En sannsynlighetsmodell for valg av kapasitetsstørrelse.

Av Tor Rødseth [1])

I økonomisk teori er spørsmålet om valg av produksjonsstørrelse på kort sikt inngående behandlet. Spørsmålet om hvor stor produksjon en skal basere seg på under en mere langsiktig synsvinkel kommer derimot mere sjelden frem. Det er uten videre klart at dette er et essentielt spørsmål i investeringsteorien. I den vanlige formulering betrakter vi kapasitetsproblemet som et spørsmål om optimal kapitalanvendelse. Vi skal her se på en modell hvor produksjonvolumet på lengere sikt er den eksplisitte variabel. Denne modellen illustrerer hvilke forhold som ligger bak valget av produksjonstørrelse, og dermed kapasitet eller kapitalanvendelse på lengere sikt.[2])

Vi betrakter produksjonen av en enkelt vare, og forutsetter svært enkle forhold (a) fast produktpris og (b) konstante variable kostnader pr. produktenhet. De faste kostnader tenker vi oss avhengig av den valgte kapasitet eller produksjonsstørrelse på lengere sikt. Videre tenker vi oss at etterspørslen er en diskret variabel.

Vi får å gjøre med følgende størrelser:

X: produksjonskapasitet på lengere sikt
D_i: etterspurt kvantum i året i
p_i: pris pr. produktenhet i året i
b_i: variable kostnader pr. produktenhet i året i
B: faste kostnader pr. år.

Vi antar nå at de faste kostnader pr. år B, er en gitt funksjon av den valgte produksjonskapasitet (produktmengde pr. år). For enkelhets skyld skal vi videre tenke oss at p_i og b_i ikke varierer over tiden.

[1]) cand. oecon. Høyskolestipendiat, Norges Handelshøyskole.

[2]) En beslektet modell brukt på et annet problem finnes i Churchman, Ackoff and Arnoff: Introduction to Operations Research, New York 1957.

En sannsynlighetsmodell for valg av kapasitetsstørrelse.

Av TOR RØDSETH [1])

I økonomisk teori er spørsmålet om valg av produksjonsstørrelse på kort sikt inngående behandlet. Spørsmålet om hvor stor produksjon en skal basere seg på under en mere langsiktig synsvinkel kommer derimot mere sjelden frem. Det er uten videre klart at dette er et essentielt spørsmål i investeringsteorien. I den vanlige formulering betrakter vi kapasitetsproblemet som et spørsmål om optimal kapitalanvendelse. Vi skal her se på en modell hvor produksjonvolumet på lengere sikt er den eksplisitte variabel. Denne modellen illustrerer hvilke forhold som ligger bak valget av produksjonstørrelse, og dermed kapasitet eller kapitalanvendelse på lengere sikt.[2])

Vi betrakter produksjonen av en enkelt vare, og forutsetter svært enkle forhold (a) fast produktpris og (b) konstante variable kostnader pr. produktenhet. De faste kostnader tenker vi oss avhengig av den valgte kapasitet eller produksjonsstørrelse på lengere sikt. Videre tenker vi oss at etterspørslen er en diskret variabel.

Vi får å gjøre med følgende størrelser:

X: produksjonskapasitet på lengere sikt

D_i: etterspurt kvantum i året i

p_i: pris pr. produktenhet i året i

b_i: variable kostnader pr. produktenhet i året i

B: faste kostnader pr. år.

Vi antar nå at de faste kostnader pr. år B, er en gitt funksjon av den valgte produksjonskapasitet (produktmengde pr. år). For enkelhets skyld skal vi videre tenke oss at p_i og b_i ikke varierer over tiden.

[1]) cand. oecon. Høyskolestipendiat, Norges Handelshøyskole.

[2]) En beslektet modell brukt på et annet problem finnes i Churchman, Ackoff and Arnoff: Introduction to Operations Research, New York 1957.

Det er åpenbart at vi i dette tilfellet kan tenke oss to slags „år" for bedriften, nemlig

a) „gode år" hvor $D \geqq X$
b) „dårlige år" hvor $D < X$.

