Dynamisk programmering och företagsekonomiska problem

Av Bertil Hållsten [1])

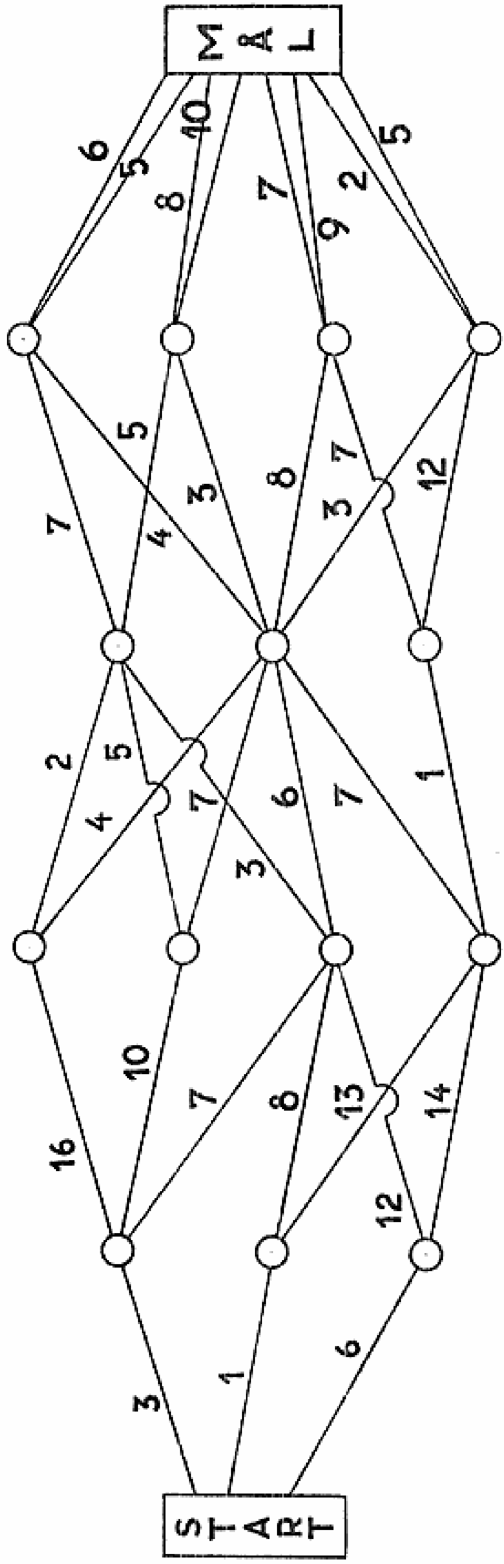
I

Dynamisk Programmering (D. P.) är en matematisk metod, som utvecklats främst av Richard Bellman, Rand Corporation, Californien, och som har visat sig värdefull i vissa av de beslutssituationer som kan möta ett företag. Som namnet antyder är det främst i s. k. „dynamiska" situationer som D. P. är användbar. En beslutssituation kallas dynamisk om beslut vid en tid påverkar beslutsunderlaget för efterföljande beslut. Så till exempel är ett lagerproblem dynamiskt om inköp under första månaden t. ex. genom kvarvarande lager påverkar beslut om inköpskvantitet i den andra månaden (ordertillfälle antages föreligga endast en gång i månaden).

En del situationer har emellertid liknande struktur fastän de inte är i denna mening (tids-)dynamiska. Om det exempelvis gäller att fördela en given (knapp) investeringsbudget på konkurrerande projekt är det tydligt att anslag till ett projekt påverkar besluten om anslag till de återstående. I detta fall motsvaras tidsperioderna (månaderna) av antalet investeringsprojekt och det kan därför vara lämpligt att använda ordet „steg" för dessa och andra motsvarande „uppdelningar" av en situation. D. P. är tillämpbar på sådana fler-stegs beslutproblem, dock med den praktiska begränsningen att antalet påverkande samband mellan stegen inte är alltför stort.

Låt oss först konstatera att eftersom ett visst beslut påverkar förutsättningarna för andra beslut kan man i allmänhet inte nå bästa total-

[1]) Civilekonom, Företagsekonomiska Forskningsinstitutet, Handelshögskolan i Stockholm.


