Om den effektive rentefod i en lånetransaktion

Af Svend Fredens[1])

1. Ved løsningen af opgaver i rentesregningen vil man hyppigt kunne komme ud for at skulle bestemme rentefoden (den »*effektive*« rentefod) i en given lånetransaktion. Denne opgave løses som bekendt i princippet derved, at man opstiller en *balance* over de i lånetransaktionen indgående betalinger, hvori den ubekendte er rentefoden i eller visse simple funktioner af denne, f. eks. diskonteringsfaktoren $v = (1 + i)^{-1}$. Vi bemærker her, at der består en eenentydig sammenhæng mellem rentefoden i og diskonteringsfaktoren v, idet der til enhver $i \neq 0$ svarer en bestemt værdi af diskonteringsfaktoren v, og omvendt til enhver endelig værdi af v svarer en bestemt rentefod i.

I de fleste praktiske tilfælde vil afviklingen af et låneforhold strække sig over længere tid, hvad der medfører, at den ubekendte (f. eks. i eller v) i regelen vil forekomme i ret høje potenser i balancen. For et almindeligt kreditforeningslån af annuitetslånetypen med en løbetid på 60 år er balancen således af 120. grad, idet man har[2])

$$k = y \; \frac{1 - v^{120}}{i},$$

hvor k betegner den kurs (køberkursen), til hvilken lånet optages, og y betegner den halvårlige ydelse pr. 100 kr. hovedstol. Under disse omstændigheder ligger det nær at spørge, om man uden videre kan gå ud fra, at balancen kun har een rod, som man kan fortolke som den søgte rentefod. For praktiske formål vil det i almindelighed være tilstrækkeligt at fastslå, om balancen kun tilfredsstilles af een *positiv* rod, idet denne da for praktiske formål kan fortolkes som den søgte effektive rentefod, og vi skal i overensstemmelse hermed i det følgende

[1]) cand. oecon., Århus Universitet.

[2]) Se f. eks. *Svend Andersen:* Finansiering, København 1945, s. 59.

Om den effektive rentefod i en lånetransaktion

Af Svend Fredens[1])

1. Ved løsningen af opgaver i rentesregningen vil man hyppigt kunne komme ud for at skulle bestemme rentefoden (den »*effektive*« rentefod) i en given lånetransaktion. Denne opgave løses som bekendt i princippet derved, at man opstiller en *balance* over de i lånetransaktionen indgående betalinger, hvori den ubekendte er rentefoden i eller visse simple funktioner af denne, f. eks. diskonteringsfaktoren $v = (1 + i)^{-1}$. Vi bemærker her, at der består en eenentydig sammenhæng mellem rentefoden i og diskonteringsfaktoren v, idet der til enhver $i \neq 0$ svarer en bestemt værdi af diskonteringsfaktoren v, og omvendt til enhver endelig værdi af v svarer en bestemt rentefod i.

I de fleste praktiske tilfælde vil afviklingen af et låneforhold strække sig over længere tid, hvad der medfører, at den ubekendte (f. eks. i eller v) i regelen vil forekomme i ret høje potenser i balancen. For et almindeligt kreditforeningslån af annuitetslånetypen med en løbetid på 60 år er balancen således af 120. grad, idet man har[2])

$$k = y \ \frac{1 - v^{120}}{i},$$

hvor k betegner den kurs (køberkursen), til hvilken lånet optages, og y betegner den halvårlige ydelse pr. 100 kr. hovedstol. Under disse omstændigheder ligger det nær at spørge, om man uden videre kan gå ud fra, at balancen kun har een rod, som man kan fortolke som den søgte rentefod. For praktiske formål vil det i almindelighed være tilstrækkeligt at fastslå, om balancen kun tilfredsstilles af een *positiv* rod, idet denne da for praktiske formål kan fortolkes som den søgte effektive rentefod, og vi skal i overensstemmelse hermed i det følgende

[1]) cand. oecon., Århus Universitet.

[2]) Se f. eks. *Svend Andersen:* Finansiering, København 1945, s. 59.

udlede en regel, der tillader os at fastslå, at der i praktisk talt alle tilfælde, hvor der er tale om låneforhold, der er baseret på forud fastsatte gensidige ydelser, findes een og kun een positiv rentefod, der tilfredsstiller balancen.

