# En kømodel.

*Af* SVEND FREDENS*)

1. I køteorien behandles visse sider af de processer, der opstår, når et nærmere defineret „system" opsøges af „kunder", som ønsker at blive „ekspederet" af de til systemet hørende „ekspedienter".

Systemets virkemåde afhænger bl. a. af kundeankomsternes fordeling i tiden og af ekspeditionstiden pr. kunde. Hvis kundetilstrømningen til systemet foregår *fuldstændig regelmæssigt* med nøjagtig $\frac{1}{a}$ tidsenhed mellem kundeankomsterne, og ekspeditionstiden pr. kunde, $\frac{1}{b}$, er *konstant* fra kunde til kunde, kan systemets tilstand i ethvert tidspunkt $t$ bestemmes entydigt. Er f. eks. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, vil processen forløbe som vist i nedenstående figur 1, hvor de lodrette liniestykker markerer kundeankomsterne (i tidspunkterne 0, $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{a}$ o. s. v.), og de stærkt optrukne vandrette liniestykker (af længden $\frac{1}{b}$) angiver ekspeditionstiden pr. kunde.

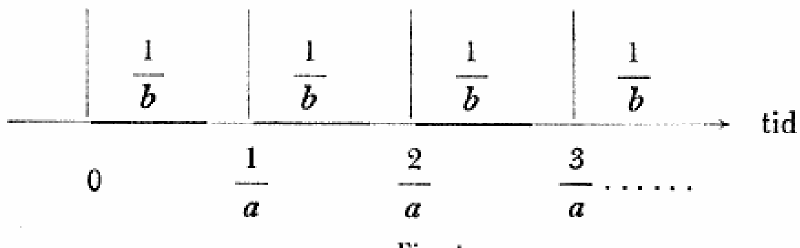


Fig. 1.

*) Professor. Aarhus Universitet.

# En kømodel.

*Af* SVEND FREDENS*)

1. I køteorien behandles visse sider af de processer, der opstår, når et nærmere defineret „system“ opsøges af „kunder“, som ønsker at blive „ekspederet“ af de til systemet hørende „ekspedienter“.

Systemets virkemåde afhænger bl. a. af kundeankomsternes fordeling i tiden og af ekspeditionstiden pr. kunde. Hvis kundetilstrømningen til systemet foregår *fuldstændig regelmæssigt* med nøjagtig $\frac{1}{a}$ tidsenhed mellem kundeankomsterne, og ekspeditionstiden pr. kunde, $\frac{1}{b}$, er *konstant* fra kunde til kunde, kan systemets tilstand i ethvert tidspunkt $t$ bestemmes entydigt. Er f. eks. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, vil processen forløbe som vist i nedenstående figur 1, hvor de lodrette liniestykker markerer kundeankomsterne (i tidspunkterne 0, $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{a}$ o. s. v.), og de stærkt optrukne vandrette liniestykker (af længden $\frac{1}{b}$) angiver ekspeditionstiden pr. kunde.

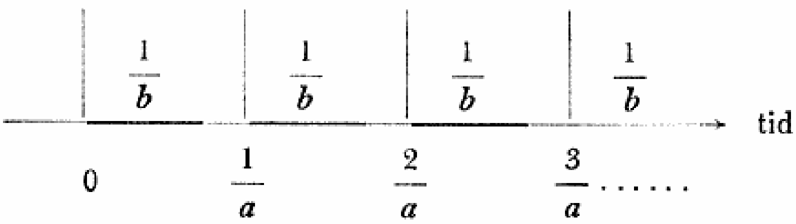


Fig. 1.

*) Professor. Aarhus Universitet.

Een ekspedient vil her kunne overkomme at ekspedere samtlige kunder, uden at der opstår kødannelser i systemet. I de første $\frac{1}{b}$ tidsenheder efter hver kundeankomst vil systemet befinde sig i tilstand 1 (1 kunde i systemet, ekspedienten optaget), og derefter i tilstand 0 (ingen kunder i systemet, ekspedienten ledig) i de følgende $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ tidsenheder, indtil den næste kunde ankommer til systemet, hvorefter dette igen befinder sig i tilstand 1 i de følgende $\frac{1}{b}$ tidsenheder o. s. v.