MÅL
START

beslut genom att helt enkelt fatta bästa beslut med avseende på varje enskilt steg. Ett traditionellt angreppssätt för sådana fler-stegs problem är då att samtidigt se problemet i hela dess vidd, d. v. s. med hänsyn till alla steg (månader, investeringsprojekt ...). Man får alltså en hel uppsättning beslutsvariabler och väljer samtidigt bästa värden för hela uppsättningen. Är det ett komplicerat problem kan ett sådant förfaringssätt vara praktiskt ogenomförbart. D. P. erbjuder här ett annat angreppssätt som dessutom kan ge värdeful sidoinformation.

Grunden för D. P. är en mycket enkel men betydelsefull observation som jag skulle vilja illustrera med ett enkelt exempel. Låt figur 1 symbolisera en tävling där det gäller att i fem „dagsetapper" gå från start till mål. Delsträckans längd (mil) anges av motsvarande siffra och om alla är lika besvärliga ur andra synpunkter finns det all anledning att fundera en stund över hur man skall välja för att nå den kortaste totalsträckan.

Om man varje dag träffar sitt val endast med hänsyn till den etapp som är närmast förestående har man uppenbarligen ingen garanti för att nå bästa totala resultat. I vårt exempel skulle en sådan politik ge avståndet 25, $(1+8+3+5+8)$. En sådan politik skulle vara rationell under förutsättning att man inte känner till mer än just den närmast förestående „dagen". I figuren har vi i stället en annan extrem situation; all relevant information är given.

I detta avseende skulle vi få större likheter med de beslutssituationer som möter företagen genom att antaga någon mer mellanliggande informationsgrad t. ex. de närmaste alternativen är kända och beträffande tiden längre bort har man vissa föreställningar men inte fullständig kunskap. Ett realistiskt inslag skulle också kunna vara att det går att skaffa information men endast med viss uppoffring.

Låt oss emellertid använda exemplet som det är och undersöka vad nytta vi kan ha av vår fullständiga information. Jag föreslår att läsaren stannar några minuter och funderar först över vilket som är den kortaste vägen i figur 1 och därefter över sitt eget sätt att angripa problemet.

Låt mig därefter presentera fig. 2, som är ett förslag till lösning. Jag vill också införa vissa symboler, som kanske förefaller tillkrånglade för det aktuella exemplet men som vi kan ha viss nytta av i fortsättningen. Vi har tidigare talat om steg och i figuren menas med steg en förflyttning i horisontalled, det finns således i exemplet fem steg. För varje steg finns det olika nivåer, t. ex. efter start kan man nå nivå 1

