Om numerisk løsning af „degenererede" lineære programmeringsproblemer.[1])

Af *Svend Danø*[2]).

1. Ved løsning af lineære programmeringsproblemer støder man undertiden på det s. k. *degenerationsfænomen.* Ifølge fundamentalteoremet for lineær programmering vil der – forudsat at optimale løsninger overhovedet findes – altid eksistere en optimal basisløsning, d.v.s. en løsning i m variable, hvor m er antallet af bibetingelser, og ved den praktiske procedure (simplex-metoden) kan man derfor nøjes med at undersøge basisløsninger.

I de fleste tilfælde vil samtlige m variable i en basisløsning være $\neq$ o, men det sker dog af og til, at der på et eller andet trin optræder et eller flere nuller i løsningen under kolonnen P_0 i simplex-tavlen, og den pågældende basisløsning siges da at være degenereret[3]). Det kan forekomme allerede på første trin, nemlig hvis der optræder nuller på højre side af bibetingelserne i deres oprindelige form (de tilsvarende rest- eller hjælpevariable i den første basis vil da blive nul), eller det kan indtræffe senere i beregningerne; hvis det nemlig på et eller andet trin sker, at to (eller flere) basisvariable sætter den *samme* laveste overgrænse for den indgående variabel, vil de begge (resp. alle) blive nul i den følgende basisløsning, uanset hvilken af dem man formelt betragter som udgående variabel.

[1]) Om løsningsproceduren i almindelighed se f. eks. Sven Danø, *Numerisk løsning af lineære programmeringsproblemer*, København 1957. (Udg. af Universitetets økonomiske Laboratorium; stencileret), eller Niels Nielsen, „Simplexmetoden", *Mercantilia*, nr. 2, 1956, hvilken sidste også giver en mere udførlig fremstilling af degenerationsproblemet.

[2]) Cand. polit., p.t. Associate Professor, University of Illinois.

[3]) Degeneration forekommer sjældent i konkrete praktiske problemer, undtagen ved transportproblemet.

Om numerisk løsning af „degenererede" lineære programmeringsproblemer.[1])

Af *Svend Danø*[2]).

1. Ved løsning af lineære programmeringsproblemer støder man undertiden på det s. k. *degenerationsfænomen.* Ifølge fundamentalteoremet for lineær programmering vil der – forudsat at optimale løsninger overhovedet findes – altid eksistere en optimal basisløsning, d.v.s. en løsning i m variable, hvor m er antallet af bibetingelser, og ved den praktiske procedure (simplex-metoden) kan man derfor nøjes med at undersøge basisløsninger.

I de fleste tilfælde vil samtlige m variable i en basisløsning være $\neq 0$, men det sker dog af og til, at der på et eller andet trin optræder et eller flere nuller i løsningen under kolonnen P_0 i simplex-tavlen, og den pågældende basisløsning siges da at være degenereret[3]). Det kan forekomme allerede på første trin, nemlig hvis der optræder nuller på højre side af bibetingelserne i deres oprindelige form (de tilsvarende rest- eller hjælpevariable i den første basis vil da blive nul), eller det kan indtræffe senere i beregningerne; hvis det nemlig på et eller andet trin sker, at to (eller flere) basisvariable sætter den *samme* laveste overgrænse for den indgående variabel, vil de begge (resp. alle) blive nul i den følgende basisløsning, uanset hvilken af dem man formelt betragter som udgående variabel.

[1]) Om løsningsproceduren i almindelighed se f. eks. Sven Danø, *Numerisk løsning af lineære programmeringsproblemer,* København 1957. (Udg. af Universitetets økonomiske Laboratorium; stencileret), eller Niels Nielsen, „Simplexmetoden", *Mercantilia,* nr. 2, 1956, hvilken sidste også giver en mere udførlig fremstilling af degenerationsproblemet.

[2]) Cand. polit., p.t. Associate Professor, University of Illinois.

[3]) Degeneration forekommer sjældent i konkrete praktiske problemer, undtagen ved transportproblemet.