Systemer med fuldstændig regelmæssig kundetilstrømning og konstant ekspeditionstid kan i regelen på fuldt tilfredsstillende måde beskrives ved hjælp af en *deterministisk* model. Det normale vil imidlertid være, at kundetilstrømningen til systemet foregår mere eller mindre *uregelmæssigt* (varierende tidsafstand mellem kundeankomsterne), og at ekspeditionstiden *varierer* fra kunde til kunde. I så fald vil som hovedregel kun en del af de til systemet ankommende kunder opnå at blive ekspederet straks ved ankomsten til systemet (dette forudsætter mindst een ledig ekspedient på ankomsttidspunktet). Resten af kunderne må enten forlade systemet uden at blive ekspederet eller tage opstilling i en kø af ventende kunder, og systemets tilstand i ethvert tidspunkt kan sædvanligvis kun beskrives i *sandsynlighedstermer:* sandsynligheden for at systemet befinder sig i tilstanden $n$ ($n$ kunder i systemet), sandsynligheden for, at netop $n$ af de $M$ ekspedienter i systemet er optaget af at ekspedere, sandsynligheden for, at der befinder sig netop $n$ kunder i køen o. s. v. Det er køteoriens opgave at bestemme disse sandsynligheder (og en række forskellige størrelser, der kan udledes heraf) under givne forudsætninger m. h. t. systemets struktur, kundetilstrømning og ekspeditionstid pr. kunde.

2. Det forudsættes i det følgende, at *kundeankomsterne* til systemet er tilfældigt fordelt i tiden (poissonfordelt), eller nøjagtigere udtrykt: (a) sandsynligheden for, at der ankommer netop 1 kunde til systemet i løbet af $h$ tidsenheder er $ah + o(h)$, hvor $a$ er en positiv konstant, og (b) sandsynligheden for, at der ankommer mere end 1 kunde til systemet i tidsintervallet $h$ er $o(h)$. Sandsynligheden for 0 kundeankomster til systemet i løbet af $h$ tidsenheder er følgelig $1 - ah - o(h)$.

Under disse forudsætninger er sandsynligheden $S_n(t)$ for, at der indtræffer netop $n$ kundeankomster i løbet af $t$ tidsenheder givet ved *poissonfordelingen*

$$S_n(t) = \frac{(at)^n}{n!} e^{-at} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots.).$$

Det gennemsnitlige antal kundeankomster i tidsintervallet $t$ er $at$. Den ovenfor indførte konstant $a$ kan følgelig fortolkes som det gennemsnitlige antal kundeankomster pr. tidsenhed, og den gennemsnitlige tidsafstand mellem kundeankomsterne er $\frac{1}{a}$ tidsenhed.

Med hensyn til *ekspeditionstiderne* forudsættes det, at sandsynligheden for, at en igangværende ekspedition afsluttes i løbet af de følgende $h$ tidsenheder er uafhængig af ekspeditionens hidtidige varighed, eller nøjagtigere udtrykt: sandsynligheden for, at en igangværende ekspedition afsluttes i løbet af de følgende $h$ tidsenheder er $bh + o(h)$, hvor $b$ er en positiv konstant. Sandsynligheden for, at en igangværende ekspedition ikke afsluttes i løbet af de følgende $h$ tidsenheder er følgelig $1 - bh - o(h)$.

Under denne forudsætning er sandsynligheden $S(t)$ for, at en igangværende ekspedition endnu ikke er afsluttet efter $t$ tidsenheders forløb, givet ved *eksponentialfordelingen*

$$S(t) = e^{-bt}$$

Middelekspeditionstiden pr. kunde er $\frac{1}{b}$ tidsenheder. Konstanten $b$ er altså den reciprokke værdi af middelekspeditionstiden.