$f_1(1) = \min[\ 6{,}5\ ] = 5$

$f_1(2) = \min[8{,}10] = 8$

$f_1(3) = \min[\ 7{,}9\ ] = 7$

$f_1(4) = \min[\ 2{,}5\ ] = 2$

$f_2(1) = \min[7 + f_1(1), 5 + f_1(2)] = 12$

$f_2(2) = \min[4 + f_1(1), 3 + f_1(2), 8 + f_1(3), 3 + f_1(4)] = 5$

$f_2(3) = \min[7 + f_1(3), 12 + f_1(4)] = 14$

$f_3(1) = \min[2 + f_2(1), 4 + f_2(2)] = 9$

$f_3(2) = \min[5 + f_2(1), 7 + f_2(2)] = 12$

$f_3(3) = \min[3 + f_2(1), 6 + f_2(2)] = 11$

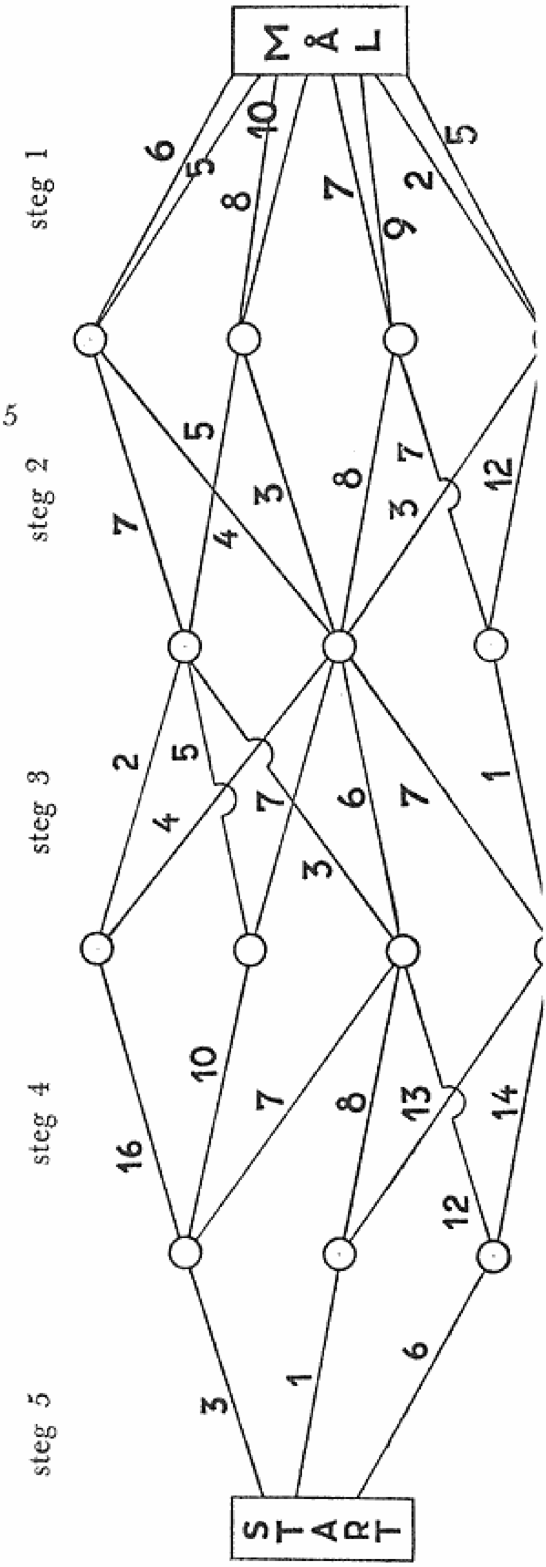
$f_3(4) = \min[7 + f_2(2), 1 + f_2(3)] = 12$

$f_4(1) = \min[16 + f_3(1), 10 + f_3(2), 7 + f_3(3)] = 18$

$f_4(2) = \min[8 + f_3(3), 13 + f_3(4)] = 19$

$f_4(3) = \min[12 + f_3(3), 14 + f_3(4)] = 23$

$f_5(5) = \min[3 + f_4(1), 1 + f_4(2), 6 + f_4(3)] = 20$



genom att ta den översta vägen (3 mil), nivå 2 genom den näst översta vägen (1 mil) och så vidare. Dessa nivåer hänför sig alla till samma steg.

Vi kan nu rulla upp problemet „bakifrån"[2]). Antag att vi endast har ett steg till målet. Beroende på från vilken nivå vi startar denna en-stegsprocess blir det då 6, 5, 8, 10, 7, 9, 2 eller 5 mil till målet. I detta fall är det hela tämligen självklart men låt oss ändå införa en symbol för det kortaste avståndet till målet. Detta avstånd beror på, är en funktion av, nivån (dvs. utgångsläget) så vi tecknar $f_1(1)$ för det kortaste avståndet i ett en-stegsproblem, när man startar från nivå 1 (dvs. den översta nivån). I exemplet ser vi alltså att $f_1(1)=5$ och på motsvarande sätt $f_1(2)=8$, $f_1(3)=7$ och $f_1(4)=2$.

Det här kan ju tyckas som onödigt trassel men vi kan i alla fall ha lite nytta av det, om vi fortsätter analysen och antar att vi är två steg från målet, alltså i någon av de tre nivåer, varifrån vägarna 7, 5, 4, 3, 8, 3, 7, 12 utgår. Antag att vi är på den andra nivån och att vi vill ha tag på den kortaste vägen till målet, dvs. vi sökar $f_2(2)$. För att ta oss till steg 1 har vi nu fyra vägar att välja mellan på 4, 3, 8 resp. 3 mil. Det är emellertid inte alldeles uppenbart, att vi skall gå någon af 3 mill vägarna, det beror ju en del på vad som kommer senare. Ett systematiskt tillvägagångssätt vore att beräkna avståndet efter alla tänkbara vägar ända fram till målet. Detta är emellertid onödigt besvär, kommer vi till steg 1, nivå 1, så vet vi sedan tidigare att minsta avståndet därifrån till målet är $f_1(1)=5$. För att välja den bästa vägen från steg 2, nivå 2, jämför vi alltså endast $[4+f_1(1)]$, $[3+f_1(2)]$, $[8+f_1(3)]$ och $[3+f_1(4)]$ dvs. $[4+5]$, $[3+8]$, $[8+7]$ och $[3+2]$. Den lägsta summen är 5, dvs. $f_2(2)=5$, och vi skall alltså välja den nedersta vägen. På motsvarande sätt erhålles $f_2(1)=12$ och $f_2(3)=14$.