2. At en låntager modtager kredit betyder i praksis i regelen to ting. Det betyder for det første, at låntageren, efter at have modtaget den aftalte ydelse (de aftalte ydelser) fra långiveren, til gengæld herfor på et *senere* tidspunkt eller *en række senere tidspunkter* skal præstere en eller flere modydelser til långiveren; kredit består altså i regelen i modtagelse af ydelser mod *senere* modydelse. For det andet er kreditsituationen i praksis normalt karakteriseret ved, at låntageren skal tilbagebetale *mere* til långiveren end han i sin tid har modtaget fra denne, d.v.s. at *summen* af debitors modydelser i henhold til den mellem parterne indgåede lånekontrakt normalt er *større* end summen af kreditors ydelser; det er disse »merbeløb«, der — uanset under hvilket navn de enkelte ydelser går i lånekontrakten — repræsenterer forrentningen af lånet[1]).

Når der er tale om *lån med forud fastsatte gensidige ydelser*, vil man vistnok i praksis vanskeligt kunne komme ud for tilfælde, hvor de to nævnte betingelser ikke er opfyldt. De fleste af de i praksis forekommende lånetyper hører til denne gruppe af lån. Anderledes stiller sagen sig i de tilfælde, hvor der er tale om *lån i løbende regning* (f. eks. kassekredit), idet disse vel i almindelighed, for hele lånets løbetid betragtet under eet, opfylder den sidste, men derimod i regelen ikke den første af de nævnte betingelser; lån af denne type falder uden for nærværende undersøgelses rammer.

3. Vi antager i det følgende, at kreditor i henhold til den mellem parterne trufne låneaftale skal præstere ydelserne $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ i tidspunkterne $t_0, t_1, t_2, \ldots\ldots, t_m$, hvor $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_m$, og at debitor til gengæld har forpligtet sig til at præstere modydelserne $b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ i tidspunkterne $T_0, T_1, T_2, \ldots\ldots, T_n$, hvor $T_0 < T_1 < T_2 < \ldots\ldots < T_n$, jfr. fig. 1, hvor kreditors ydelser på sædvanlig måde er afbildet over tidsaksen og debitors modydelser under denne. I det følgende tænker vi os for simpelheds skyld tidsskalaen valgt således, at $t_0 = 0$. Der er naturligvis intet til hinder for, at en eller flere af de med a eller b betegnede betalinger kan have værdien nul.

[1]) Hvis låneforholdet er etableret gennem en »mellemmand« (f. eks. en kredit- eller hypotekforening), kan den effektive rentefod være forskellig for de to parter i låneforholdet, idet f. eks. debitor afgiver visse ydelser, som ikke kommer kreditor (kasseobligationsejeren) til gode, ligesom lånet i så fald kan være af forskellig karakter set fra låntagers og långivers synspunkt.

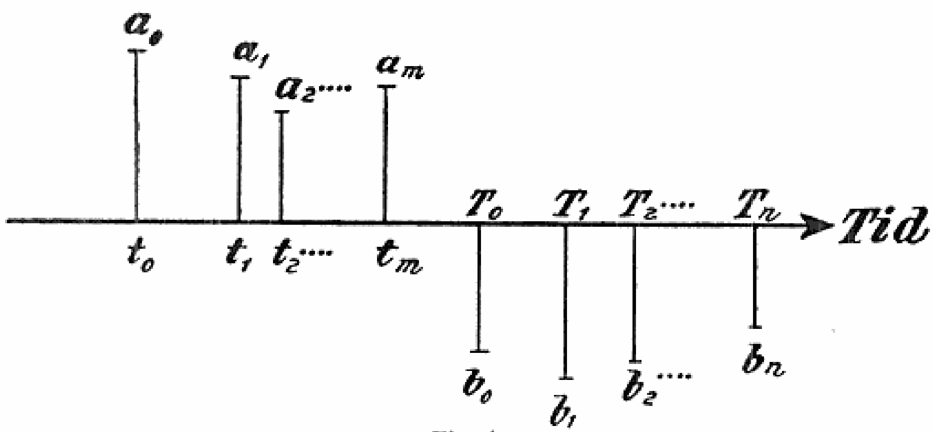

Fig. 1.

