

## Cobb-Douglas funktionen.

*Nogle betragtninger.*

Af KJELD BJERKE\*).

1. I sin primitive form opstillede professorerne Douglas og Cobb følgende sammenhæng mellem nettonationalproduktet (i faste priser), beskæftigelsen og realkapitalens størrelse

$$R = b \cdot L^{a_1} \cdot C^{1-a_1} \quad 1)$$

Denne funktion skal forstås således, at 1 pct.s forøgelse af beskæftigelsen skulle føre til  $a_1$  procents forøgelse i nettonationalproduktet og 1 pct.s forøgelse i realkapitalen skulle føre til  $1 - a_1$  pct.s forøgelse i nettonationalproduktet. 1 pct.s forøgelse både i arbejdskraft og kapital giver altså efter denne formel netop 1 pct.s forøgelse i produktionen. Forudsætningen om, at

$$a_1 + (1 - a_1) = 1$$

blev dog senere opgivet<sup>2)</sup>, således at man også estimerede henholdsvis  $a_1$  og  $a_2$  (for realkapitalen) frit, altså uden nogen betingelse om at  $a_1 + a_2 = 1$ . Summen af  $a_1$  og  $a_2$  synes dog gennemgående ikke at afvige stærkt fra 1. Begge disse forenklede produktionsfunktioner er blevet

\*) Kontorchef, lektor ved Handelshøjskolen, København.

1) The Theory of Production by *Charles W. Cobb* and *Poul H. Douglas*, The American Economic Review XVIII Suppl., 1928.

2) Cross-Section Studies in the Cobb-Douglas Function by *Bronfenbrenner* and *Paul H. Douglas*, The Journal of Political Economy, December 1939.

## Cobb-Douglas funktionen.

*Nogle betragtninger.*

Af KJELD BJERKE\*).

1. I sin primitive form opstillede professorerne Douglas og Cobb følgende sammenhæng mellem nettonationalproduktet (i faste priser), beskæftigelsen og realkapitalens størrelse

$$R = b \cdot L^{a_1} \cdot C^{1-a_1} \quad 1)$$

Denne funktion skal forstås således, at 1 pct.s forøgelse af beskæftigelsen skulle føre til  $a_1$  procents forøgelse i nettonationalproduktet og 1 pct.s forøgelse i realkapitalen skulle føre til  $1 - a_1$  pct.s forøgelse i nettonationalproduktet. 1 pct.s forøgelse både i arbejdskraft og kapital giver altså efter denne formel netop 1 pct.s forøgelse i produktionen. Forudsætningen om, at

$$a_1 + (1 - a_1) = 1$$

blev dog senere opgivet<sup>2)</sup>, således at man også estimerede henholdsvis  $a_1$  og  $a_2$  (for realkapitalen) frit, altså uden nogen betingelse om at  $a_1 + a_2 = 1$ . Summen af  $a_1$  og  $a_2$  synes dog gennemgående ikke at afvige stærkt fra 1. Begge disse forenklede produktionsfunktioner er blevet

\*) Kontorchef, lektor ved Handelshøjskolen, København.

1) The Theory of Production by *Charles W. Cobb* and *Poul H. Douglas*, The American Economic Review XVIII Suppl., 1928.

2) Cross-Section Studies in the Cobb-Douglas Function by *Bronfenbrenner* and *Paul H. Douglas*, The Journal of Political Economy, December 1939.

videre udformet, eksempelvis er benyttet følgende eller lignende formel

$$R = L^{a_1} \cdot C^{a_2} \cdot \beta (1 + \gamma)^t \quad 3)$$

Her giver  $\gamma$  udtryk for produktionsfaktoren „teknik“ således forstået, at denne størrelse omfatter det almindelige tekniske kundskabsniveau, arbejdets organisation og de erhvervsdrivendes og arbejderne indsigter på de områder, der er relevante for produktionen. Det er selvfølgelig gørligt at inddrage yderligere variable i formlen. Som eksempel kan nævnes følgende<sup>4)</sup>

$$R = b \cdot L^{a_1} \cdot C^{a_2} \cdot U^{a_3} \cdot H^{a_4}$$

Her giver  $U$  udtryk for konjunktorelementet; eksempelvis målt ved importen i faste priser<sup>5)</sup>, og  $H$  er den menneskelige faktor – forstået som forholdet mellem personer med en vis uddannelse og befolkningen i de arbejdsdygtige aldersklasser.