2. Antag f. eks., at vi har følgende problem[4]):

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 2$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$$
$$\tfrac{7}{4}x_1 + 3x_2 + 4x_3 = f = \text{maksimum.}$$

Simplex-tavlerne for de tre første beregningstrin ser ud som følger:

				$^7/_4$	3	4	0	0	
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
I	0	P_4	1	2	1	1	1	0	1
	0	P_5	2	1	2	(4)	0	1	$^1/_2$
	$z_j - c_j$		0	$-^7/_4$	-3	-4	0	0	
II	0	P_4	$^1/_2$	$^7/_4$	$^1/_2$	0	1	$-^1/_4$	1 | $^7/_2$
	4	P_3	$^1/_2$	$^1/_4$	$(^1/_2)$	1	0	$^1/_4$	1 | $^1/_2$
	$z_j - c_j$		2	$-^3/_4$	-1	0	0	1	
III	0	P_4	0	$(^3/_2)$	0	-1	1	$-^1/_2$	0
	3	P_2	1	$^1/_2$	1	2	0	$^1/_2$	2
	$z_j - c_j$		3	$-^1/_4$	0	2	0	$^3/_2$	

I tavle II er der frit valg mellem x_4 og x_3 som udgående variabel, idet de begge sætter grænsen 1 for den indgående variabel x_2. Lad os f. eks. vælge x_3; resultatet bliver da som vist i tavle III. I denne basisløsning er der kun 1 variabel, der er $\neq 0$, således at løsningen er degenereret; ikke blot den udgående variabel x_3, men også x_4 er blevet nul. Men vi beholder formelt x_4 i basen, blot altså med værdien nul, da vi ellers ville afskære os fra at fortsætte beregningerne. Simplex-kriteriet er jo ikke tilfredsstillet i tavle III, og vi skulle derfor gerne kunne arbejde os videre skridt for skridt gennem nye basisløsninger, indtil vi støder på en, der er optimal.

Vi regner da videre fra tavle III. Med x_1 som indgående variabel bliver det nu x_4, der skal ud. Ganske vist udelukker dette, at x_1 kommer ind med

[4]) Læseren bør selv regne eksemplet igennem.

nogen positiv værdi; x_4 er nul i forvejen og sætter derfor grænsen nul for x_1 – positiv x_1 ville gøre x_4 negativ i den næste basisløsning – men dette betyder blot, at vi indfører x_1 som nulvariabel i basen i stedet for den hidtidige nulvariabel x_4. Vi kommer da til en ny degenereret basisløsning, jfr. tavle IV.

IV	$^7/_4$	P_1	0	1	0	$-^2/_3$	$^2/_3$	$-^1/_3$
	3	P_2	1	0	1	$^7/_3$	$-^1/_3$	$^2/_3$
	$z_j - c_j$		3	0	0	$^5/_3$	$^1/_3$	$^4/_3$

Simplex-kriteriet er nu tilfredsstillet, og løsningen i tavle IV er altså optimal.

Vi bemærker, at basisløsningerne i de to sidste tavler i virkeligheden er identiske, idet de begge er ensbetydende med den degenererede løsning i 1 positiv variabel[5])

$$x_2 = 1, \qquad f = 3;$$

alle andre variable er lig med nul, og det gør ingen reel forskel, om man formelt betragter en hvilken som helst af dem som en basisvariabel, der indgår i basisløsningen med værdien 0. Heraf følger, at allerede løsningen i tavle III var optimal til trods for, at simplex-kriteriet ikke var tilfredsstillet; eksemplet illustrerer således, at kriteriet ikke er en nødvendig betingelse for optimum, når basisløsningen er degenereret[6]). Dette voldte imidlertid ingen vanskeligheder i beregningerne, idet vi blot fortsatte til en ny basis (tavle IV), hvor alle simplex-koeffienter viste sig at være positive, og som derfor med sikkerhed var optimal, idet simplex-kriteriet *altid* er en *tilstrækkelig* betingelse for optimum.

3. Den omstændighed, at der på et vist trin optrådte degeneration, hindrede os altså ikke i at nå frem til en optimal løsning ved den normale simplex-procedure, og tilsyneladende skulle degeneration således ikke byde på nogensomhelst beregningsmæssige vanskeligheder. Imidlertid er der ved degeneration – men også kun da – altid en teoretisk mulig-

[5]) At der må eksistere degenererede løsninger, ses umiddelbart af, at P_0 er proportional med P_2 i tavle I; dette viser jo, at det er muligt at tilfredsstille bibetingelserne ved at tage kun 1 variabel „i brug", nemlig x_2.

[6]) Jfr. Sven Danø, „Lineær programmering", *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, 1956, p. 130 n. – Pointen er, at selv om simplex-koefficienten $z_1 - c_1$ i tavle III viser, at løsningen kunne forbedres, hvis x_1 kunne „tages i brug", så er dette ikke muligt, fordi det ville gøre x_4 negativ.

hed for, at proceduren ikke fører frem, selv om det i de allerfleste tilfælde vil gå godt. Når man arbejder sig igennem en serie degenererede basisløsninger, der er identiske på nær den variabel, der formelt indgår i basisløsningen med værdien nul (jfr. tavle III og IV ovenfor), *kan* det nemlig ske, at en af disse baser vender tilbage, før man er nået frem til en løsning med lutter positive simplex-koefficienter, hvorefter den samme serie gentages i det uendelige. Proceduren kører da i ring og fører ikke til målet i løbet af et endeligt antal trin.

