

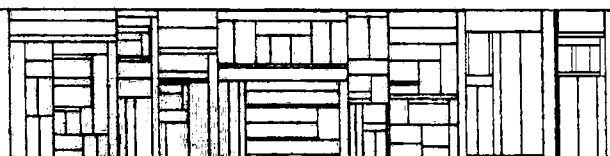
# FIBONACCIFRUGTER

Thyge Knudsen

Oktober 1972

DAIMI PB-7

Matematisk Institut Aarhus Universitet  
DATALOGISK AFDELING



## FIBONACCIFRUGTER

Thyge Knudsen

1. I det botaniske begreb phyllotaxis (bladordning) spiller fibonaccitallene en mystisk rolle. Fibonaccitallene er følgen  $f_0, f_1, f_2, \dots$  bestemt ved den recursive formel

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{k+2} = f_{k+1} + f_k, \quad \text{for } k \geq 0$$

altså følgen 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Denne følge har mange pæne egenskaber, såsom 1)  $\frac{f_{n+1}}{f_n}$  konvergerer mod det gyldne snit  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  når  $n$  går mod uendelig,

$$2) f_{2k+1} = f_k^2 + f_{k+1}^2,$$

3)  $(-\tau)^{-k} = f_{k+1} - f_k \cdot \tau = f_{k-1} - f_k \cdot \tau^{-1}$ , hvoraf vi skal bruge nogle i det følgende.

I naturen vil man opdage, at blade på planter og grene tit er ordnet sådan, at den brøkdel af en hel omdrejning, der skal udføres sammen med en translation langs grenen, for at komme fra et blad til det næste, er konstant (fig. 1a). F. eks. er brøken for elm  $\frac{1}{2}$ , hassel  $\frac{1}{3}$ , eg  $\frac{2}{5}$ , poppel  $\frac{3}{8}$ , pil  $\frac{5}{13}$  osv. I stedet for at sige  $\frac{2}{5}$  omdrejning den ene vej, kan man tale om  $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$  omdrejning den anden vej. På denne måde får vi brøkerne  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$ , hvor tæller og nævner er successive fibonaccital. Tager man en udsprungen solsikke er det nok de færreste, der har tænkt over, hvor fint rørblomsterne i kurvebunden danner logaritmiske spiraler der slynger sig ud fra centrum, et sæt i pos. omdrejningsretning og et sæt i negativ omdrejningsretning. Tæller man spiralerne i de to sæt, kommer man til tal som 34 - 55, 55 - 89 eller 89 - 144 for visse arter. Dvs. også successive fibonaccital. På grankogler og fyrrekogler synes skællene ordnet i rækker, der snor

sig i spiraler op omkring frugten. F. eks. 5 rækker parallelt op den ene vej og 8 andre mere stejlt op den anden vej, eller 8 og 13 rækker. Sådanne frugter kaldes fibonaccifrugter. Annanassen er også en fibonaccifrugt, hvis overflade er inddelt i sekskantede celler, med 5 parallelle rækker, der snor sig op højre om, 8 rækker stejlere venstre om og 13 rækker stejlest igen højre om. I det følgende vil vi angive en konstruktionsmetode for "stiliserede" fibonaccifrugter. Denne metode dannede grundlag for et GIER-algol program, der lavede tegningerne sidst i denne artikel.

2. Vi vil lige indføre nogle betegnelser. Som fælles betegnelse for de morfologiske enheder, der danner mønstret på en frugt, bruger vi "blade". Et blad er altså et kogleskæl, en sekskantet celle på annanasfrugten osv. Bladet sidder på "frugtbunden", som er frugt minus blade. "Bladpunktet" eller blot punktet er centrum af den snitflade, der opstår, når bladet skæres af frugtbunden.

En fibonaccifrugt er løst sagt en frugt, hvis blade danner 2 (eller 3) grupper af parallelle bladrækker, der snor sig op ad frugten i modsatte retninger, og hvor antallet af rækker i hver gruppe forholder sig som 2 (eller 3) successive fibonaccital.