2. Det kan have sin betydning at se på den geometriske fortolkning af Cobb-Douglas' funktionen, f. eks. følgende:

$$R = b \cdot L^{a_1} \cdot C^{a_2}$$

Tages log til funktionen fås:

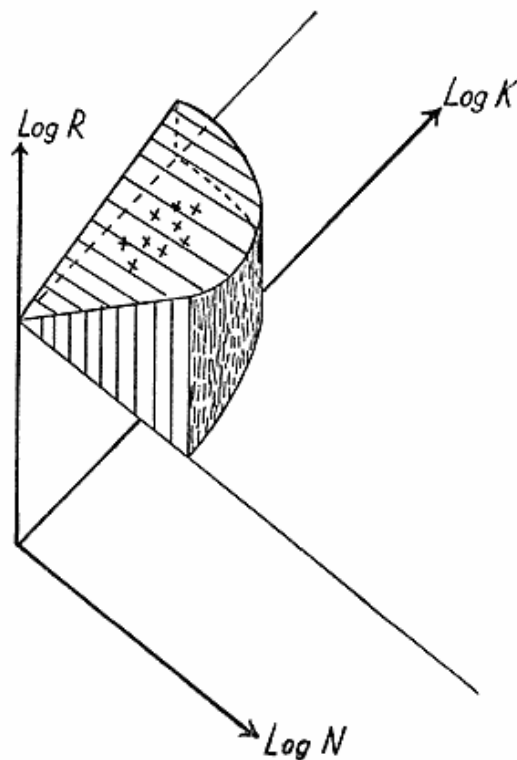
$$\log R = \log b + a_1 \log L + a_2 \log C$$

Dette sammenhæng er søgt afbilledet i følgende diagram.

<sup>3)</sup> Jfr. bl. a.: Real kapital og økonomisk vækst 1900–1956 af *Odd Aukrust og Juul Bjerke*. Artikel no 4, Statistiske Sentralbyrå. Oslo 1958 og *Jan Tinbergen: Zur Theorie der langfristigen Wirtschaftsentwicklung*, *Weltwirtschaftliches Archiv*, LV, 1942, 1, samt – omend med noget afvigende formelapparat *R. M. Solow: Technical Change and the Aggregate Production Function: Review of Economic and Statistics*. Aug. 1957.

<sup>4)</sup> Med andre betegnelser benyttet af *Olavi Nütamo: The Development of Productivity of Finnish Industry in 1925–52*, Helsingfors 1958.

<sup>5)</sup> Det burde nok være eksporten i faste priser i stedet for importen.



Den flade, man eventuelt får, har en vis hældning. Hvor fladen skærer planet mellem akserne  $\log L$  og  $\log R$ , svarer hældningen til  $a_1$ , og hvor fladen skærer planet mellem  $\log C$  og  $\log R$ , svarer hældningen til  $a_2$ . For at der kan fremkomme en flade, som karakteriserer sammenhængen, må det forudsættes, at de punkter, som ved hjælp af mindste kvadraters metode bestemmer parametrene  $b$  samt  $a_1$  og  $a_2$ , spredt sig tilnærmelsesvis i eet plan. Hvis disse betingelser ikke er opfyldte, hvis punkterne er spredt tilfældigt i det tredimensionale koordinatsystem, vil planets bestemmelse være fastsat med en så betydelig usikkerhed, at det ikke har stor interesse, og hvis punkterne danner en ret linie ud i rummet – er planet helt ubestemt.

Hvad angår de variable, der indgår i formlen, kan man vel regne med, at beskæftigelsen kan bestemmes med en relativ stor sikkerhed; men kapitalvolumet vil derimod være en problematisk størrelse, idet man normalt ikke kan tage hensyn til udnyttelsesgraden for kapitalvolumet. De punkter, man får, vil følgelig være „biassed“<sup>5)</sup>.

<sup>5)</sup> *Solow* har overført beskæftigelsesgradens omfang på kapitalen og herigennem foretaget en korrektion.

3. Efter det foran anførte må det være af interesse at undersøge, om det materiale, der foreligger, og som har været benyttet, opfylder betingelserne for, at parametrene kan bestemmes.