3. I den følgende fremstilling betragter vi en kømodel med følgende egenskaber (fig. 2):

a) Der er $M$ ekspedienter i systemet ($M \geq 1$). Hver kunde skal kun ekspederes af een ekspedient („parallelforbundne" ekspedienter), og hver ekspedient kan kun ekspedere een kunde ad gangen. Færdigekspederede kunder forlader systemet, så snart ekspeditionen er afsluttet.

b) Kunder, som ved ankomsten til systemet finder mindst een ekspedient ledig, bliver straks ekspederet af en af de ledige ekspedienter. I systemet er der plads til $N - M$ ventende kunder. (Den maksimale kølængde er $N - M$). Kunder, som ved ankomsten til systemet finder alle $M$ ekspedienter optaget, tager opstilling i køen, hvis der er plads i denne på ankomsttidspunktet, og forbliver i køen indtil ekspeditionen kan finde sted. Såsnart en af de $M$ ekspedienter bliver ledig, rykker en af kunderne i køen frem og bliver ekspederet.

Kunder, som ved ankomsten til systemet finder alle $N - M$ pladser i køen optaget, afvises (d. v. s. forlader systemet uden at blive ekspederet).

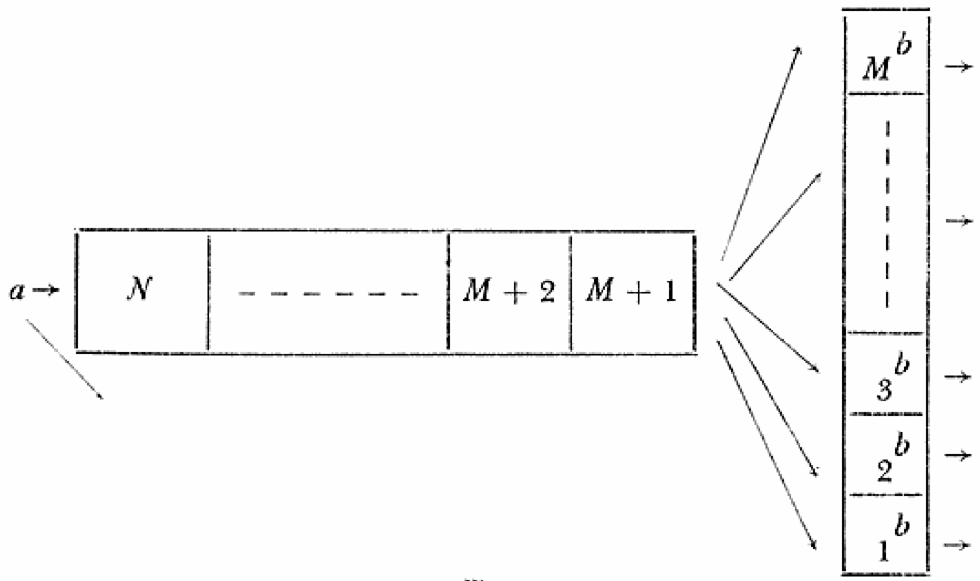


Fig. 2.

c) Kundeankomsterne til systemet er tilfældigt fordelt i tiden (poissonfordelt) med gennemsnitlig $a$ ankomster pr. tidsenhed. Ekspeditionstiden pr. kunde er eksponentiel med en middelekspeditionstid på $\frac{1}{b}$ tidsenheder pr. kunde.

De til systemet ankommende kunder påtrykker ekspedienterne i systemet en vis arbejdsbyrde („trafik") $A$, hvis størrelse naturligt måles ved produktet af det gennemsnitlige antal kundeankomster $a$ pr. tidsenhed og middelekspeditionstiden $\frac{1}{b}$ pr. kunde, altså $A = \frac{1}{b}$ hvilket udtryk også kan fortolkes som *det gennemsnitlige antal kundeankomster pr. middelekspeditionsperiode.* Trafikenheden kaldes 1 erlang. At et system påtrykkes (eller „tilbydes") en trafik på $A$ erlang er altså ensbetydende med, at der gennemsnitlig indtræffer $A$ kundeankomster pr. middelekspeditionsperiode. (Er det gennemsnitlige antal kundeankomster pr.

time f. eks. $a = 10$ og middelekspeditionstiden pr. kunde $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ time, bliver trafiktilbudet $A = 5$ erlang).