Det er videre rimelig å tenke seg at den aktuelle produksjon i bedriften vil oscilere mellom D og X, slik at produksjonen er X i gode år og D i dårlige år. Strengt tatt innebærer dette at en ser bort fra produksjon for lager.

Forventet profitt vil være

i gode år: $R = (p - b)\,X - B\,(X)$
og i dårlige år: $R = (p - b)\,D - B\,(X)$.

Vi kan så trekke inn sannsynlighetsfordelingen for D. Dersom denne er gitt vil det si det samme som at for hver gitt X kan vi finne sannsynligheten for at D er større eller mindre enn X. Vi får dermed sannsynlighetene

$$P\,(D \geqq X)$$
og
$$P\,(D < X).$$

Begge disse to sannsynlighetene er avhengige av den X vi velger, og summen er selvsagt lik 1, for en gitt X.

Vi kan nå definere forventet profitt for bedriften for ethvert år etter at kapasiteten er valgt. Denne blir:

$$E\,(R) = [(p-b)\,X - B\,(X)]\,P\,(D \geqq X) + [(p-b)\,D - B\,(X)]\,P\,(D<X)$$

eller mere spesifisert

$$E\,(R) = \sum_{D=X}^{\infty} [(p-b)\,X - B\,(X)]\,P\,(D) + \sum_{D=0}^{X-1} [(p-b)\,D - B\,(X)]\,P\,(D).$$

Dersom vi bytter ut kapasiteten X med X+1 får vi på tilsvarende måte

$$E\,(R,X+1) = \sum_{D=X+1}^{\infty} [(p-b)\,(X+1) - B\,(X+1)]\,P\,(D)$$
$$+ \sum_{D=0}^{X} [(p-b)\,D - B\,(X+1)]\,P\,(D)$$

Og bytter vi ut X med X−1 får vi tilsvarende:

$$E\,(R,X-1) = \sum_{D=X-1}^{\infty} [(p-b)\,(X-1) - B\,(X-1)]\,P\,(D)$$
$$+ \sum_{D=0}^{X-2} [(p-b)\,D - B\,(X-1)]\,P\,(D).$$

Dersom X er den optimale kapasitet, dvs. den kapasitetsstørrelse som maksimerer E (R), så må vi ha

$$E\,(R,X) > E\,(R,X+1)$$

og

$$E\,(R,X) > E\,(R,X-1).$$

Nå er det imidlertid lett å se at E (R,X), E (R,X+1) og E (R,X−1) henger sammen. Vi har f. eks.

$$E(R,X+1) = E\,(R,X) + (p-b \sum_{D=X+1}^{\infty} P\,(D) - B\,(X+1) + B\,(X)$$

og

$$E\,(R,X-1) = E\,(R,X) - (p-b) \sum_{D=X}^{\infty} P\,(D) - B\,(X-1) + B\,(X).$$

Nå er jo imidlertid

$$\sum_{D=X+1}^{\infty} P\,(D) = P\,(D \geqq X+1)$$

og tilsvarende

$$\sum_{D=X}^{\infty} P\,(D) = P\,(D \geqq X).$$

Optimalitetsbetingelsene kan derfor skrives:

$$(p-b)\;P\,(D \geqslant X+1) < B\,(X+1) - B\,(X)$$

og

$$(p-b)\;P\,(D \geqslant X) > B\,(X) - B\,(X-1).$$

Når sannsynlighetsfordelingen for D er gitt, og likeledes den nødvendige kostnadsinformasjon er gitt, vil disse to betingelsene tilsammen bestemme den optimale produksjonskapasiteten. I det tilfellet da B (X) er en lineær funksjon

$$B = aX + a_0$$

får vi

$$B\,(X+1) - B\,(X) = B\,(X) - B\,(X-1) = a.$$

I dette tilfellet kan de to optimalitetsbetingelsene kombineres og vi får

$$D\,(P \geqq X) > \frac{a}{p-b} > P\,(D \geqq X+1).$$

Dersom vi spekulerer nærmere over B-funksjonen, er det nærliggende å uttrykke denne som

