstandssandsynligheder. Svaret på dette spørgsmål afhænger i almindelighed dels af systemets struktur (som vi her betragter som givet) og dels af „ankomstintensiteten" a og „ekspeditionsintensiteten" b (som tilsammen bestemmer trafiktilbudet A til systemet). I nedenstående tabel 2 er de i tabel 1 anførte tilstandssandsynligheder beregnet for en række forskellige værdier af t ved et trafiktilbud på $A = 0,25$ erlang, idet middelekspeditionstiden pr. kunde er benyttet som tidsenhed (d. v. s. $b = 1$). Af tabel 2 (og den tilsvarende grafiske fremstilling i fig. 2) ses umiddelbart, at systemet praktisk taget vil befinde sig i statistisk ligevægt efter en „indsvingningsperiode" på ca. 8–10 tidsenheder (middelekspeditionsperioder). Hvis middelekspeditionsperioden pr. kunde f. eks. er 3 minutter, vil systemet herefter praktisk taget være i statistisk ligevægt efter ca. 25–30 minutters forløb. Forudsætningen for at anvende ligevægtssandsynlighederne som udtryk for systemets tilstandssandsynligheder må naturligvis være, at *indsvingningsperioden er relativt kort i forhold til systemets samlede funktionsperiode.* (Hvis systemet er en detailforretning og indsvingningsperioden f. eks. er 25 timer, vil ligevægtssandsynlighederne være uden praktisk interesse, fordi forretningen forlængst vil være lukket, inden den statistiske ligevægt indtræder).

t	$P_{00}(t)$	$P_{01}(t)$	$P_{02}(t)$	$P_{10}(t)$	$P_{11}(t)$	$P_{12}(t)$	$P_{20}(t)$	$P_{21}(t)$	$P_{22}(t)$
0	1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	1,000
2	0,801	0,675	0,482	0,169	0,247	0,313	0,030	0,078	0,205
4	0,770	0,745	0,696	0,186	0,199	0,223	0,044	0,056	0,081
6	0,764	0,758	0,747	0,189	0,192	0,198	0,047	0,050	0,055
8	0,762	0,761	0,759	0,190	0,191	0,192	0,048	0,048	0,049
10	0,762	0,762	0,761	0,190	0,190	0,191	0,048	0,048	0,048
∞	0,762	0,762	0,762	0,190	0,190	0,190	0,048	0,048	0,048

Tabel 2.

4. Såfremt man kun ønsker at bestemme *ligevægtssandsynlighederne* P_0, P_1 og P_2 (uden samtidig at bestemme sandsynlighederne $P_{nj}(t)$ og indsvingningsperiodens længde), behøver man ifølge bemærkningerne ovenfor om den statistiske ligevægt blot at sætte $P_n(t)=P_n$ $(n=0,\ 1,\ 2)$ i ligningssystemet (1), idet man samtidig benytter relationen $P_0+P_1+P_2=1$. Herved fås følgende lineære ligningssystem til bestemmelse af ligevægtssandsynlighederne P_0, P_1 og P_2:

$$aP_0-bP_1=0$$
$$bP_2-aP_1=0$$
$$P_0+P_1+P_2=1,$$

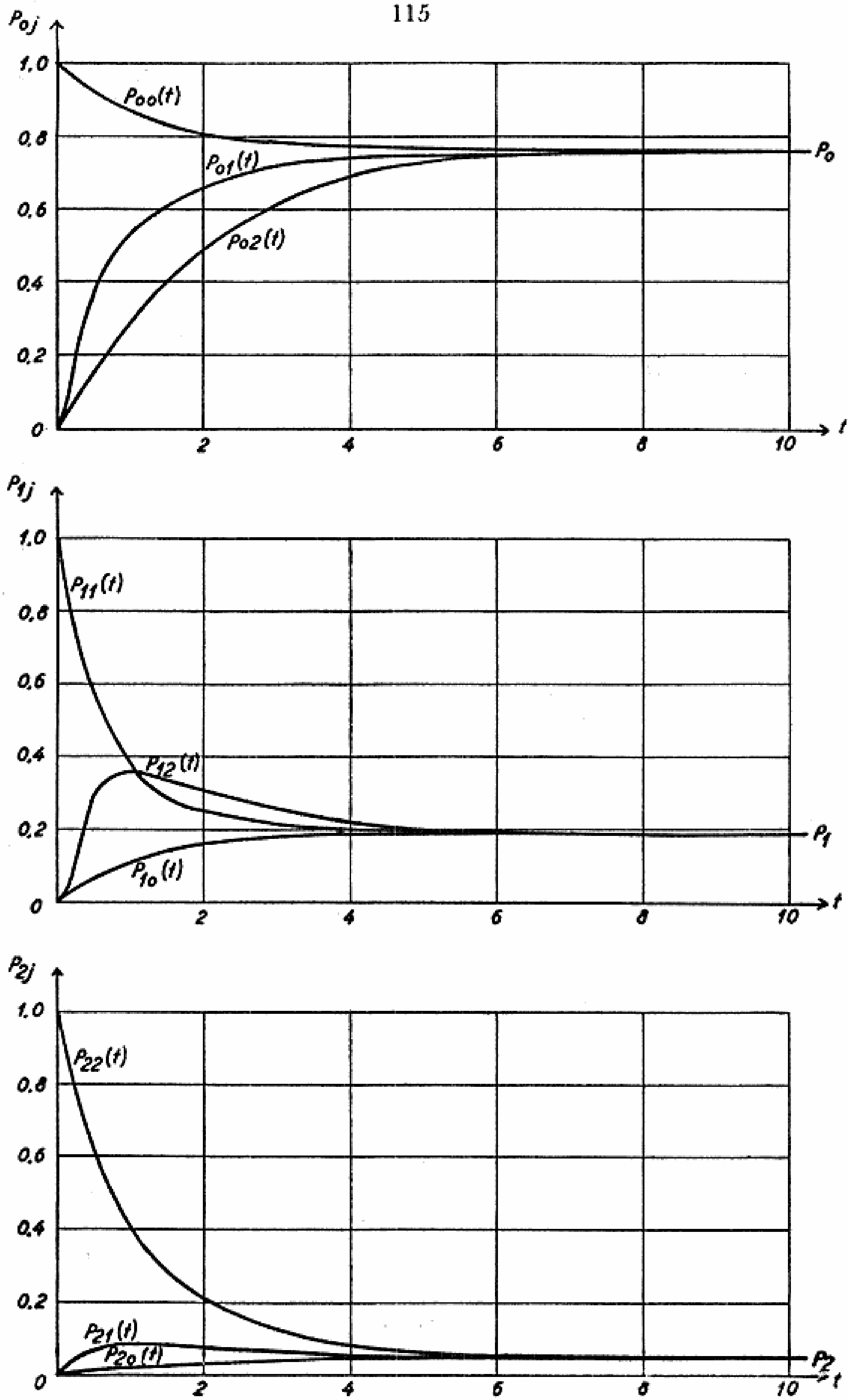
hvoraf

$$P_0=\frac{1}{1+A+A^2}$$
$$P_1=\frac{A}{1+A+A^2}$$
$$P_2=\frac{A^2}{1+A+A^2}$$

i overensstemmelse med (5), (6) og (7).

Ligevægtssandsynlighederne P_0, P_1, P_2 kan for praktiske formål fortolkes som den brøkdel af tiden, i hvilken systemet i det lange løb vil befinde sig i tilstanden 0, 1 resp. 2, når den statistiske ligevægt er indtrådt. Når systemet befinder sig i statistisk ligevægt har man derfor (jfr. tabel 3):

a) Sandsynligheden for, at en kunde opnår at blive ekspederet *straks ved ankomsten til systemet* (uden ventetid i køen), er $S = P_0 =$



P_{0j}
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
$P_{00}(t)$
$P_{01}(t)$
$P_{02}(t)$
P_0
2
4
6
8
10
t
P_{1j}
$P_{11}(t)$
$P_{12}(t)$
$P_{10}(t)$
P_1
P_{2j}
$P_{22}(t)$
$P_{21}(t)$
$P_{20}(t)$
P_2

Fig. 2.