4. Systemt siges at befinde sig i tilstanden $n$ i et givet tidspunkt $t$, når der i dette tidspunkt er $n$ kunder i systemet ($n = 0, 1, 2, \ldots\ldots, N$). Det kan vises, at de tilsvarende *tilstandssandsynligheder* $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_N$, når systemet befinder sig i statistisk ligevægt, er givet ved

$$P_n = \frac{A^n}{n!} P_o \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, M)$$

$$P_n = \frac{A^M}{M!} \left(\frac{A}{M}\right)^{n-M} P_o = \left(\frac{A}{M}\right)^{n-M} P_M \qquad (n = M, M+1, \ldots, N)$$

$$P_o = \begin{cases} \left[ \sum\limits_{n=0}^{M} \frac{A^n}{n!} + (N-M)\frac{A^M}{M!} \right]^{-1} & (A = M) \\ \left[ \sum\limits_{n=0}^{M} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^{M+1}}{M!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{A}{M}\right)^{N-M}}{M - A} \right]^{-1} & (A \neq M) \end{cases}$$

Tilstandssandsynlighederne $P_n$ kan for praktiske formål fortolkes som den brøkdel af tiden, i hvilken systemet befinder sig i hver af de mulige tilstande $n$. Med udgangspunkt i disse sandsynligheder kan man beregne en række forskellige størrelser, der hver for sig tjener til karakteristik af systemets virkemåde („effektivitet“) ved givne værdier af „parametrene“ $A$, $M$ og $N - M$ (jfr. tabel 1):

(a) Sandsynligheden $B$ for at en kunde *afvises* fra systemet (fordi alle $N$ pladser i dette er optaget på ankomsttidspunktet). Da kundeankomsterne indtræffer på tilfældige tidspunkter (uafhængig af systemets tilstand), kan afvisningssandsynligheden $B$ også fortolkes som den brøkdel af kunderne, som i det lange løb afvises af systemet.

(b) Sandsynligheden $D$ for at en kunde først opnår at blive ekspederet efter *en vis ventetid i køen*. (Dette forudsætter, at alle $M$ ekspedienter er optaget og at der er mindst een ledig plads i køen på ankomsttidspunktet); $D$ kan for praktiske formål fortolkes som den brøkdel af kunderne, som i det lange løb kommer til at vente kortere eller længere tid i køen, inden de bliver ekspederet.

(c) Sandsynligheden $S$ for at en kunde bliver ekspederet ***straks*** ved ankomsten til systemet. (Dette forudsætter mindst een ledig ekspedient på ankomsttidspunktet); $S$ kan for praktiske formål fortolkes som den brøkdel af kunderne, som i det lange løb opnår at blive ekspederet straks ved ankomsten til systemet.

(d) Det gennemsnitlige antal *ventende kunder* $L$ i køen (den gennemsnitlige kølængde).

(e) Kundernes *gennemsnitlige ventetid* $V$ *i køen*. Den gennemsnitlige tid kunderne tilbringer i *systemet* er $V +$ middelekspeditionstiden $\frac{1}{b}$.

(f) Det *gennemsnitlige antal optagne ekspedienter* $E$. Da det gennemsnitlige antal kunder under ekspedition under de ovenfor opstillede forudsætninger er lig med det gennemsnitlige antal beskæftigede ekspedienter, er det *gennemsnitlige antal kunder i systemet* $L + E$. Størrelsen $E$ kan fortolkes som den gennemsnitlige tid pr. tidsenhed, de $M$ ekspedienter er optaget med at ekspedere kunder; den *gennemsnitlige udnyttelsesgrad pr. ekspedient* er derfor $E : M$.

