

MATEMATIK FOR ØKONOMER

Af ERIK JOHNSEN¹).

P. Nørregaard Rasmussen og Lauge Stetting: Matematik for økonomer, I og II, 475 s., kr. 50. Einar Harcks Forlag, København, 1958 og 1959.

Kemeny, Snell and Thompson: Introduction to Finite Mathematics, 372 s., Prentice-Hall, Inc. 1957.

Der er grøde i matematikundervisningen for økonomer. Herom vidner bl. a. fremkomsten af mange nye lærebøger i matematisk økonomi og økonomisk matematik, hvoraf en del allerede har været omtalt i E. T., således *Allens Mathematical Economics* (P. Nørregaard Rasmussen, E. T. nr. 3, 1958) for at nævne den hidtil vigtigste bog.

Matematikken anvendes i økonomiske problemstillinger, dels til at *beskrive* et stykke økonomisk virkelighed og dels til at *beregne* visse situationer, normalt optimalsituationer eller approximationer hertil. Begge dele er vigtige og de fordrer ikke nødvendigvis den samme gren af matematikken, selv om dennes metode går igen.

Skal man lære økonomer matematisk metode er det derfor ligegyldigt hvilken gren af matematikken, man tager op. Men skal man samtidig opfylde et vist behov for økonomerne qua økonomer, må man tage de dele ud af matematikken, som der er brug for i økonomien. Hvilket af flere grunde er meget vanskeligt.

Den mest nærliggende grund er at økonomer i forskellige stillinger har brug for forskellig slag matematik. Folk, der beskæftiger sig med finansiering, har brug for rentesregning, folk, der beskæftiger sig med produktionsplanlægning, kan have brug for lineære ligningssystemer, regnskabsfolk kan have brug for den grundlæggende symbolske logik og salgsfolkene kan have brug for sandsynlighedsregning.

Økonomer, der beskæftiger sig med at læse andres bøger og skrive nye på grundlag heraf, som f. eks. mange konjunkturteoretikere, har brug for een slags matematik. Empirisk arbejdende national- og driftsøkonomer har behov for forståelse af matematisk *metode*, samt en *oversigt* over matematikkens forskellige grene, således at de kan slå ned på den, der er relevant for den økonomiske problemstilling, de arbejder med. Heri inkluderet områder, der normalt ikke er omtalt i de matematiske bøger for økonomer. Ikke mindst dette aspekt vanskeliggør kompositionen af en standardlærebog i matematik for økonomer.

Der er tradition for her i landet at behandle matematik for statistik som to områder, der er undervisningsmæssigt uafhængige af hinanden. Sandsynlighedsregning, som alle økonomer har brug for, hører naturligt hjemme i en vis matematisk sammenhæng og burde derfor egentlig behandles sammen med andre relevante områder af det, vi normalt betegner som statistik i en matematisk-(statistisk) lærebog for økonomer.

Drager man et skel mellem makro- og mikroøkonomer er den matematiske problem-

¹) cand. oec., Det økonomiske Forskningsinstitut ved Handelshøjskolen i København.

stilling normalt helt forskellig. Mikroøkonomerne stilles overfor problemet om en konkret løsning af en konkret opgave, som det sker i operationsanalysen, medens makroøkonomerne vel stadig for størstedelens vedkommende anvender matematikken som et slags sprog.

Indfører man endelig et skel mellem økonomer og økonomistuderende er det vist overflødigt at nævne yderligere faktorer, der komplicerer opgaven for den, der vil skrive en bog om økonomisk matematik.

P. Nørregaard Rasmussen og Lauge Stetting har sat sig et begrænset mål, som dog er kompliceret nok, nemlig dette at give økonomistuderende ved Handelshøjskolen og Universitetet et tilstrækkeligt indblik i matematikken til at kunne læse „en elementær matematisk-økonomisk tekst“, som det hedder i forordet. Den beskedne forordsbemærkning om, at der her foreligger et kompendium, skal man ikke tage alt for højtideligt. De gamle dupliserede kompendier er revideret og afløst af et smukt multileret to-binds værk i bogformat, og det fremtræder som en lærebog i matematik for økonomer.