Om vi nu betraktar en trestegsprocess kan vi ha nytta av våra olika $f_2(\ )$-värden. Från steg 3, nivå 3, kan vi gå på två sätt till steg 2. Antingen går vi på 3 mil till nivå 1 eller på 6 mil til nivå 2. Den kortaste vägen är den kortaste av $(3+f_2(1))$ och $(6+f_2(2))$ eller med annat uttryckssätt $f_3(3) = \min[3+f_2(1),\ 6+f_2(2)]$, dvs. $f_3(3) = \min[15, 11]=11$.

På detta sätt beräknar vi samtliga $f_3(\ )$-värden och i steb 4 använder vi dem för att erhålla $f_4(\ )$-värden, vilka i sin tur användes i steg 5, det sista steget.

I figuren kan läsaren själv verifiera att övriga $f(\ )$-värden har be-

[2]) Man kan också tänkasig att med en likartad metod börja „framifrån". Detta kommer att diskuteras senare i uppsatsen.

räknats på det sätt som angivits ovan. Vi har nu systematiskt löst exemplet och kan känna oss tämligen säkra på att den kortaste vägen verkligen är 20 mil $(1+8+6+3+2)$.

Det här exemplet är avsett att betona det naturliga och nästan självklara i den „optimalitetsprincip“, som dr. Bellman formulerat och som är grundläggande för dynamisk programmering.

„En optimal politik har den egenskapen att oavsett utgångsläget och utgångsbeslut måste de följande besluten vara optimala med avseende på det läge som uppkommit efter tidigare beslut“.

Detta är naturligtvis att fatta som en nödvändig men ej tillräcklig definition på optimal politik. För att återgå till exemplet. Om vi på ett eller annat sätt hamnat i steg 3, nivå 4 (vårt närmaste val står alltså mellan vägarna 7 och 1 mil) så säger optimalitetsprincipen att den enda väg som kan tänkas ingå i en optimal väg (politik) från start till mål är den som ger avståndet $f_3(4)$ dvs. 12 mil från steg 3 nivå 4 till målet. Däremot är det inte alls säkert att denna väg kommer att ingå i den kortaste vägen från start till mål för det är kanske över huvud inte lönsamt att passera steg 3, nivå 4. Kommer vi emellertid dit behöver vi alltså inte fundera över alla de 12 tänkbara sätt att gå därifrån till målet, utan behöver endast ta hänsyn till den väg som ger $f_3(4)$.

Ett hänsynstagande till denna optimalitetsprincip kan alltså väsentligt förminska problemets dimensioner. Från startpunkten och ända fram till målet finns det inte mindre än 84 olika vägar att ta hänsyn till.

Med de skisserade angreppssätten är det i stället endast fyra vägar aktuella $3+f_4(1)$, $1+f_4(2)$ och $6+f_4(3)$. Visserligen kräves för beräkning av $f_4(\ )$ en tidigare beräkning av $f_3(\ )$, som i sin tur bygger på $f_2(\ )$ och $f_1(\ )$ men det sammanlagda antalet vägar som man måste ta hänsyn till är ändå inte fler än 34, och varje sådan jämförelse omfatter endast en vägsträcka plus ett $f(\ )$-värde. Vi skulle kunna uttrycka det så, att dimensionen i problemet har reducerats, vilket visserligen medfört flera delproblem men som dock tillsammantagna blir väsentligt enklare än det stora totalproblemet.

Det exempel som vi hittills diskuterat var konstruerat för att visa hur naturlig en tillämpning av optimalitetsprincipen är. Andra exempel skall i fortsättningen behandlas, där man inte lika lätt av sig själv „kommer på“ detta betraktelsesätt och där alltså D. P. verkligen kommer med något nytt.

Det har tidigare nämnts att D. P. skulle ge sidoinformation. Tillämpat på vårt exempel är meningen med detta yttrande att sedan man har löst problemet på det här diskuterade sättet känner man förutom den bästa vägen från start till mål också den bästa vägen från varje etappändpunkt och till målet. Om man alltså skulla råka hamna i steg 4, nivå 1, behövs inga nya funderingar för att finna den kortaste vägen därifrån och till målet. Detta kanske inte syns särdeles betydelsefullt eftersom vi ha antagit att vi helt och hållet kan kontrollera färden. I stället för den här genomförda baklängsräkningen hade vi kunnat genomföra ett liknande resonemang framifrån. Såsom sidoinformation hade man då fått reda på de kortaste avstånden från starten och till alla etappändpunkter. Vilket tillvägagångssätt som är bäst beror på det praktiska räknandet och vilken slags sidoinformation man är intresserad av.