Størrelserne $B$, $D$, $S$, $L$, $V$ og $E$ er i tabel 1 (jfr. tillige det numeriske eksempel i tabel 2) beregnet under tre forskellige forudsætninger m. h. t. den maksimale kølængde, nemlig:

*Model I.* Den maksimale kølængde er et positivt endeligt tal ($1 \leqq N - M < \infty$). Der er her tale om et kombineret afvisnings-ventetids-straksekspeditionssystem, idet sandsynlighederne $B$, $D$ og $S$ alle er $> 0$.

*Model II.* Den maksimale kølængde $N - M$ er 0. Systemet er et afvisnings-straksekspeditionssystem. ($B$ og $S$ er $> 0$, og $D = 0$). Denne model er oprindelig opstillet af *A. K. Erlang* med henblik på dimensionering af telefonanlæg[1]).

*Model III.* Den maksimale kølængde $N - M = \infty$. Systemet er et ventetids-straksekspeditionssystem. ($D$ og $S$ er $> 0$, og $B = 0$). Også denne model er oprindelig udarbejdet af *A. K. Erlang*[1]).

Modellerne II og III er naturligvis specialtilfælde af model I.

5. I det følgende skal der nu i korte træk gøres rede for nogle praktiske anvendelser af modellerne I, II og III.

[1]) *A. K. Erlang:* Løsning af nogle Problemer fra Sandsynlighedsregningen af Betydning for de automatiske Telefoncentraler, Elektroteknikeren 1917.

| | | I. $0 < N - M < \infty \quad (A \neq M)$ | II. $N - M = 0$ | III. $N - M = \infty \quad (A < M)$ |
|---|---|---|---|---|
| Sandsynlighed for 0 kunder i systemet | $P_o$ | $\left[\sum_{n=o}^{M} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^{M+1}}{M!} \frac{1 - \left(\frac{A}{M}\right)^{N-M}}{M - A}\right]^{-1}$ | $\left[\sum_{n=o}^{M} \frac{A^n}{n!}\right]^{-1}$ | $\left[\sum_{n=o}^{M} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^M}{M!} \frac{A}{M - A}\right]^{-1}$ |
| Sandsynlighed for $M$ kunder i systemet | $P_M$ | $\frac{A^M}{M!} P_o$ | $\frac{A^M}{M!} P_o$ | $\frac{A^M}{M!} P_o$ |
| Sandsynlighed for $N$ kunder i systemet (blokade) | $B = P_N$ | $\left(\frac{A}{M}\right)^{N-M} P_M$ | $\frac{A^M}{M!} P_o$ | 0 |
| Sandsynlighed for ventetid i køen | $D = \sum_{n=M}^{N-1} P_n$ | $\frac{M}{M - A} (P_M - P_N)$ | 0 | $\frac{M}{M - A} P_M$ |
| Sandsynlighed for straksekspedition | $S = \sum_{n=o}^{M-1} P_n$ | $1 - B - D$ | $1 - B$ | $1 - D$ |
| Gennemsnitlig kølængde | $L = \sum_{n=1}^{N-M} n P_{M+n}$ | $\frac{A}{M - A} [D - (N - M) B]$ | 0 | $\frac{A}{M - A} D$ |
| Middelventetid i køen f. alle kunder | $U = \frac{L}{a}$ | $\frac{1}{b} \frac{1}{M - A} [D - (N - M) B]$ | 0 | $\frac{1}{b} \frac{D}{M - A}$ |
| Gennemsitligt antal optagne ekspedienter. | $E = \sum_{n=o}^{M-1} n P_n + M \sum_{n=M}^{N} P_n$ | $A(1 - B)$ | $A(1 - B)$ | $A$ |

I tabellens *afdeling I* er det forudsat, at $A \neq M$; hvis specielt $A = M$ bliver nogle af de i tabellen anførte formler enklere. Det kan vises, at de i tabellens *afdeling II* anførte formler ikke blot gælder, når ekspeditionstiden er eksponentiel, men for *enhver* fordelingslov for ekspeditionstiden med middelværdien $\frac{1}{-}$. Formlerne i *afdeling III* gælder kun for $A < M$. Hvis $A \geq M$ kan systemet ikke komme i statistisk ligevægt.