Det kan nu vises, at enhver lånetransaktion, der opfylder de i foregående afsnit nævnte to betingelser, altså

(a) sidste ydelse (a_m) fra kreditors side forfalder *senest* til betaling samtidig med første modydelse (b_o) fra debitors side ($t_m \leqq T_0$), og

(b) summen af debitors modydelser er *større* end summen af kreditors ydelser

$$\left(\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu < \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\right),$$

besidder følgende egenskaber (fig. 2):

1) der er een og kun een *positiv* rentefod, som tilfredsstiller balancen,

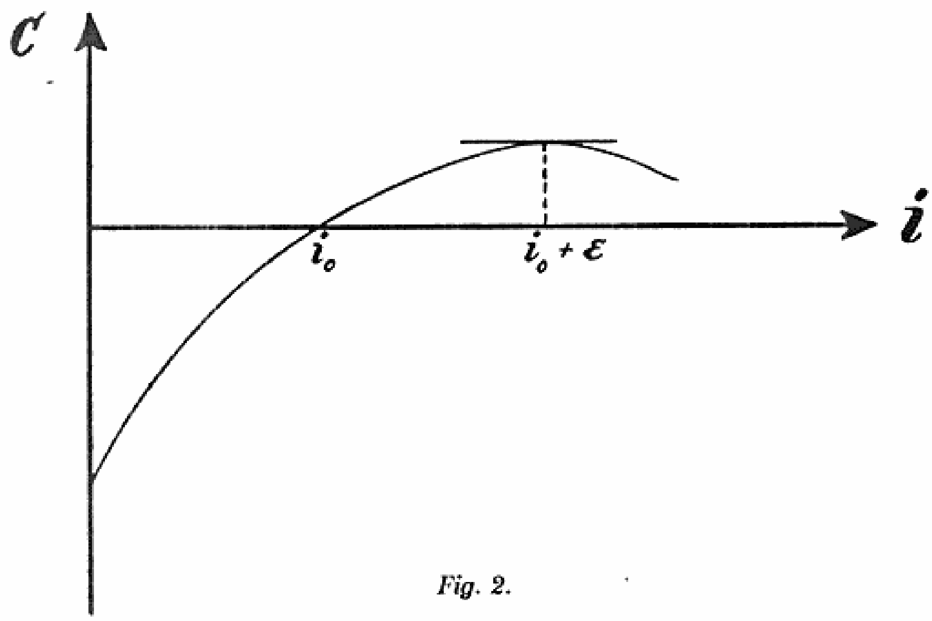

Fig. 2.

eller med andre ord, lånetransaktionen har een og kun een positiv effektiv rentefod; denne rentefod betegnes i det følgende med i_0;

2) den til tidspunktet for lånetransaktionens påbegyndelse, $t_0 = 0$, henførte nutidsværdi, C, af de til lånetransaktionen hørende betalinger (regnet med fortegn) er monotont voksende med voksende opgørelses-rentefod i i et rentefodsinterval, der strækker sig fra $i = 0$ og i hvert fald et stykke til højre for $i = i_0$ (i fig. 2 til $i = i_0 + \varepsilon$).

4. Vi viser først, at enhver lånetransaktion, der opfylder de nævnte betingelser, har een og kun een positiv effektiv rentefod $i = i_0$, eller hvad der åbenbart er ensbetydende hermed, at der i intervallet $0 < v < 1$ findes een og kun een værdi af diskonteringsfaktoren, der tilfredsstiller balancen. Med dette formål for øje bemærker vi, at balancen, idet vi benytter diskonteringsfaktoren v som ubekendt, ved passende valg af tidsenheden kan skrives på formen af en algebraisk ligning i v,

$$C(v) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu v^{t_\nu} - \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu v^{T_\nu} = 0. \tag{1}$$