Jag har valt att gå bakifrån dels därför att det möjligen är mindre intuitivt klart och därför fordrar omsorgsfullare behandling men framför allt därför att det är detta angreppssätt man vanligen möter i litteraturen om D. P. Detta är nog i sin tur till stor del beroende på att man ofta sysslar med stokastiska processer där man alltså inte med säkerhet vet följden av ett beslut och där således det är mycket värdefullt att som sidoinformation få den optimala politiken för varje tänkbart läge.

Innan vi går vidare låt mig endast säga att D. P. som matematisk teori naturligtvis inte sysselsätter sig med ett evigt upprepande av denna princip. Väsentliga teoretiska frågor rör gränsvärdet av $f_n(\ )$ när antalet steg (n) går mot oändligheten och vidare vissa strukturegenskaper hos lösningen. Man kommer här in på variationskalkylens område och för en i matematiskt hänseende otränad läsare är det svårforcerad terräng.

Standardverket inom området är „Dynamic Programming" av Richard Bellman[3]) och tillsammans med Stuart Dreyfus kommer Bellman småningom också att publicera en annan framställning mer lämpad för lekmän.

II

I detta avsnitt skall ett mycket enkelt lagerproblem angripas med den metod som presenterats i föregående avsnitt. Diskussionen av detta exempel är endast avsett som en ytterligare illustration till hur D. P. kan användas, och exemplet presenteras utan andra anspråk.

Vi antar att ett företag har tillfälle att placera order för en viss produkt endast den första dagen varje kvartal och att man nu står inför problemet att bestämma sin inköpspolitik under det närmaste året. Lagret är tomt vid årets början och man önskar inte heller ha något kvar vid årets slut.

[3]) Richard Bellman: „Dynamic Programming", Princeton University Press, 1957.

Behovet under de kommande fyra kvartalen är känt. Alla leveranser (såväl in som ut) antages ske omedelbart, alltså den första dagen varje kvartal.

Vi inför nu följande symboler:

x antalet produktenheter i lager innan ännu den nya ordern inkommit.

y antalet produktenheter i lager sedan den nya ordern inkommit, men innan uttag skett för innevarande kvartal.

s behovet under innevarande kvartal
(5, 7, 4 och 6 enheter under första, andra, tredje resp fjärde kvartalen).

p priset per enhet. Kvalitetsrabatt erhålles på följande sätt:
Vid samtidigt köp av 1–4 enheter är priset = 100
Vid samtidigt köp av 5–8 enheter är priset = 95
Vid samtidigt köp av 9– enheter är priset = 90

c kostnad att placera en order, $c = 10$.

k lagerkostnad per enhet / kvartal, $k = 10$.
k „verkar" på kvantiteten $(y \div s)$.

$f_n(x)$ kostnader för en n-stegsprocess med utgångslager = x om optimal inköpspolitik kommer till användning.

I exemplet gäller vidare att behov av produktion måste mötas, lagerkapaciteten är begränsad till 12 enheter $(12 \geqslant y \geqslant s)$ samt $(y \geqslant x)$.

Vi får nu följande samband (med de restriktioner som framgår ovan):

$$f_1(x) = \min_y \left[p(y \div x) + c + k(y - s) \right],$$ varvid sista termen blir noll eftersom lagret vid årets slut är noll

$$f_n(x) = \min_y \left[p(y - x) + c + k(y - s) + f_{n-1}(y - s) \right]$$
för $n = 2 \ldots\ldots$

Dessa samband kan utläsas så att den lägsta kostnaden för en en-stegsprocess är summan av inköpskostnad, orderkostnad och lagerkostnad när utgångslagret, y,, har fastställts optimalt. För en n-stegprocess tillkommer utöver motsvarande kostnader för den omedelbart förestående perioden även den optimala kostnaden för en (n-1)-stegsprocess med utgångslagret $(y - s)$ vilket alltså blir bestämt i och med att y fastställes.