Begge forfattere har bygget matematikundervisningen på Handelshøjskolen op og har undervist økonomistuderende på universitetet og har således de bedste forudsætninger for at skrive en fremstilling, der er tilstrækkelig let tilgængelig for de sproglige studenter og realister, den er beregnet på. Når man påtænker den symbolskræk, der normalt behersker disse mennesker inden de går i gang med matematikundervisningen og ser de samme mennesker efter en tre-måneders gennemgang af disse to bøger, må man erkende, at fremstillingsformen vanskeligt kunne være mere velvalgt for dette publikum.

Det samme kan siges om den logiske sammenhæng i teksten. Selv om meget af en matematisk fremstillings sædvanlige „bevisføring“ er sprunget over, er der ingen steder forståelsesmæssige vanskeligheder med at komme fra det ene punkt til det andet. Sammenhængen understreges rent visuelt af en særdeles oversigtlig opdeling af teksten, bl. a. med indramning af de vigtigste formler til opgaveregning og ved klar anføring af, hvad der er eksempler og hvad der er tekst. Dette gør sammen med den fyldige indholdsfortegnelse værket til en god håndbog for såvel økonom som økonomistuderende, hvorved endnu et vigtigt formål er opfyldt.

Opgavesamlingen, der er stillet sidst i de to bøger, synes at give et tilstrækkeligt varieret materiale til gennemarbejdning af teksten, i hvert fald når den suppleres af de mange gennemregnede eksempler.

Værkets disponering er klassisk på to måder. Dels går man frem nogenlunde som i gymnasiets matematiske linie og behandler de områder, der synes særlig relevante for økonomiske problemstillinger. D. v. s. der lægges hovedvægten på funktionsbegrebet, funktionsanalyse, talrækker, differential- og integralregning, rentesregning samt lineære ligningssystemer. Og der gås frem nogenlunde i nævnte rækkefølge.

Foruden at følge gymnasietraditionen følger dispositionen også den *Allenske* tradition med hele tiden at illustrere den indvundne matematiske teori med *konstruerede* økonomiske eksempler, subs. økonomisk teori hentet fra gængse lærebøger af matematisk-økonomisk tilsnit.

Nærværende anmelder føler sig ikke helt overbevist om det hensigtsmæssige i disse to traditioner. Det førstnævnte, selve stoffets disposition skal der vendes tilbage til senere. Den anden, at eksemplificere en matematisk fremstilling med konstruerede og derfor delvis urealistiske eksempler kan i denne sammenhæng være uheldig på to måder. For det første er matematikundervisningen på Handelshøjskolen lagt således til rette, at den falder i første semester, hvilket er ensbetydende med, at de studerende ikke kan tilstrækkelig meget økonomi til at forstå de økonomiske eksempler. Og det skaber erfarings-

mæssigt forvirring i rækkerne, hvis tilhørerne første gang hører en vigtig for dem hidtil ukendt økonomisk definition løsrevet fra sin naturlige sammenhæng anvendt i et matematisk ræsonnement, hvor man ganske kort har gjort rede for de økonomiske forudsætninger. F. eks. kender de studerende ikke grænseomkostningsbegrebet, når man i matematikken gennemgår differentialregningen, derfor er nytten af dennes anvendelse på en given totalomkostningsfunktion som praktisk eksempel tvivlsomt set fra et pædagogisk synspunkt.

Det skal derimod indrømmes, at for økonomer, der har fået en verbal indførelse i økonomien og som derefter vil lære matematik for f. eks. at kunne læse nutids økonomisk litteratur, må denne eksemplificering være til stor nytte. Derfor egner bogen i sin nuværende disposition sig bedre som en lærebog i matematik for økonomer (som jo også er dens titel) end den egner sig for økonomistuderende.

Med matematikkursets indpasning i H.A.-studiet må man i øjeblikket overspringe en stor del af matematikbøgernes stof og overlade resten til selvstudium senere under studiet. Her kommer den anden efter anmelderens mening uheldige egenskab ved de konstruerede eksempler ind; det uheldige er netop, at de er konstruerede. Den ukritiske kunne få indtryk af, at virkeligheden faktisk er så ukompliceret, og den mere kritisk indstillede vil sige, at hvis matematikken kun kan anvendes til så urealistiske modeller, hvorfor skal man så overhovedet beskæftige sig med den. . Begge synspunkter er uheldige al den stund at den matematik, der læres ved studium af Nørregaard Rasmussens og Stettings bog faktisk er tilstrækkelig til formulering og løsning af mange komplicerede praktiske økonomiske problemer, som det f. eks. sker i operationsanalysen.