$1/(1+A+A^2)$. Da kundeankomsterne til systemet indtræffer på *tilfældige* tidspunkter (uafhængig af systemets tilstand), kan S også fortolkes som den brøkdel af *kunderne,* som i det lange løb opnår at blive ekspederet straks ved ankomsten til systemet. Det gennemsnitlige antal „straksekspederede" kunder pr. tidsenhed er derfor aS, og den straksekspederede trafik (d. v. s. det gennemsnitlige antal straksekspederede kunder pr. middelekspeditionsperiode) er $AS=A/(1+A+A^2)=P_1$ erlang. – Ifølge tabel 3 vil i det lange løb 76,2 % af de til systemet ankommende kunder opnå at blive ekspederet straks ved ankomsten til systemet, når trafiktilbudet til dette er $A=0{,}25$ erlang.

b) Sandsynligheden for, at en kunde først opnår at blive ekspederet efter en vis *ventetid i køen,* er $D=P_1=A/(1+A+A^2)$. Størrelsen D kan for praktiske formål fortolkes som den brøkdel af kunderne, som i det lange løb kommer til at vente kortere eller længere tid i køen, inden de bliver ekspederet. Det gennemsnitlige antal „forsinkede" kunder pr. tidsenhed er følgelig aD, og den forsinkede trafik (det gennemsnitlige antal forsinkede kunder pr. middeleskpeditionsperiode) er $AD=A^2/(1+A+A^2)$ $=P_2$ erlang. – Ved et trafiktilbud på 0,25 erlang vil i det lange løb 19,0 % af de til systemet ankommende kunder kommer til at vente i køen, inden ekspedition kan finde sted.

c) Sandsynligheden for, at en kunde *afvises* af systemet er $B=P_2=$ $A^2/(1+A+A^2)$. Størrelsen B kan for praktiske formål fortolkes som den brøkdel af kunderne, som i det lange løb vil blive afvist af systemet. Det gennemsnitlige antal afviste kunder pr. tidsenhed er følgelig aB, og den afviste trafik (gennemsnitligt antal afviste kunder pr. middelekspeditionsperiode) er $AB=A^3/(1+A+A^2)$ erlang. – Ved et trafiktilbud på 0,25 erlang vil i det lange løb 4,8 % af de til systemet ankommende kunder blive afvist af systemet.

	A = 0,1	A = 0,25	A = 1	A = 2	A = 5
P_0	0,901	0,762	0,333	0,143	0,032
P_1	0,090	0,190	0,333	0,286	0,161
P_2	0,009	0,048	0,333	0,571	0,807
E	0,099	0,238	0,667	0,857	0,968

Tabel 3.

d) Det gennemsnitlige antal *ventende kunder i køen* er $L=P_2=A^2/(1+A+A^2)$.

e) Sandsynligheden for, at en til systemet ankommende kunde *højst* kommer til at vente τ tidsenheder ($\tau \geqq 0$) i køen, er

$$F(\tau)=1-P_1e^{-b\tau}=1-Ae^{-b\tau}/(1+A+A^2)$$

Kundernes *middelventetid* i køen er

$$V=L/a=\int_0^\infty tF'(t)dt=A/b(1+A+A^2)=P_1/b$$

Det bemærkes, at størrelsen V er middelventetiden for *alle* til systemet ankommende kunder (straksekspederede, forsinkede og afviste kunder). Sandsynligheden for, at en *forsinket* kunde højst kommer til at vente τ tidsenheder i køen er $G(\tau)=1-e^{-b\tau}$, og middelventetiden pr. forsinket kunde er

$$W=V/D=\int_0^\infty tG'(t)dt=1/b$$

f) Ekspedientens *udnyttelsesgrad* (d. v. s. den brøkdel af tiden, i hvilken ekspedienten i det lange løb vil være optaget med ekspedition af kunder) er $E=P_1+P_2=A(1+A)/(1+A+A^2)=1-P_0$. – Ved et trafiktilbud på 0,25 erlang er ekspedientens udnyttelsesgrad 0,238. Ekspedienten vil m. a. o. i det lange løb komme til at tilbringe 76,2 % af sin tid med at *vente på kunder*, hvis han ikke kan beskæftiges med andet arbejde imellem ekspeditionerne.

g) Afgangen af *færdigekspederede kunder* fra systemet er tilfældigt fordelt i tiden (poissonfordelt), idet sandsynligheden for, at netop 1 færdigekspederet kunde forlader systemet i løbet af et vilkårligt tidsinterval $(T,\ T+h)$ af længden h tidsenheder, er $(P_1+P_2)\,(bh+o(h))+o(h)=a(1-B)h+o(h)$ og sandsynligheden for, at mere end 1 færdigekspederet kunde forlader systemet i løbet af et vilkårligt tidsinterval $(T,\ T+h)$ af længden h tidsenheder, er $o(h)$. Det gennemsnitlige antal færdigekspederede kunder pr. tidsenhed er $a(1-B)$=det gennemsnitlige antal ikke afviste kunder pr. tidsenhed.