I ett sådant system av ekvationer kan man inte lösa $f_n(x)$ direkt eftersom den inte är uttryckt i explicit form utan innehåller en term $f_{n-1}(x)$ vilken i sin tur är ett minimum av en funktion av x och y. Man får i stället börja med att lösa det y-värde för vilket parantesen i uttrycket för $f_1(x)$ når sitt minimum. Detta gör det möjligt att uttrycka $f_1(x)$ i explicit form och detta uttryck sätter man så in i den parantes som förekommer i uttrycket för $f_2(x)$. Minimivärdet med avseende på y i denna parantes löses vilket ger $f_2(x)$ i explicit form som man alltså kan sätta in i parantesen för $f_3(x)$ o.s.v.

Detta är i princip det räknesätt som vi använde oss av i föregående exempel när vi för varje steg räknade upp alla tänkbara alternativ och valde det kortaste. I andra problem kan man med analytiska metoder lösa de successiva funktionerna $f_1(x)$, $f_2(x)$ o.s.v. Även i följande exempel skall vi emellertid använda oss av uppräkning vilket förutom pedagogiska fördelar i just detta exempel dessutom torde vara enklast ur räknetekniskt synpunkt.

Vi använder oss av de följande fyra tabellerna och börjar som tidigare bakifrån med att beräkna vilka kostnader vi har i fjärde kvartalet för olika lagersituationer (värden på x). Eftersom vi måste möta kvartalets behov måste y vara minst 6 och uppenbarligen vill vi inte heller överstiga denna kvantitet. Därför kan det uppenbarligen inte vara lönsamt med $x > 6$, vi tabulerar därför kostnaderna i fjärda kvartalet för $y = 6$ och $x = 0, 1, 2 \ldots\ldots 6$.

Tabell 1: [4]) $(y-x)\,p-c, s = 6$

x \ y	6	$f_1(x)$	$\hat{y}$
0	580	580	6
1	485	485	6
2	410	410	6
3	310	310	6
4	210	210	6
5	110	110	6
6	0	0	6

I nästa tabell noterar vi motsvarande kostnader för de två sista kvartalen. Denna tabell utföres för $y = 4, 5 \ldots . 10$ och $x = 0, 1 \ldots . 5$,

[4]) $f_1(x)$ är enligt ovanstående den lägsta kostnaden vid givet x-värde, $\hat{y}$ är det värde på y som ger $f_1(x)$. I denna tabell är dessa kolumner tämligen onödiga, men de medtages för likformighet med övriga tabeller.

(behov måste mötas, lagerkapaciteten tillåter ej att mer än (12–7) föres över från föregående kvartal). För att underlätta en överblick över tabellen har två kostnader skrivits i varje cell. Den övre är summan av de tre första termerna i nedanstående uttryck, den undre är totalsumman alltså inkluderande $f_1(y-s)$, där alltså den sista termen erhålles från tabell 1. Den lägsta kostnaden för varje x-värde är $f_2(x)$ och har i tabellen markerats och utförts i särskild kolum.

Tabell 2: $(y-x)\,p + c + (y-s)\,10 + f_1(y-s), \quad s = 4$

x \ y	4	5	6	7	8	9	10	$f_2(x)$	$\hat{y}$
0	410 990	495 980	600 1010	705 1015	810 1020	870 980	970 **970**	970	10
1	310 890	420 905	505 915	610 920	715 925	820 930	880 **880**	880	10
2	210 **790**	320 805	430 840	515 825	620 830	725 835	830 830	790	4
3	110 **690**	220 705	330 740	440 750	525 735	630 740	735 735	690	4
4	0 **580**	120 605	230 640	340 650	450 660	535 645	640 640	580	4
5	X	10 **495**	130 540	240 550	350 560	460 570	545 545	495	5

Tabellen visar nu att om vi exempelvis har 1 enhet i lager vid början av tredje kvartalet är det billigast att beordra 9 nya enheter som då räcker för både tredje och fjärde kvartalen. Är lagret däremot på 2 enheter ($x = 2$) blir det billigast att köpa 2 enheter till tredje kvartalet och följaktligen 6 enheter till sista kvartalet.

I följande tabell för vi på motsvarande sätt fram beräkningarna att omfatta de tre sista kvartalen. Aktuella värden på x och y för denna tabell är: $x = 0, 1 \ldots\ldots 7$, $y = 7, 8 \ldots\ldots 12$.