Anmelderens mening er altså, at man i en matematikbog bør koncentrere sig om matematik og gøre fremstillingen så kortfattet som det er pædagogisk forsvarligt. *Anvendelserne* kommer for sig selv i anden sammensæng, der er væsensforskellig fra matematik, og de studerende kan gøres opmærksom på, at den matematik, de præsenteres for er relevant matematik. I dette synspunkt ligger der en kritik af de to bøger.

Et andet hovedsynspunkt, der kan anlægges for bedømmelse af Nørregaard Rasmussens og Stettings bøger er disponeringen af relevant matematisk stof. Der er ingen der siger, at den matematik man tilfældigvis har undervist i i gymnasiet i 100 år som et oplæg til tekniske og naturvidenskabelige studier, samt det første man lærer efter gymnasiet (liniære ligningssystemer) er relevant for økonomiske problemer og for socialvidenskabelige problemer i det hele taget.

Man må indrømme, at den klassiske matematiske grunduddannelse giver visse relevante afsnit til brug i økonomien, navnlig hvad angår optimering af funktioner, summationsbestemmelser (integration) og optimering ved lineære ligningssystemer. Når der her siges økonomi tænkes der på den indsnævrede del af den, der normalt går under betegnelsen *driftsøkonomi*, som er hovedfag for en del af de mennesker lærebogen i matematik er skrevet for. Og så er det kun en begrænset del af driftsøkonomien, der dyrkes, så de tre nævnte hovedområder vil sammen med lidt rentesregning stort set dække det nuværende behov.

Ser man på dette indsnævrede formål kan man yderligere stryge en del af den regulære tekst i lærebogen. Det drejer sig om cirklen, ellipsen (og muligvis også parablen), trigonometriske og cirkulære funktioner. Af bøgernes 430 tekst plus eksempelsider kan der herefter mindst skæres 150 sider ud som mindre relevant stof og mere, hvis man reducerer eksempelvalget og borttager mindre relevante delafsnit. Men denne barbering forudsætter, at man forbereder sig til et studium i driftsøkonomi. Lægges der som på

universitetet størst vægt på nationaløkonomi, vil ovennævnte afsnit være relevante – og flere til som f. eks. Fourieranalysen.

Dette, at nærværende bog skal opfylde to behov, nemlig tjene til forberedelse af et studium af driftsøkonomi og et andet i nationaløkonomi, kan bringes i sammenhæng med disponeringen gennem følgende spørgsmål: findes der et grundlæggende matematisk stof, der er fælles for samtlige socialvidenskaber? Hvis ja, hvorfor så ikke disponere en grundbog herefter og følge den op af specielle matematikkurser i relation til de økonomiske specialstudier?

En diskussion af dette spørgsmål bringer den anden bog, der her skal anmeldes, ind i billedet: *Kemeny, Snell and Thompson: Introduction to Finite Mathematics*.

Forfatterne har her stillet sig den opgave at fremstille et stof, der først og fremmest kunne tænkes at anvendes som et *sprog*, der er hensigtsmæssigt i behandling af økonomiske og andre socialvidenskabelige problemer. Bogen indeholder en sammenhængende fremstilling, der begynder med symbolsk logik, går gennem mængdelære og kombinatorik til sandsynlighedsregning og herfra til vektorer og matricer.

Denne opdeling falder sammen med et pensum, der er anbefalet af en komité, som Social Science Research Council nedsatte med det formål at finde ud af, hvad studerende i socialvidenskab bør kunne af matematik. Man anbefalede to års matematikkursus, heraf eet semester i det stof nærværende bog giver og eet semester i den del af matematikken, der beskæftiger sig med *funktioner*. Efter at dette grundlæggende stof er gennemgået, kan man gå i gang med specialdiscipliner, hvoraf driftsøkonomen har brug for nogle, nationaløkonomen for andre, sociologen for atter andre osv.

Introduction to Finite Mathematics er en begynderbog, der som baggrund kun fordrer kendskab til mellemskolematematik. Den er bygget op på den måde, at alle eksempler har relation til praktiske socialvidenskabelige problemer og det samme er tilfældet med opgaverne. Dette er en forskel fra Nørregaard Rasmussens og Stettings bog, hvor eksemplerne i vidt omfang kan betragtes som en del af bogens tekst, og hvor de løste problemer er af formel natur.