Det er klart, at bladmønstret er en afspejling af bladpunkternes mønster på frugtbunden. Og det spørgsmål melder sig, hvordan man kan konstruere sig et givet mønster punkt for punkt? Som en simpel frugtbund vælger vi først en cylinder  $C$  med radius 1, anbragt i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, så  $z$ -aksen er  $C$ 's akse. Der skelnes mellem cylindriske og almindelige retvinklede koordinater, ved at førstnævnte får suffix  $C$ , f. eks.

$$P = (\Theta, r, z)_C = (x, y, z)$$

hvor  $x = \cos(\Theta) r$ ,  $y = \sin(\Theta) r$  og  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Ved en spiral på  $C$  forstås en kurve med parameterfremstillingen  $(\Theta, 1, h\Theta)_C$  ( $h > 0$  er en konstant der betegner hældningen). Vi definerer et mønster  $M$  på  $C$  som uendelig mange punkter på  $C$  med følgende egenskaber.

1° Enhver spiral på  $C$  der indeholder 2 punkter, indeholder uendelig mange ækvidistante punkter.

2° Der findes ikke 2 punkter med samme tredje koordinat  $z$ .

3° Et punkt ligger i  $O = (0, 1, 0)_C$

Der gælder nu at et mønster  $M$  på  $C$  har disse egenskaber, hvis og kun hvis der eksisterer to positive tal  $\Theta_0$  og  $h$ , så  $M$  består af punkterne  $P_n = (\Theta_0 \cdot n, 1, h \cdot \Theta_0 \cdot n)_C$  for  $n \in \mathbb{Z}$ . Lad nu  $M$  være et mønster på  $C$  bestemt af  $\Theta_0$ ,  $h > 0$ . Bestemmer vi de to punkter på den positive halvdel af  $C$  med kortest afstand fra  $O$  (afstanden på cylinderoverfladen mellem  $O$  og  $P_n$  er  $|OP_n| = \sqrt{\min(n \cdot \Theta_0 \bmod 2\pi)^2 + n^2 h^2}$ ) lad os kalde dem  $P_{n_1} = (\Theta_0 \cdot n_1, 1, h \cdot \Theta_0 \cdot n_1)_C$  og  $P_{n_2} = (\Theta_0 \cdot n_2, 1, h \cdot \Theta_0 \cdot n_2)_C$  indser man let at  $M$  består af punkterne  $(\Theta_0(n_1 \cdot i + n_2 \cdot j), 1, h \cdot \Theta_0(n_1 \cdot i + n_2 \cdot j))_C$   $i, j \in \mathbb{Z}$ . Man kan nu tænke sig  $n_1$  hhv.  $n_2$  parallelle ækvidistante spiraler bestemt ved at en af de  $n_1$  spiraler følger den korteste vej gennem  $O$  og  $P_{n_1}$ , og en af de  $n_2$  spiraler følger den korteste vej gennem  $O$  og  $P_{n_2}$ . Skæringspunkterne mellem spiralerne udgør da mønstret  $M$ , og øjet opfatter faktisk  $M$  som disse skæringspunkter. Det gælder nu om at vælge  $\Theta_0$  og  $h$  så  $n_1$  og  $n_2$  bliver successive fibonaccital. På grund af formlen

$$f_k \cdot \tau^{-1} - f_{k-1} = -(-\tau)^{-k} \text{ vælger vi } \Theta_0 = \frac{2\pi}{\tau} \text{ og får}$$

$$P_{f_k} = \left( \frac{2\pi}{\tau} \cdot f_k, 1, h \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot f_k \right)_C =$$

$$\left( (f_k \cdot \tau^{-1} - f_{k-1}) \cdot 2\pi, 1, h \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot f_k \right)_C = \left( -\frac{2\pi}{(-\tau)^k}, 1, h \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot f_k \right)_C$$

Det ses at  $P_{f_k}$  og  $P_{f_{k+1}}$  ligger på hver sin side af vertikalen gennem  $O$ . Tegnes  $f_k$  ækvidistante spiraler hvoraf en gennem  $O$  og  $P_{f_k}$ , samt  $f_{k+1}$  ækvidistante spiraler, hvoraf en gennem  $O$  og  $P_{f_{k+1}}$ , danner de en vinkel  $\psi$  med hinanden. Desto større  $h$  er desto mindre bliver  $\psi$  og er  $h$  lille bliver  $\psi$  stor. Der findes klart et  $h$  sådan at  $\psi = 90^\circ$ . For et sådant  $h$  er afstandene fra  $O$  til  $P_{f_k}$  og  $P_{f_{k+1}}$  de to korteste. Mønstret fremtræder for øjet som skæringspunkterne mellem de  $f_k$  og de  $f_{k+1}$  spiraler. Der gælder at for et vilkårligt  $h$  har de to punkter, med den korteste afstand fra  $O$ , indices som successive fibonaccital. Ønsker vi at beregne et  $h$  for det mønster, hvor  $f_k$  og  $f_{k+1}$  spiraler skærer