Tabell 3: $(y-x)\,p + c + (y-s)\,10 + f_2(y-s), \qquad s = 7$

x \ y	7	8	9	10	11	12	$f_3(x)$	$\hat{y}$
0	675 1645	780 1660	840 1630	940 1630	1040 **1620**	1140 1635	1620	11
1	580 1550	685 1565	790 1580	850 1540	950 **1530**	1050 1545	1530	11
2	485 1455	590 1470	695 1485	800 1490	860 **1440**	960 1455	1440	11
3	410 1380	495 1375	600 1390	705 1395	810 1390	870 **1365**	1365	12
4	310 **1280**	420 1300	505 1295	610 1300	715 1295	820 1315	1280	7
5	210 **1180**	320 1200	430 1220	515 1205	620 1200	725 1220	1180	7
6	110 **1080**	220 1100	330 1120	440 1130	525 1105	630 1125	1080	7
7	0 **970**	120 1000	230 1020	340 1030	450 1030	535 1030	970	7

Vi har nu underlag för att upprätta den sista tabellen omfattande samtliga fyra kvartal. Eftersom man inte hade några produkter i lager vid årets början behöver vi nu endast beräkna kostnaderna förenade med $x = 0$ och y-värden från 5 t.o.m. 12.

Tabell 4: $(y-x)\,p + c + (y-s)\,10 + f_3(y-s), \qquad s = 5$

x \ y	5	6	7	8	9	10	11	12	$f_4(x)$	$\hat{y}$
0	485 **2105**	590 2120	695 2135	800 2165	860 2140	960 2140	1060 2140	1160 2130	2105	5

Av tabellen ser vi alltså, att den billigaste inköpspolitiken medför en kostnad av 2.105 och innebär att en order på 5 enheter placeras för första kvartalet. Detta leder till att vi inte har några produkter i lager vid andra kvartalet ($x = 0$), och i tabell 3 ser vi att det i ett sådant fall är billigast att köpa 11 nya enheter. Kvartalets behov är endast 7 enheter, och av tabell 2 framgår att med 4 som ingående lager i tredje kvartalet är det fördelaktigast att inte placera någon ny order. Detta leder till att vi i fjärde kvartalet får köpa de 6 enheter som då behövs (tabell 1).

Enligt exemplets antaganden startade man processen med tomma lager, och exemplet har lösts för detta fall. En fördel med vårt sätt att attackera problemet bakifrån är emellertid, att vi nu mycket lätt kan bygga ut tabell 4 och se den optimala lagerpolitiken som en funktion av ingående lager. Läsaren kan själv verifiera, att med en enhet i lager den lägsta kostnaden för de fyra kvartalen är 2.025. Vilken inköpspolitik svarar mot denna kostnad?

Det kan också vara värt att påpeka att den inköpspolitik man planerar att följa under året kan modificeras, om en förändring skett i de förutsättningar beräkningen baserats på. Om man inte behöver binda sig för mer än ett kvartal, kan en sådan anpassning ske snabbt. Vi har nu nytta av den sidoinformation, som vår beklängesgång givit upphov till. Har till exempel endast 2 enheter behövts under första kvartalet, är det alltså 3 enheter kvar i lager. Vi kan nu direkt se från tabell 3, att i denna nya situation kan de tre följande kvartalen klaras till en lägsta kostnad av 1.365 om vi köper 9 nya enheter andra kvartalet. Under detta kvartal behövs 7 enheter, och det blir alltså 5 över till tredje kvartalet, då ingen ny order placeras, utan i sista kvartalet inköpes så många enheter att behovet tillfredsställes. På detta sätt har lösningen en stor flexibilitet, och detta är naturligtvis en mycket värdefull egenskap.

III

Det har tidigare antytts att D.P. kan vara en användbar metod också i sådana dynamiska problem som har slumpmässig (stokastisk) karaktär. Det är lätt att konstruera en stokastisk variant av exemplet i föregående avsnitt men för att inte förlänga framställningen skall jag i stället endast ange och kommentera en D.P.-formulering av en stokastisk lagermodell[5]). Förutom tidigare använda beteckningar introducera vi nu:

$\varphi(s)\,ds$	=	sannolikheten att behovet ligger mellan s och s + ds
$k(z)$	=	kostnaden för en reguljär order på z enheter
$p(z)$	=	kostnaden för en expressorder på z enheter, dvs. bristkostnaden.
$f_n(x)$	=	matematisk förväntan av de totala kostnaderna för en n-stegs process som startar med x enheter i lager och under förutsättning av optimal orderpolitik.

[5]) Formuleringen är hämtad från Bellmann „Dynamic Programming", s. 154.