Det er nærliggende først at se på noget af det amerikanske materiale. I en artikel i *Econometrica*<sup>6)</sup> har Mendershausen taget dette spørgsmål op. Han kommer med følgende hovedindvendinger mod Cobb-Douglas-funktionen:

1. Ved bestemmelsen af parametrene har man ikke kunnet tage hensyn til udnyttelsesgraden af  $C$ .
2. Størrelserne er „multicollinear“. Der eksisterer mere end en lineær relation mellem dem.

Hvis man minimaliserer i tre forskellige retninger, d. v. s. går ud fra, at de tilfældige afvigelser falder henholdsvis kun på  $\log P$ ,  $\log L$  og  $\log C$ , fås væsentlig forskellig  $\alpha_1$  og  $\alpha_2$ . Mendershausen kalder  $\alpha_1$  for  $k$  og  $\alpha_2$  for  $k'$  og får følgende:

| Minimization direction | Coefficients |       |
|------------------------|--------------|-------|
| $\log P$               | 0,76         | 0,25  |
| $\log L$               | -1,06        | -1,14 |
| $\log C$               | 2,23         | 0,34  |

Ved at indtegne Douglas' data, som omfatter perioden 1899 til 1922, i et tredimensionalt koordinatsystem viser det sig, at når bortses fra tre punkter, ligger resten nærmest på en ret linie. Planet og derfor også parametrene er følgelig bestemt så usikkert, at bestemmelsen er tilfældig<sup>\*)</sup>.

Overfor bl. a. disse indvendinger gør Douglas det, at han i stedet for som hidtil at bestemme parametrene ved hjælp af tidskurver, bestemmer dem på grundlag af nogle tællingsresultater for enkelte industrier og industrigrene for et enkelt år. Han anvender således en amerikansk industritælling for 1909<sup>7)</sup>. For hele industrien kommer han da til det samme resultat som ved tidsanalysen, nemlig et  $\alpha_1$  på 0,75.

<sup>6)</sup> On the Significance of Professor Douglas' Production Function by *Horst Mendershausen*, *Econometrica*, Volume 6, 1938.

<sup>7)</sup> Jfr. Cross-Section Studies in the Cobb-Douglas Function by *Bronfenbrenner* and *Paul H. Douglas*. *The Journal of Political Economy*. Volume 47, December 1939.

<sup>\*)</sup> På det nordiske nationaløkonomiske møde september 1958 holdt *Odd Aukrust* et foredrag om „Investeringer og økonomisk vækst“. I forbindelse med anvendelsen af Cobb-Douglas funktionen på norsk materiale fremførte jeg lignende betragtninger som *Mendershausen*.

Ved således at opgive tidsanalysen til fordel for det, han kalder Cross-Section Studies, opnår han, at nogle af indvendingerne mod beregningerne falder bort. Hans konklusion bliver følgende, som jo er meget malende, men ret intetsigende: „The conclusion, it seems to us, still stands. The results of the early temporal studies stand confirmed by the results of the cross-section studies. And quite apart from the confirmation, the results are interesting, with their hints at increasing returns and exploitation, and with their fairly conclusive evidence of nonuniformity between subgroups.

The instability problem, of course is real, and should not be overlooked. It makes our function appear as one of the exotic hot-house plants of economic statistics. It will not grow, this function, wherever planted. If soil be too rocky, or temperature too low, or the terra firma subject to the unstabilizing influence of earthquakes, no amount of statistical cultivation can remedy the deficiencies. The plant will then be a nonviable monstrosity, perishing in embryo. But given rare and optimal conditions, the plant will grow to maturity and fruition, with a percentage of viable results as great as can be anticipated in other branches of experimental botanizing. Moreover, we believe that we have crossed the economic species line, and proved our plant a new species, however frail, not merely a temperamental hybrid of more rugged forms such as the flowering time-series.“

I en senere artikel<sup>8)</sup> kommer Douglas ind på spørgsmålet, om punkterne kan tænkes at ligge på en flade og ikke på en ret linie. Ved atter at anvende Cross-Section studies – i dette tilfælde på grundlag af U. S. A.'s industritælling for 1919 – kommer han til, at punkterne synes at ligge på en flade, og denne flade synes at være således beskaffen, at den er parallel med log *C*-aksen. Han drager ikke konklusionen heraf, som vel må blive, at ændringer i output kan bestemmes alene på grundlag af ændringer i beskæftigelsen.