Da der på venstre side af lighedstegnet i (1) kun forekommer eet fortegnsskifte, har denne ligning ifølge Descartes fortegnssætning[1]) een og kun een positiv rod $v = v_0$. Den hertil svarende værdi af rentefoden, som vi betegner med i_0, bestemmes ved hjælp af ligningen

$$v_0 = (1 + i_0)^{-1},$$

hvoraf

$$i_0 = \frac{1 - v_0}{v_0}; \tag{2}$$

af $v_0 > 0$ kan vi ifølge (2) foreløbig kun slutte, at i_0 må være beliggende i intervallet $-1 < i_0 < \infty$. Det kan imidlertid vises, at i_0 under de i afsnit 3 opstillede forudsætninger må være positiv ($0 < i_0 < \infty$); ved indsætning af $v = 1$ og $v = 0$ i (1) fås nemlig under hensyn hertil

[1]) Denne sætning udsiger bl. a., at antallet af *positive, reelle* rødder i den efter potenser af den ubekendte, x, ordnede algebraiske ligning

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n = 0,$$

er *lig* med antallet af fortegnsskifter mellem koefficienterne $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ på venstre side af lighedstegnet, eller et *lige* antal mindre. F. eks. har den algebraiske ligning

$$f(x) = 20x^6 - 2x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 15x + 100 = 0$$

enten 4, *eller* 2 *eller* 0 positive, reelle rødder.

Hvis der — som i (1) — på venstre side af lighedstegnet specielt kun forekommer *eet* fortegnsskifte, har den algebraiske ligning $f(x) = 0$ een og kun een positiv, reel rod (nemlig en *simpel* rod) i x.

$$C(1) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu - \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu < 0$$

og, idet vi har sat $t_0 = 0$,

$$C(0) = a_0 > 0\,.$$

Nutidsværdien C skifter altså fortegn i intervallet $0 < v < 1$, og da C er kontinuert, må roden v_0 være beliggende i dette interval, og heraf følger, at den til v_0 svarende rentefod i_0, der er den søgte effektive rentefod, må være positiv. Da der endelig til $v = v_0$ kun svarer een rentefod, er det hermed bevist, at enhver lånetransaktion, der opfylder de ovenfor angivne betingelser, har een og kun een positiv effektiv rentefod, nemlig i_0.

5. Vi viser dernæst, at nutidsværdien C af de til lånetransaktionen hørende betalinger er monotont voksende med voksende opgørelsesrentefod i intervallet $0 \leqq i < i_0 + \varepsilon$. Vi bemærker, at

$$(3) \qquad \frac{dC(v)}{dv} = \sum_{\nu=0}^{m} t_\nu a_\nu v^{t_\nu - 1} - \sum_{\nu=0}^{n} T_\nu b_\nu v^{T_\nu - 1}$$

og at $C(v)$ ifølge bemærkningerne i afsnit 4 er $\leqq 0$ i intervallet $v_0 \leqq v \leqq 1$, altså

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu v^{t_\nu} \leqq \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu v^{T_\nu} \qquad \text{for } v_0 \leqq v \leqq 1;$$

af (4) i forbindelse med forudsætningen (a) i afsnit 3 følger umiddelbart

$$\sum_{\nu=0}^{m} t_\nu a_\nu v^{t_\nu} < \sum_{\nu=0}^{n} T_\nu b_\nu v^{T_\nu},$$

eller anderledes skrevet

$$(5) \quad \sum_{\nu=0}^{m} t_\nu a_\nu v^{t_\nu - 1} - \sum_{\nu=0}^{n} T_\nu b_\nu v^{T_\nu - 1} < 0 \qquad \text{for } v_0 \leqq v \leqq 1.$$

Af (3) sammenholdt med (5) følger endelig

$$\frac{dC}{dv} < 0 \qquad\qquad \text{for } v_0 \leqq v \leqq 1\ ,$$

der viser, at nutidsværdien C er en monotont aftagende funktion af v i intervallet $v_0 \leqq v \leqq 1$, og følgelig en monotont voksende funktion af opgørelsesrentefoden i i intervallet $0 \leqq i \leqq i_0$. Da $C'(v)$ er kontinuert og $C'(v_0)$ negativ, kan vi endvidere slutte, at nutidsværdien C er en monotont aftagende funktion af diskonteringsfaktoren (en monotont voksende funktion af opgørelsesrentefoden) i hvert fald i en vis omegn til venstre for v_0[1]) (til højre for i_0), og hermed er sætningen bevist.

[1]) Dette følger iøvrigt allerede af, at v_0 som tidligere anført er en *simpel* rod i ligningen (1).