De *anvendte* afsnit, der hos Nørregaard Rasmussen og Stetting kommer som særlige afsnit af hvert kapitel, er hos Kemeny, Snell og Thompson samlet i to afsluttende kapitler, der dels omhandler lineær programmering og spilteori og dels anvendelser i „behavioral science“, der står for det vi andre kalder socialvidenskab plus nogle biologiske fænomener i relation til menneskelig adfærd. Det sidste kapitels indhold burde næsten nævnes: sociometriske matricer, kommunikationsnet, stokastiske processer i arvelæren, markov-kæder i arvelæren, Estes lære-model, ægteskabsregler i primitive samfund, en model af en ekspanderende økonomi og økonomiske ligevægtsbetingelser (to eksempler, der i parantets bemærket kunne være valgt betydelig bedre).

Fremstillingsformen kommer nærmere til det gængse sprog, der anvendes i matematikbøger, medens Nørregaard Rasmussen og Stettings bog i denne henseende tager vidtgående hensyn til sit publikum og er gjort mere litterær. Begge fremstillingsformer har sine egne fordele. Den ideelle lærebog i matematik for økonomistuderende skulle formentlig have Kemeny-Snell-Thompsons disposition og skrives i Nørregaard Rasmussen-Stettings sprog.

Kemeny-Snell-Thompsons bog må sikkert betegnes som en meget heldig løsning af det formål den skulle opfylde. Foruden at være specielt beregnet for folk, der så at sige uden matematiske forkundskaber skal starte et studium i en socialvidenskabelig disciplin, kunne den anvendes af første dels matematikstuderende.

For nogle år siden nedsatte *Mathematical Association of America* en komité til at

reformere matematikundervisningen navnlig på begynderniveauet, den såkaldte *Committee on the Undergraduate Program*. Den første bog „Universal Mathematics“ kom i 1954. Den betegnes som et forsøg, og er iøvrigt disponeret på nogenlunde samme måde som den danske gymnasie matematik og beskæftiger sig med funktioner og grænsebegeret. Senere er der kommet et mere omfattende og omdisponeret grundkursus. „Modern Mathematical Methods and Models“, Vol. I og II. Kemeny, Snell og Thompson har spillet en betydelig rolle i udformningen af disse bøger, der kan betegnes som en mere detaljeret behandling af det stof, de har samlet i „Introduction to Finite Mathematics“. Dog har man naturligvis også funktionsbegeret med. Derfor kan „Introduction“ også med udbytte studeres af matematikstuderende.

Der kunne være grund til at nævne to andre af komiteens bøger, som begge er relevante også for økonomer. Den ene er en elementær mængdelære, der er sammensat af forskellige mindre afhandlinger. Den er en udvidelse af de første to kapitler hos Kemeny-Snell-Thompson. Den anden er professor *Emil Artins* 126 sider korte bog om funktioner, „Calculus and Analytic Geometry“, der efter anmelderens mening er idealtypen på, hvorledes en lærebog i matematik bør skrives. Den er kort, klar og koncis.

Det vil fremgå af denne lille oversigt, at der er flere muligheder for den økonom og den økonomistuderende, der vil skabe sig en vis matematisk baggrund. Den „rigtige“ afhænger naturligvis af hver enkelts behov og hans vilje til at gå i gang med en matematisk tekst. Den lettest læselige for folk, der starter med et helt verbalt grundlag og starter på egen hånd, er sikkert Nørregaard Rasmussens og Stettings bog. For folk, der ønsker et andet oplæg kan man anbefale Kemeny-Snell-Thompson plus Artins bøger. Man må her have in mente, at de to sidstnævnte er skrevet med henblik på en gennemgang under vejledning, medens Nørregaard Rasmussen og Stettings bog har den fordel at være skrevet på en sådan måde, at de kan læses selvstændigt uden nogen synderlig vejledning.

Måske ville den bedste kombination være at man med kendskab til Nørregaard Rasmussen-Stetting „repeterer“ efter de to andre og derved dels får en anden sammenhæng, dels lærer mere matematisk metode og dels får stoffet udvidet på et par væsentlige punkter.

Herefter er man vel udrustet til at gå i gang med specielle afsnit af matematikken, der måtte være relevante for den økonomi, man beskæftiger sig med.