I en anden artikel<sup>9)</sup>, hvor et canadisk materiale er benyttet, undersøges spredningen for punkterne, og disse synes at fordele sig normalt, hvad kan forundre, da forholdene fra industri til industri jo kan være meget forskellige. Dette synspunkt er da også mere generelt fremhævet af Douglas i hans bog „The Theory of Wages“.

<sup>8)</sup> The Production Function for American Manufacturing in 1919 by *Grace T. Gunn* and *Paul H. Douglas*; *The American Economic Review* 31, 1941.

<sup>9)</sup> The Production Function for Canadian Manufacturers by *Patricia Daly* and *Paul H. Douglas*, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 38, 1943.

En ting, som generede Douglas også ved Cross-Section Studies, var spørgsmålet minimaliseringsretningen. Problemet er blevet taget op af Douglas og Gunn i afhandlingen: *Further Measurements of Marginal Productivity*<sup>10)</sup>.

Det synes som om, at det at fladen vel nærmest er parallel med log  $C$ -aksen fører til, at minimaliseringen i retningen af log  $P$  er tilladelig og forsvarlig, og som det synes den bedste. Når den anses for bedre end minimaliseringen i retningen af log  $L$ , må det skyldes, at  $L$  er nøjagtigere bestemt end  $P$ .

4. Når man beskæftiger sig med Cobb-Douglas-funktionen, er det naturligt også at omtale den tidligere nævnte artikel af Solow i *The Review of Economics and Statistics*, 1957.

Han undersøger et amerikansk materiale for perioden 1909–1949 og interesserer sig især for betydningen af de tekniske ændringer. Han foretager i denne forbindelse en sammenligning mellem output korrigeret for ændring i teknik og kapitalen og kommer til nogle punkter, der synes at repræsentere en kurve med en svag krumning, som tyder på svagt diminishing return. Ved bestemmelsen af, hvilken kurve disse punkter kan tænkes at repræsentere, tager han, ligesom Prais og Houthakker har gjort det i anden forbindelse<sup>11)</sup>, sit udgangspunkt i flere funktioner og anfører herom følgende:

„As for fitting a curve to the scatter, a Cobb-Douglas function comes immediately to mind, but then so do several other parametric forms, with little to choose among them<sup>12)</sup>. I can't help feeling that little or nothing hangs on the choice of functional form, but I have experimented with several. In general I limited myself to two-parameter families of curves, linear in the parameters (for computational convenience), and at least capable of exhibiting diminishing returns (except for the straight line, which on this account proved inferior to all others).

<sup>10)</sup> *Quarterly Journal of Economics*, 54. årgang, 1940.

<sup>11)</sup> *Prais and Houthakker: The Analysis of Family Budgets* (Cambridge, England, 1955).

<sup>12)</sup> A discussion of the same problem in a different context is to be found in *Prais and Houthakker. The Analysis of Family Budgets* (Cambridge, England, 1955) p. 82–88. See also *S. J. Prais: „Non-Linear Estimates of the Engel Curves. „Review of Economic Studies, No. 52 (1952–53), p. 87–104.*

The particular possibilities tried were the following:

$$q = \alpha + \beta k \quad (4a)$$

$$q = \alpha + \beta \log k \quad (4b)$$

$$q = \alpha - \beta/k \quad (4c)$$

$$\log q = \alpha + \beta \log k \quad (4d)$$

$$\log q = \alpha - \beta/k \quad (4e)$$

Of these, (4d) is the Cobb-Douglas case; 4c and e) have upper asymptotes; the semilogarithmic (4b) and the hyperbolic (4c) must cross the horizontal axis at a positive value of  $k$  and continue ever more steeply but irrelevantly downward (which means only that some positive  $k$  must be achieved before any output is forthcoming, but this is far outside the range of observation); (4e) begins at the origin with a phase of increasing returns and ends with a phase of diminishing returns – the point of inflection occurs at  $k = \beta/2$  and needless to say all our observed points come well to the right of this.

The results of fitting these five curves to the scatter of Chart 4<sup>1)</sup> are shown in Table 2.