Man kan imidlertid vise, at risikoen for dette cirkulationsfænomen („cycling") kan udelukkes ved et hensigtsmæssigt valg af udgående variabel i de tavler, hvor der er flere at vælge imellem som følge af, at flere variable sætter den samme laveste overgrænse for den indgående variabel (jfr. ettallerne i marginen ud for tavle II). Hvor det således „står lige" mellem to eller flere kandidater, vælger man den, der giver den laveste værdi for kvotienten x_{i1}/x_{ik}, d.v.s. forholdet mellem tallet under kolonne P_1 og det tilsvarende tal i den indgående variabels kolonne, P_k.[7]) Er der herefter stadig flere kandidater går man videre til kolonne P_2 og beregner for hver af dem kvotienten x_{i2}/x_{ik}, etc. etc., indtil alle kandidater er blevet elimineret på nær én, som da bliver den udgående variabel. Den bliver normalt bestemt allerede i kolonne P_1 eller P_2.

Anvendt på tavle II ovenfor indebærer denne regel følgende: Idet x_2 er den indgående variabel, er der 2 muligheder m. h. t. valget af den udgående, idet $\bar{x}_4/x_{42} = \bar{x}_3/x_{32} = 1$. Vi erstatter da tællerne (fra P_0) med de tilsvarende elementer fra P_1 og får: $x_{41}/x_{42} = {}^7/_2$, $x_{31}/x_{32} = {}^1/_2$, som noteres i marginen; det sidste tal er lavest, altså skal x_3 være udgående variabel.

Følger man denne simple tommelfingerregel[8]), er man altid på den sikre side. Som regel vil simplex-proceduren også føre frem, selv om man vælger den udgående variabel på anden måde blandt de mulige kandidater, f. eks. tilfældigt; man skal være meget uheldig, for at der indtræder cirkulation (i eksemplet ovenfor vil det således ikke kunne ske, selv om man vælger x_4 i tavle II). Men man kan lige så godt anvende regelen, når den jo dog uden mindste besvær giver et kriterium, der så at sige gratis sikrer mod enhver risiko for, at simplex-proceduren ikke skulle være konvergent.

7) Den laveste kvotient kan godt være negativ.

[8]) Regelen, der skyldes *A. Charnes*, er udledt af en modificeret simplex-procedure, der går ud på at „vride" problemstillingen ganske lidt, idet P_0 erstattes med $P_0\varepsilon + P_1\varepsilon^2 + \ldots\ldots + P_n\varepsilon^n$, hvor ε er et meget lille positivt (men uspecificeret) tal. Løser man dette udvidede problem – hvoraf det oprindelige problem er specialtilfældet $\varepsilon = 0$ – vil man se, hvorledes degeneration og dermed risikoen for cirkulation er elimineret på ethvert trin; grænserne i marginen ud for tavlerne kan aldrig falde sammen, da de kommer til at indeholde hvert sit forskellige polynomium i ε. (I tavle II bliver grænserne henholdsvis $1 + 7/2\,\varepsilon + \ldots$ og $1 + 1/2\,\varepsilon + \ldots$; det er koeffecienterne i disse polynomier, der noteres i marginen til højre). Polynomierne domineres af de led, der er af lavest grad; som regel er allerede 1. – eller 2. grads leddenes koefficienter – der viser sig at være x_{iz}/x_{ik} resp. x_{i2}/x_{ik}, jfr. ovenfor – tilstrækkelige til at bestemme den laveste grænse. Den optimale løsning til det udvidede problem svarer, med ε sat $= 0$, til den optimale løsning til det oprindelige problem. Det anbefales læseren at løse det således udvidede problem; det vil da blive klart, hvorfor det ikke er nødvendigt at skrive ε'erne op.

Rettelse:

I *Sven Danøs* artikel i E.T. nr. 2, 1958: Om transportplanlægning ved hjælp af lineær programmering har der grundet på forf. bortrejse indsneget sig et par misforståelser:

1. Tegningerne på side 74 og side 81 er ombyttede.
2. Overskrifterne over de på side 77–80 opstillede tabeller er trykt som „Tavle I" o.s.v. Denne overskrift skulle have været strøget, idet man i givet fald kan forveksle de tre første med „tavle" betegnede tabelopstillinger med simplextavlerne på side 79 og 80, der løber fra I til V.

Red.