$$B = rqK(X)$$

dvs. B kan oppfattes som avhengig av rentefoten r, prisnivået for produksjonskapital, samt mengden av produksjonskapital. Denne siste størrelsen er igjen en funksjon av den ønskete kapasitet. Kapitalvolumet K kan tenkes relatert til den ønskete kapasitet på to måter: (a) ved en klassisk produktfunksjon må vi tenke oss at relasjonen mellom kapasitet og kapitalvolum er fremkommet ved en optimaliseringsprocess, slik at K er den minste størrelse en kan ha for gitt X. (b) ved en produksjonsstruktur af Leontief-typen eksisterer det en „one to one correspondance" melom X og K.

Eksempel: La oss tenke oss at produksjon og etterspørsel bare kan angis i hele tusen. La oss videre tenke oss at stykkprisen p er 7 kr. og at variable enhetskostnader er konstant lik 4 kr. dvs. $p-b=3$ kr. Videre kan vi tenke oss at faste differansekostnader dvs.

$$B(X+1) - B(X) = B(X) - B(X-1) = 2000 \text{ kroner}$$

pr. tusen enheter. Dvs. pr. enhet 2 kroner. Endelig har vi gitt følgende sannsynlighetsfordeling for etterspørslen:

D	P (D)
1000	0.05
2000	0.10
3000	0.15
4000	0.20
5000	0.25
6000	0.10
7000	0.08
8000	0.05
9000	0.02
	1.00

Av kostnadsinformasjonen har vi at

$$\frac{a}{p-b} = \frac{2}{7-4} = 0.67.$$

Ut fra sannsynlighetsfordelingen ovenfor kan vi utlede fordelingen

X	P (D≧X)
1000	1.00
2000	0.95
3000	0.85
4000	0.70
5000	0.50
6000	0.25
7000	0.15
8000	0.07
9000	0.02

Vi skal nå finne en X slik at

$$P\,(D \geqq X+1) < 0.67 < P\,(D \geqq X).$$

Av fordelingen ovenfor ser vi at dette holder for X=4000. Dette er m. a. o. optimal kapasitet når vi ønsker å maksimere forventet profitt.

For fullstendighets skyld skal vi også se litt på det tilfellet da sannsynlighetsfordelingen P (D) ikke er gitt. I dette tilfellet får vi et generelt beslutningsproblem, og for å studere dette er det rimelig å ta utgangspunkt i payoff-matriksen i denne situasjon. Dette er ganske enkelt en opstilling av realisert profitt ved alle kombinasjoner av kapasitetsvalg og faktisk etterspørsel. Matriksen ser slik ut:

		D								
		1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	2000	–1000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
	3000	–3000	0	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000
	4000	–5000	–2000	1000	4000	4000	4000	4000	4000	4000
X	5000	–7000	–4000	–1000	2000	5000	5000	5000	5000	5000
	6000	–9000	–6000	–3000	0	3000	6000	6000	6000	6000
	7000	–11000	–8000	–5000	–2000	1000	4000	7000	7000	7000
	8000	–13000	–10000	–7000	–4000	1000	2000	5000	8000	8000
	9000	–15000	–12000	–9000	–6000	–3000	0	3000	6000	9000

I dette tilfellet kan det tenkes flere ulike „decision criteria" for kapasitetsvalget. Her skal vi bare nevne to, nemlig

a) maksimal forventning ved like sannsynligheter

b) minimax.

Ut fra det sistnevnte kriterium blir åpenbart X=1000 den gunstigste beslutning, siden Min (R) = 1000. Ved forventningsmaksimering ved like sannsynligheter blir X=3000 eller X=4000 den beste beslutning, siden i begge tilfeller E (R)=2000.

Det apparat vi her har skissert kan, med nødvendige modifikasjoner tenkes brukt på to måter: For det første kan de danne grunnlag for aktuelle beslutninger i bedrifter. Dessuten kan en med utgangspunkt i slike betraktninger tenke seg å teste hypoteser om investeringsadferd.

Modellen blir selvsagt mere komplisert om en trækker inn muligheten for lagerhold, men selve problemstrukturen blir den samme.