The correlation coefficients are uniformly so high that one hesitates to saw any more than that all five function, even the linear one, are about

TABLE 2

| Curve | $\alpha$ | $\beta$ | $r$   |
|-------|----------|---------|-------|
| 4 a   | .438     | .091    | .9982 |
| „ b   | .448     | .239    | .9996 |
| „ c   | .917     | .618    | .9964 |
| „ d   | -.729    | .353    | .9996 |
| „ e   | -.038    | .913    | .9980 |

equally good at representing the general shape of the observed points. From the correlations alone, for what they are worth, it appears that the Cobb-Douglas function (4d) and the semilogarithmic (4b) are a bit better than the others.

Since all of the fitted curves are of the form  $g(y) = \alpha + \beta h(x)$ , one can view them all as linear regressions and an interesting test of goodness of fit proposed by Prais and Houthakker (*ibid.*, page 51) is available. If the residuals from each regression are arranged in order of increasing values of the independent variable, then one would like this sequence

<sup>1)</sup> Ikke anført her.



to be disposed „randomly“ about the regression line. A strong „serial“ correlation in the residual, or a few long runs of positive residuals alternating with long runs of negative residuals, would be evidence of just that kind of smooth departure from linearity that one would like to catch. A test can be constructed using published tables of critical values for runs of two kinds of elements.

This has been done for the linear, semilogarithmic, and Cobb-Douglas functions. The results strongly confirm the visual impression of diminishing returns in Chart 4, showing the linear function to be a systematically poor fit. As between (4b) and (4d) there is little to choose.“.

5. Man kan nok være noget skeptisk overfor bestemmelsen af parametrene i Cobb-Douglas-funktionen. På den anden side er det en kendsgerning, at de parametre, der er beregnet fra efterhånden ikke så helt få lande, synes at opføre sig, som man skulle vente. Det kan således nævnes, at medens  $\alpha_1$  (parametren for beskæftigelsen) som omtalt for U. S. A. ligger på omkring 0,75 (og parametren for kapitalen  $\alpha_2$  på 0,25), så udgør  $\alpha_1$  kun omkring 0,5 for Indiens vedkommende. Denne forskel går jo i den retning, man måtte vente. Når der i forvejen er megen kapital i et land (U. S. A.), betyder det ikke så meget, om der kommer yderligere kapital til. Omvendt er der relativ knaphed på kapital i Indien og overflod af arbejdskraft.

Med hensyn til den fremtidige udvikling, synes jeg, at den „forbedring“ af Cobb-Douglas-funktionen, som de senere års arbejde med økonomisk vækst har opvist, er af stor interesse. I denne forbindelse synes ikke mindst Niitamo's forsøg på inddragelse af flere kvantitative variable lovende, selv om hans undersøgelser kun omfatter industrien og derfor måske bedre kan give fornuftige resultater.

Det kan formentlig ikke forbavse, at det sidste ord ikke er sagt med hensyn til Cobb-Douglas-funktionen. Det kan således nævnes, at i en forelæsning holdt på Københavns Universitet fremhævede professor Domar, at det var en mangel ved Cobb-Douglas-funktionen, at der ikke blev taget direkte hensyn til de medgåede rå- og hjælpestoffer, idet disse også påvirkede nationalproduktets vækst. Domar foreslog derfor følgende udtryk:

$$Y = A L^{\alpha} \cdot C^{\beta} \cdot R^{\gamma},$$

hvor  $R$  er råstofanvendelsen.

Domar fremhævede en anden ting, at Cobb-Douglas-funktionen jo var et slags geometrisk gennemsnit. Det var derfor ikke rigtigt, at man benyttede de nationale makro-økonomiske størrelser  $\alpha$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $R$  og  $Y$ , fordi

de er fremkommet ved en summering (et aritmetisk gennemsnit). Man måtte derfor ned på undergrupper og opstille produkter af disse i stedet for summer. Han mente dog ikke, at det var nødvendigt at gå ned på alt for små undergrupper med den rigtige aggregering. Dettets synes dog ikke umiddelbart indlysende.

