Oversigter og meddelelser

En note om annuitetsberegning ved forudbetaling af renten.

I sædvanlig rentesregning opererer man som bekendt med efterbetaling af renten, idet det beløb, der på et bestemt tidspunkt tilskrives i rente, beregnes ved at multiplicere rentesatsen pr. termin med den kapital, som har været til rådighed i tidsrummet mellem forrige og nuværende rentetilskrivningstidspunkt. I visse tilfælde forlanges renten imidlertid forudbetalt, således at rentebeløbet beregnes af den kapital, der er til disposition mellem nuværende og næste rentetilskrivningstidspunkt.

En sådan klausul på rentebetalingen kan benyttes som konkurrencemiddel, idet et lån kan tilbydes til en lavere rente end sædvanligt og dog give sædvanlig forrentning, hvis blot renten betales forud; dette forekommer således undertiden i time-charter kontrakter i skibsfarten.

I disse tilfælde kan de almindelige rentetabeller imidlertid ikke benyttes direkte, fordi de normale renteformler modificeres en smule.

Med efterbetaling af renten vil en kapital K_t i løbet af en termin være vokset til

$$K_{t+1} = K_t + rK_t\,,$$

hvor r betegner renten pr. termin. Heraf fås

$$K_t = (1 + r)^{-1} K_{t+1}\,,$$

eller generelt i løbet af i terminer

$$K_t = (1 + r)^{-i} K_{t+i}.$$

Med forudbetaling af renten vil en kapital derimod i løbet af en termin vokse således

$$K_{t+1} = K_t + rK_{t+1}\,,$$

hvoraf

$$K_t = (1 - r)^1 K_{t+1}\,,$$

eller generelt

$$K_t = (1 - r)^i K_{t+i}.$$

Altså *Diskonteringsfaktoren, som ved efterbetaling af renten er* $(1 + r)^{-i}$, *bliver ved forudbetaling af renten* $(1 - r)^i$.

Svarende til de sædvanlige annuitetsformler (se f. eks. P. Nørregaard Rasmussen og Lauge Stetting: Matematik for økonomer, Kbh. 1958, pp. 366–370) finder man herefter let de analoge formler gældende ved forudbetaling af renten:

Oversigter og meddelelser

En note om annuitetsberegning ved forudbetaling af renten.

I sædvanlig rentesregning opererer man som bekendt med efterbetaling af renten, idet det beløb, der på et bestemt tidspunkt tilskrives i rente, beregnes ved at multiplicere rentesatsen pr. termin med den kapital, som har været til rådighed i tidsrummet mellem forrige og nuværende rentetilskrivningstidspunkt. I visse tilfælde forlanges renten imidlertid forudbetalt, således at rentebeløbet beregnes af den kapital, der er til disposition mellem nuværende og næste rentetilskrivningstidspunkt.

En sådan klausul på rentebetalingen kan benyttes som konkurrencemiddel, idet et lån kan tilbydes til en lavere rente end sædvanligt og dog give sædvanlig forrentning, hvis blot renten betales forud; dette forekommer således undertiden i time-charter kontrakter i skibsfarten.

I disse tilfælde kan de almindelige rentetabeller imidlertid ikke benyttes direkte, fordi de normale renteformler modificeres en smule.

Med efterbetaling af renten vil en kapital K_t i løbet af en termin være vokset til

$$K_{t+1} = K_t + rK_t ,$$

hvor r betegner renten pr. termin. Heraf fås

$$K_t = (1 + r)^{-1} K_{t+1} ,$$

eller generelt i løbet af i terminer

$$K_t = (1 + r)^{-i} K_{t+i}.$$

Med forudbetaling af renten vil en kapital derimod i løbet af en termin vokse således

$$K_{t+1} = K_t + rK_{t+1} ,$$

hvoraf

$$K_t = (1 - r)^1 K_{t+1} ,$$

eller generelt

$$K_t = (1 - r)^i K_{t+i}.$$

Altså *Diskonteringsfaktoren, som ved efterbetaling af renten er $(1 + r)^{-i}$, bliver ved forudbetaling af renten $(1 - r)^i$.*

Svarende til de sædvanlige annuitetsformler (se f. eks. P. Nørregaard Rasmussen og Lauge Stetting: Matematik for økonomer, Kbh. 1958, pp. 366–370) finder man herefter let de analoge formler gældende ved forudbetaling af renten:

Idet r betegner renten pr. termin og n det antal terminer, annuiteten omfatter, bliver kapitalværdien for enhedsannuiteten efter den sidste ydelse er betalt:

$$s_f \frac{r}{\overline{n|}} = \frac{1}{1-r} + \frac{1}{(1-r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1-r)^n}$$

$$s_f \frac{r}{\overline{n|}} = \frac{1}{r}\left[(1-r)^{-n} - 1\right]$$

Kapitalværdien en periode før første ydelse (den efterbetalte enhedsannuitet) bliver

$$\alpha_f \frac{r}{\overline{n|}} = (1-r) + (1-r)^2 + \ldots + (1-r)^n$$

$$\alpha_f \frac{r}{\overline{n|}} = \frac{1}{r}\left[1 - (1-r)^n\right]\ (1-r)$$

Kapitalværdien umiddelbart før første ydelse (den forudbetalte enhedsannuitet) bliver

$$a_f \frac{r}{\overline{n|}} = 1 + (1-r) + (1-r)^2 + \ldots (1-r)^{n-1}$$

$$a_f \frac{r}{\overline{n|}} = \frac{1}{r}\left[1 - (1-r)^n\right]$$

Heraf kan da enten kapitalværdien, ydelsen, renten eller antallet af ydelser beregnes, når de tre øvrige er kendt. Imidlertid er funktionerne $(1-r)^n$ og $(1-r)^{-n}$ ikke tabelleret i de gængse rentetabeller, og de må derfor i konkrete tilfælde beregnes ved hjælp af logaritmer. (I forbindelse med en beregning af ydelsen i en forudbetalt annuitet og en tabellægning af ydelsens fordeling på rente og afdrag foreligger en kode til nøjagtig beregning af disse funktioner på elektronregnemaskinen DASK).

Principielt kan de almindelige tabeller over $(1+r)^n$ og $(1+r)^{-n}$ dog godt benyttes blot med en anden rentefod r′ end den aktuelle rentefod r, idet r′ bestemmes således:

$$1 + r' = \frac{1}{1-r}$$

[illegible] med

$$r' = \frac{r}{1-r}.$$

Ofte vil man imidlertid i praksis finde sådanne brudne værdier af r′, der ikke forekommer i de almindelige rentetabeller, og en vis approximation bliver i så fald nødvendig.

Den „effektive" rente, r_e, her forstået som den rentesats ved normal efterbetaling af rentebeløbet, som svarer til en bestemt rentesats r_f gældende ved forudbetaling af rentebeløbet, fås analogt ved at sammenholde de to diskonteringsfaktorer:

$$1 + r_e = \frac{1}{1-r_f}$$

$r_f = r_e(1 \div r_f)$
$r_f = r_e \div r_f r_e$
$r_f + r_f r_e = r_e$

$r_f(1+1$
r_f

der giver

$$r_e = \frac{r_f}{1 - r_f}$$

$$r_f = \frac{r_e}{1 + r_e}$$

dvs. at $r_e > r_f$, hvilket jo ikke kan overraske, idet forudbetaling af renten implicerer, at renten erlægges tidligere end ved efterbetaling.

Eks. Et annuitetslån på 10.000 kr. tilbydes til 7 % p. a., renten betales som normalt bagud ,og lånet skal afdrages med årlige ydelser i løbet af 10 år. Første ydelse erlægges 1 år efter lånets etablering, og ydelsen beregnes derfor efter den sædvanlige formel for en efterbetalt annuitet (se anf. litt.) således

$$y = \frac{0{,}07}{1 - 1{,}07^{-10}}\, 10.000$$

$$y = 1424 \text{ kr.}$$

Ændres lånebetingelserne, således at renten forlanges forudbetalt, vil man, såfremt ydelserne skal indgå med samme beløb til samme tidspunkter, kunne tilbyde lånet til følgende rente:

$$r_f = \frac{0{,}07}{1{,}07} = 0{,}06532$$

altså ca. 6,5 %. Som kontrol kan ydelsen ved dette lån beregnes efter formlen for den efterbetalte annuitet med forudbetaling af renten, jfr. oven for: 1)

$$y = \frac{0{,}06532}{0{,}9347\,(1 - 0{,}9347^{10})} \cdot 10.000$$

$$y = 1425 \text{ kr.}$$

(beregnet med fircifrede logaritmer).

Aage Melbye[1]).

1)

$$\alpha_{\overline{n|}}^{r} = G'$$

$$G' = \frac{y}{r}\left[1 \div (1 \div r)^n\right](1 \div r)$$

$$y\,\frac{\left[1 \div (1 \div r)^n\right](1 \div r)}{r} = G'$$

$$y = \frac{r}{(1 \div r)\left[1 \div (1 \div r)^n\right]}\, G'$$

[1]) cand. polit, afdelingsleder ved Regnecentralen, København.