Tabel 1.

$M = 5,\ A = 3\ (a = 3,\ b = 1)$

| | $M - N = 0$ | $M - N = 5$ | $M - N = 10$ | $M - N = \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_o$ | 0,054 | 0,047 | 0,047 | 0,047 |
| $P_M$ | 0,110 | 0,096 | 0,095 | 0,094 |
| $B$ | 0,110 | 0,007 | 0,001 | 0 |
| $D$ | 0 | 0,220 | 0,235 | 0,236 |
| $S$ | 0,890 | 0,773 | 0,764 | 0,764 |
| $L$ | 0 | 0,275 | 0,344 | 0,354 |
| $U$ | 0 | 0,092 | 0,115 | 0,118 |
| $E$ | 2,670 | 2,978 | 2,998 | 3 |

Tabel 2.

*Model I.* Det britiske luftfartsselskab BOAC har ladet foretage en køteoretisk analyse med henblik på at bestemme det økonomisk optimale antal *reserveluftfartøjer,* som kræves til at overholde fartplanen med en vis given sikkerhed. Antallet af reservefartøjer afhænger bl. a. af sammenbrudssandsynligheden for de i drift værende maskiner, reparationsteknikken, antallet af beddinger på værkstedet og en række andre faktorer[2]).

Er antallet af beddinger („ekspedienter") på værkstedet $M$ og antallet af reserveluftfartøjer $N$, kan systemet, såfremt sammenbrudsintensiteten for de i drift værende maskiner er poissonfordelt og reparationstiden pr. maskine eksponentialfordelt, beskrives ved hjælp af model I, hvis man går ud fra den – noget urealistiske – forudsætning, at driften helt *indstilles,* når antallet af maskiner ude af drift (under reparation eller ventende på reparation) overstiger antallet af reservefartøjer, idet tilstrømningen af maskiner til værkstedet („kunder til systemet") i så fald helt ophører, så snart der befinder sig $N$ kunder i systemet. Går man derimod ud fra den mindre rigoristiske forudsætning, at fartplanen *reduceres,* når antallet af maskiner ude af drift overstiger antallet af reservefartøjer,

[2]) *J. Taylor* and *R. R. P. Jackson* i Operational Research Quarterly 1954, nr. 3, jfr. Ingeniøren 1957, nr. 26.

kan systemet beskrives ved hjælp af model III, forudsat at selskabets samlede luftflåde omfatter et tilstrækkelig stort antal maskiner.

*Model II.* Det klassiske anvendelsesområde for denne model findes inden for telefonien: Et ledningsbundt med $M$ trådpar („ekspedienter") belastes med en poissonfordelt trafik på $A$ erlang (gennemsnitlig $A$ opkald pr. middelsamtaleperiode). Abonnenter („kunder"), som ved opkald (ankomst til systemet) får optagetsignal, fordi alle $M$ ledninger er optaget, antages at forlade systemet uden at blive ekspederet (abonnenten lægger røret på, når der gives optagetsignal; ingen kø af ventende kunder i systemet). Når trafiktilbudet $A$ og antallet af trådpar $M$ er givet, kan afvisningssandsynligheden $B$ beregnes ved hjælp af den i tabel 1 anførte formel. I praksis anvendes $B$-formlen hyppigt som grundlag for dimensionering af ledningsbundter (og andre forbindelsesorganer), idet der trækkes så mange ledninger i bundtet, at $B$ ikke overstiger et vist foreskrevet maksimum (f. eks. $B \leqq 0{,}01$), jfr. tabel 3[3]).

$B \leqq 0{,}01$

| $A$ | Nødv. antal ledn. $M$ | Afvisning $B$ ved $M - 1$ ledn. | $M$ ledn. |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 4 | 0,013 | 0,002 |
| 1,0 | 5 | 0,015 | 0,003 |
| 2,0 | 7 | 0,012 | 0,003 |
| 5,0 | 11 | 0,018 | 0,008 |
| 10,0 | 18 | 0,013 | 0,007 |

Tabel 3.