Afsluttende skal yderligere omtales, at Erik Lundberg i en artikel i T. V. F., årgang 30, 1959:8, bl. a. også har gjort Cobb-Douglas-funktionen til genstand for nærmere analyse. Han synes, at denne måde at betragte udviklingen på er noget ensidig. Han fremhæver, at Cobb-Douglas-funktionen forudsætter aftagende afkast for både arbejdskraften og kapitalen; men erfaringerne synes at vise, at kapitalens afkast nærmest har holdt sig konstant, samtidig med at der er sket en trendmæssig stigning i arbejdsudgifterne. Dette har som bekendt ført til, at man er gået fra arbejdskraft over til kapitalanvendelse. Lundberg mener derfor ikke, at Cobb-Douglas-funktionens forudsætninger holder stik – og drager bl. a. den slutning, at det virkelig lønner sig at forøge opsparingen. Lundbergs betragtninger fører over i en mere realistisk funktion, som han selv siger – en mere syntetisk betragtning. Funktionen kan udtrykkes på følgende måde.

$$\bar{g} = k + q + t + u + l.$$

Her angiver  $\bar{g}$  tilvæksten  $\frac{N}{A}$  (arbejdsproduktiviteten, idet  $N$  er nationalproduktet i faste priser og  $A$  arbejdskraften),  $k$  er forøgelsen  $\frac{K}{A}$ , hvor

$K$  er kapitalen i faste priser,  $q$  er en faktor, der udtrykker betydningen af tilpasningen og omfordelingen af produktionsressourcerne,  $l$  er ændringerne i kapacitetsudnyttelsen,  $t$  – den nye teknik,  $u$  – uddannelsen af arbejdskraft.

Lundberg har vel herigennem på en måde spaltet Cobb-Douglas-funktionens restposter op. Med rette lægger Lundberg vægt på betydningen af sådanne faktorer som  $l$  og  $q$ . Adskillige har påpeget, at ændret kapacitetsudnyttelse må der tages hensyn til ved betragtninger over vækstproblemer. Den anden interessante faktor  $q$  står jo i forbindelse med Petty-effekten, der betoner, at eksempelvis overgang fra landbrug – med lav produktivitet – til industri med høj produktivitet vil forøge nationalproduktet. Også inden for de enkelte brancher virker naturligvis denne faktor.

Dette oplæg fører endelig Lundberg over i en mere verbal beskrivelse af en dynamisk analyse, hvor jeg afsluttende skal citere følgende: „Med udgangspunkt från de statistiska helhetsbilder av samhällsekonomien, som jag här exemplifierat, finns det inga enkla kriterier på vilken av de två alternativa tolkningar av de statistiska sammanhangen mellan produktion, kapital och teknik jag diskuterat, som skulle vara mest sann. En sorts sanning på detta plan ligger kanske mellan de två alternativen – alltså mellan uppfattningen att en ganska snävt begränsad del av utvecklingstakten kan förklaras av kapitalackumuleringen och det andra alternativet enligt vilket ungefärlig proportionalitet mellan kapital och produktionsresultat skulle tolkas som väsentligt högre produktivitetseffekt hos kapitalbildningen. Enligt det senare alternativet kan kapital och kapitalbildning uppfattas som en nödvändig betingelse för att det mesta av de tekniska landvinningarna skall få resultat.“

ERHVERVSØKONOMISK TIDSSKRIFT. Pris pr. hefte kr. 5,00, pr. årgang (4 hefter) kr. 18,00.  
HOVEDREDAKTØR: Professor, dr. polit. Bjarke Fog, Handelshøjskolen, København V., telf. Nora 9260, privat Søborg 1440. AARHUS REDATION (nr. 3): Professor Svend Fredens, Aarhus Universitet, Aarhus, telf. Aarhus 34311, privat Aarhus 77916. Lektor, statsautoriseret revisor G. Graversen, Handelshøjskolen, Aarhus, telf. Aarhus 35011, privat Aarhus 40365. KØBENHAVNS REDAKTION (nr. 1, 2 og 4): Lektor, cand. merc. O. Loff, Handelshøjskolen, København V., telf. Nora 9260, privat Hellerup 2160. Lektor, kontorchef P. P. Sveistrup, Københavns Universitet, København K., telf. privat 87 09 14. REDAKTIONSSSEKRETÆR: Vidensk. ass., cand. oecon. Erik Johnsen, Handelshøjskolen, København V., telf. Nora 9260, privat Birkerød 2141. EKSPEDITION OG ADMINISTRATION: Foreningen af Danske Erhvervsøkonomer, landsretssagfører Axel Jacobsen, Lyngby Hovedgade 57 B, Kongens Lyngby, telf. 87 75 25. Trykt hos Hansen & Andreasen, Godthåbsvej 22, København F.