Vi erhåller nu följande rekursiva samband:

$$f_1(x) = \min_{y \leqq x} \left(k\,(y-x) + \int_y^\infty p\,(s-y)\varphi(s)\,ds \right)$$

och

$$f_n(x) = \min_{y \geqq x} \left(k\,(y-x) + \int_y^\infty p\,(s-y)\varphi(s)\,ds + \right.$$

$$\left. + f_{n-1}\,(0) \int_y^\infty \varphi(s)\,ds + \int_0^y f_{n-1}\,(y-s)\varphi(s)\,ds \right)$$

för $n = 2, 3 \ldots.$

Som synes gäller det att i en en-stegs process söka den lagerstorlek, y, som minimerar summan av (1) kostnaderna för periodens inköp, (y–x) enheter, och (2) den förväntade bristkostnaden. Denna sista kostnad får vi genom att väga kostnaden för varje tänkbar bristsituation, $s>y$, med sin sannolikhet och summera dessa vägda tal. Denna summering är vid kontinuerlig fördelningsfunktion för behovet uttryckt genom integralen i uttrycket för $f_1(x)$.

$f_n(x)$ är den lägsta, med avseende på y, summan av fyra termer. De två första är identiska med de för en enstegs process och uttrycker kostnaderna för den omedelbart förestående perioden. Därtill kommer den förväntade kostnaden för en (n–1)-stegs process med optimal orderpolitik.

Med sannolikheten $\int_y^\infty (s)ds$ kommer efterfrågan under den omedelbart förestående perioden att överstiga lagret, y, och alltså lämnas lagret tomt till följande perioder. Den beräknade kostnaden för en sådan situation är $f_{n-1}(0)$ och denna kostnad är alltså i tredje termen vägd med sannolikheten att den skall uppkomma. I fjärde termen är slutligen den förväntade kostnaden för de fall då örman går in i (n–1)-stegs processen med ett faktiskt lager.

Rekursiva samband av ovanstående typ kan lösas genom att man löser $f_1(x)$ i explicit form. därefter $f_2(x)$ osv.

För vissa fall är det också möjligt att direkt lösa det gränsvärde $f(x)$ mot vilket $f_n(x)$ går då $n \to \infty$

Dynamisk programmering har ett stort tillämpningsområde i många av de problem som uppstår i ett företags ekonomiska verksamhet. Som ovan illustrerats med ett enkelt exempel kan vissa inköps- och lagerproblem attackeras med denna teknik. Vid Rand Corporation har man programmerat en computer, IBM 704, för en speciell lagermodell. Investeringsproblem, anskaffning av utrustning, har också formulerats med D.P. liksom även problem då det gäller att fördela knappa resurser mellan konkurrerande ändamål. Produktionsproblem av den typ som kan angripas med linjär programmering kan behandlas med D.P. i de fall då antalet steg, produktionsplaneringsperioder, är stort och restriktionerna inom varje steg är relativt få. Bellman har även formulerat flerstegs „games" med D.P.

Bland praktiska tillämpningar kan nämnas ett produktionsplaneringsproblem vid en avdelning av Lockheed Aircraft Corporation[6]). Det gällde att för skiftande produktionsvolym anpassa anställning, permittering, förflyttning mellan avdelningar, övertidsarbete och legoproduktion, så att produktionsplanen kunde uppfyllas till lägsta kostnad. De dynamiska aspekterna kommer in därigenom att beslut om t. ex. nyanställning under en period påverkar möjligheterna till reguljär produktion under följande perioder.

Inköps- och lagerproblem har också i praktiken behandlats med D.P. Ett OR-team från Case Institute of Technology har formulerat beslutsregler för ett företag som hade att köpa råvaror i en marknad med kraftigt fluktuerande priser[7]).

Att lämna litteraturreferenser inom detta område är lätt. Bellman's „Dynamic Programming" är den fullständiga dominerande framställningen. Under de senare åren har det också förekommit en hel del uppsatser i facktidskrifter. Detta är inte platsen att presentera en förteckning över dessa utan den intresserade läsaren rekommenderas att titta igenom i första hand Management Sciences, Operations Research och Naval Logistics Quarterly.

[6]) Marvin Luther „Minimum-Risk Dynamic Programming of Industrial Manpower Load", presenterad vid ORSA:s möte i Boston 1958.

[7]) Rapporterat i stencilform av M. W. Sasieni, Case Institute of Technology, 1958.