Noget lignende vil gøre sig gældende, når det drejer sig om forholdene på en *parkeringsplads* med $M$ parkeringsfelter („ekspedienter"), forudsat at tilstrømningen af vogne („kunder") til pladsen er poissonfordelt. Er trafiktilbudet $A$ (gennemsnitligt antal ankommende vogne pr. middelparkeringsperiode) og antallet af parkeringsfelter $M$ givet, kan

[3]) Tallene i tabellerne 3 og 4 er hentet fra *Arne Jensen:* Moe's Principle, København 1950.

sandsynligheden for, at samtlige $M$ parkeringsfelter er optaget, beregnes ved hjælp af $B$-formlen. Det gennemsnitlige antal optagne parkeringsfelter er $A\ (1 - B)$, jfr. tabel 1.

Endelig kan model II benyttes til behandling af visse *specielle lagerproblemer*. Lad os antage, at (1) efterspørgslen efter en vare i en forretning er poissonfordelt med en gennemsnitlig efterspørgsel på $a$ enheder pr. tidsenhed, (2) forretningens varebeholdning, defineret som det i forretningen værende lager + antal enheder i ordre hos forretningens leverandør af varen, er konstant $= M$ enheder, idet forretningen afgiver en ordre på 1 enhed til leverandøren, hver gang den sælger en enhed til en af sine kunder; den gennemsnitlige leveringstid for varer i ordre hos leverandøren er $\frac{1}{b}$ tidsenheder, og (3) efterspørgsel, der finder sted på tidspunkter, hvor varelageret er udsolgt ($M$ enheder i ordre hos leverandøren), bliver ikke tilfredsstillet, idet kunderne ikke ønsker at vente på varen til den kommer frem fra leverandøren. De $M$ vareenheder kan her betragtes som „ekspedienter". Anlægger man det synspunkt, at en ekspedient (vareenhed) er *ledig*, når den befinder sig på lager i forretningen og *optaget*, når den er i ordre hos leverandøren, bliver „trafiktilbudet" til systemet $A = \frac{a}{b}$ erlang (gennemsnitlig efterspørgsel pr. middelleveringsperiode) og sandsynligheden for, at forretningen ikke vil kunne tilfredsstille efterspørgslen, fordi varelageret er udsolgt (alle $M$ ekspedinter optaget), vil være $B = P_M$. Det gennemsnitlige salg pr. tidsenhed er følgelig $a\ (1 - B)$ enheder, og gennemsnitslageret i forretningen (det gennemsnitlige antal ledige ekspedienter) er $M - A\ (1 - B)$. Hvis kunderne er villige til at afvente varens fremkomst fra leverandøren (jfr. forudsætning (3) ovenfor, må model II erstattes med model I eller III, idet systemet i så fald tillader en kø af ventende kunder.

*Model III.* Følgende eksempel er hentet fra en afhandling af *G. Brigham: A Congestion Problem in an Aircraft Factory* (Journal of Operations Research, 1955): I en flyvemaskinefabrik findes rundt omkring i værkstederne ca. 60 „boder", hvorfra en eller flere ekspedienter udleverer værktøj og materialer til de i værkstederne beskæftigede mekanikere. Arbejdsformændene i værkstederne klager over, at mekanikerne spilder for megen tid med at stå i kø foran boderne, og forlanger derfor, at der skal ansættes flere ekspedienter i disse. for at ekspeditionerne kan blive fremskyndet. Heroverfor gør virksomhedens ledelse gældende, at en forøgelse af antallet af ekspedienter vil betyde større faste omkostninger for virksomheden. Problemet består i at afveje disse to synspunkter over for hinanden, eller m. a. o. at bestemme antallet af ekspedienter $M$ i de enkelte boder således, at den samlede spildløn for mekanikere og ekspedienter under eet bliver mindst mulig.

En nærmere undersøgelse viste, at tilstrømningen af mekanikere („kundetilstrømningen") til de enkelte boder med god tilnærmelse var poissonfordelt, og at ekspeditionstiden pr. mekaniker ligeledes med god tilnærmelse kunne fremstilles ved eksponentialfordelingen. (Der er m.a.o. tale om en kømodel af den i figur 2 viste type. *Brigham* forudsætter dog, at den maksimale kølængde $N-M$ er $\infty$). Det optimale antal ekspedienter pr. bod kan herefter beregnes på følgende måde: I en bod med $M$ ekspedienter, der tilbydes en trafik på $A$ erlang (gennemsnitlig $a$ mekanikerankomster pr. time, middelekspeditionstid pr. mekaniker $\frac{1}{b}$ time) er det gennemsnitlige antal optagne ekspedienter $A$ og den gennemsnitlige spildtid pr. time for de $M$ ekspedienter er følgelig $M - A$ timer. Middelventetiden (pr. mekaniker) i køen foran boden er $U = \frac{1}{b} \frac{D}{M-A}$ timer, og da der gennemsnitlig indtræffer $a$ mekanikerankomster pr. time, bliver den gennemsnitlige spildtid pr. time for mekanikerne $\frac{a}{b} \frac{D}{M-A} = \frac{A}{M-A} D = L_M$, hvor $L_M$ betegner det gennemsnitlige antal ventende mekanikere i et system med $M$ ekspedienter (jfr. tabel 1).

Forudsættes det, at såvel ekspedienter som mekanikere aflønnes med timeløn, og er timelønnen for ekspedienter og mekanikere henholdsvis $w_e$ og $w_m$, bliver den samlede gennemsnitlige spildløn pr. time for mekanikere og de $M$ ekspedienter:

$$C_M = w_e\,(M - A) + w_m L_M$$

Antallet af ekspedienter, $M$, i boden skal nu bestemmes således, at spildlønnen pr. time, $C_M$, bliver mindst mulig. Betingelsen herfor er

$$C_M - C_{M+1} = w_m\,(L_M - L_{M+1}) - w_e < 0$$

og

$$C_M - C_{M-1} = w_e - w_m\,(L_{M-1} - L_M) < 0$$

der kan sammenfattes til

$$L_M - L_{M+1} < \frac{w_e}{w_m} < L_{M-1} - L_M$$

Når trafiktilbudet $A$ til boden og forholdet $w = \frac{w_e}{w_m}$ mellem timelønnen for henholdsvis ekspedienter og mekanikere er givet, kan det økonomisk optimale antal ekspedienter $M$ i boden bestemmes ved hjælp af ovenstående ulighed. Er trafiktilbudet f. eks. $A = 1{,}5$ erlang og forholdet mellem timelønningerne $w = 0{,}8$, vil det være fordelagtigst at ansætte $M = 3$ ekspedienter i boden (tabel 4). Ved udledningen af ovenstående ligevægtsbetingelse er det forudsat, at den del af ekspedienternes tid, der ikke anvendes til ekspedition af mekanikere, er spildtid. I praksis

$L_M - L_{M+1}$

| $A$ | $M = 1$ | $M = 2$ | $M = 3$ | $M = 4$ | $M = 5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 0,467 | 0,030 | 0,003 | 0,000 | 0,000 |
| 1,0 | | 0,288 | 0,039 | 0,006 | 0,001 |
| 1,5 | | 1,692 | 0,192 | 0,036 | 0,007 |
| 2,0 | | | 0,715 | 0,134 | 0,031 |
| 2,5 | | | 2,978 | 0,403 | 0,096 |
| 3,0 | | | | 1,174 | 0,255 |

Tabel 4.

vil der imidlertid ofte være mulighed for i en vis udstrækning at beskæftige ekspedienterne med andet arbejde imellem ekspeditionerne (f. eks. at modtage varer, holde orden på reolerne i boden o. s. v.), og foranstående beregninger må i så fald modificeres i overensstemmelse hermed.