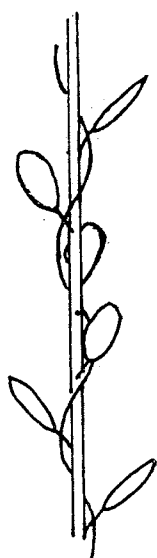
hinanden med vinklen  $\psi$ , løser vi ligningen

$$\overrightarrow{OP_{f_k}} \cdot \overrightarrow{OP_{f_{k+1}}} = |OP_{f_k}| |OP_{f_{k+1}}| \cos(\psi)$$

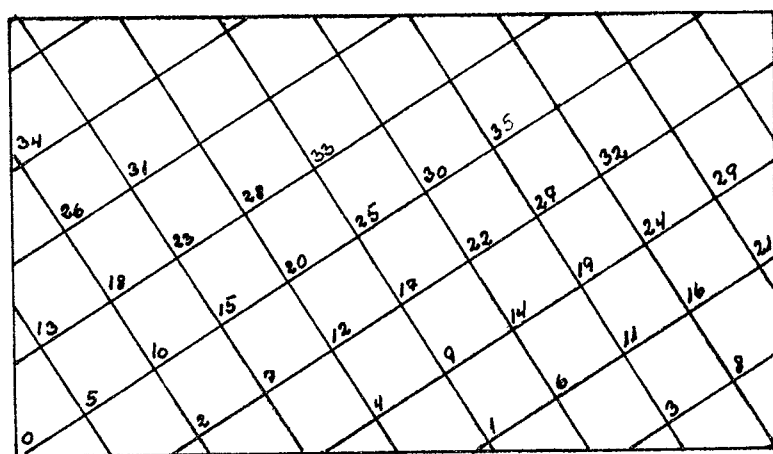
ved hjælp af trigonometriske formler og formlerne for fibonaccitallene. Vi får

$$h = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\cot(\psi)}{f_k \cdot f_{k+1}} + \sqrt{\left( \frac{\cot(\psi)}{f_k \cdot f_{k+1}} \right)^2 + \frac{4}{\tau^{2k+1} f_k \cdot f_{k+1}}} \right)$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{\tau^{2k-1} f_k f_{k+1}}} \quad \text{for } \psi = 90^\circ$$



a.



b.

Fig. 1

(a)  $\frac{2}{5}$  phyllotaxis. (b) Enhedscylindren opskåret, foldet ud og med bladmønster bestemt ved:

$f_k = 5$ ,  $f_{k+1} = 8$ ,  $\psi = 90^\circ$  eller  $(\frac{2\pi}{\tau} n, 1, 0.01122 \frac{2\pi}{\tau} n)_C$  (tallene refererer til  $n$ ).

Lad nu frugtbunden være bestemt ved en positiv konveks og differentiabel funktion  $f$ 's rotationsflade omkring  $z$ -aksen i et almindeligt retvinklet koordinatsystem ( $f(z)$  = radius for frugtbunden i punktet  $(0, 0, z)$ )  $f$  er defineret for  $0 < z_0 \leq z \leq$  frugtlængden. Antag at vi har bestemt  $h$ , for givne  $f_k, f_{k+1}$  og  $\psi$  som anført. Bladpunkterne placeres nu successivt, det første i  $(0, f(z_0), z_0)_C$ . Har vi sat et bladpunkt i  $(\Theta, f(z), z)_C$ , sættes det næste i  $(\Theta + \frac{2\pi}{T}, f(z'), z')_C$ , hvor  $z' = z + h \frac{2\pi}{T} f(z) = z + \Delta z$ . Når  $\Delta z$  således bliver proportional med radius bevares vinklerne så de samme, nu "de formerede" spiraler bliver visuelt dominerende. Hvis vi f. eks. tager en kegleflade og vælger et passende  $h$ , vil det visuelle mønster være såkaldte concho-spiraler (konkylie-) som set fra oven er logaritmiske spiraler (fig. 2a), hvilket nu vises:

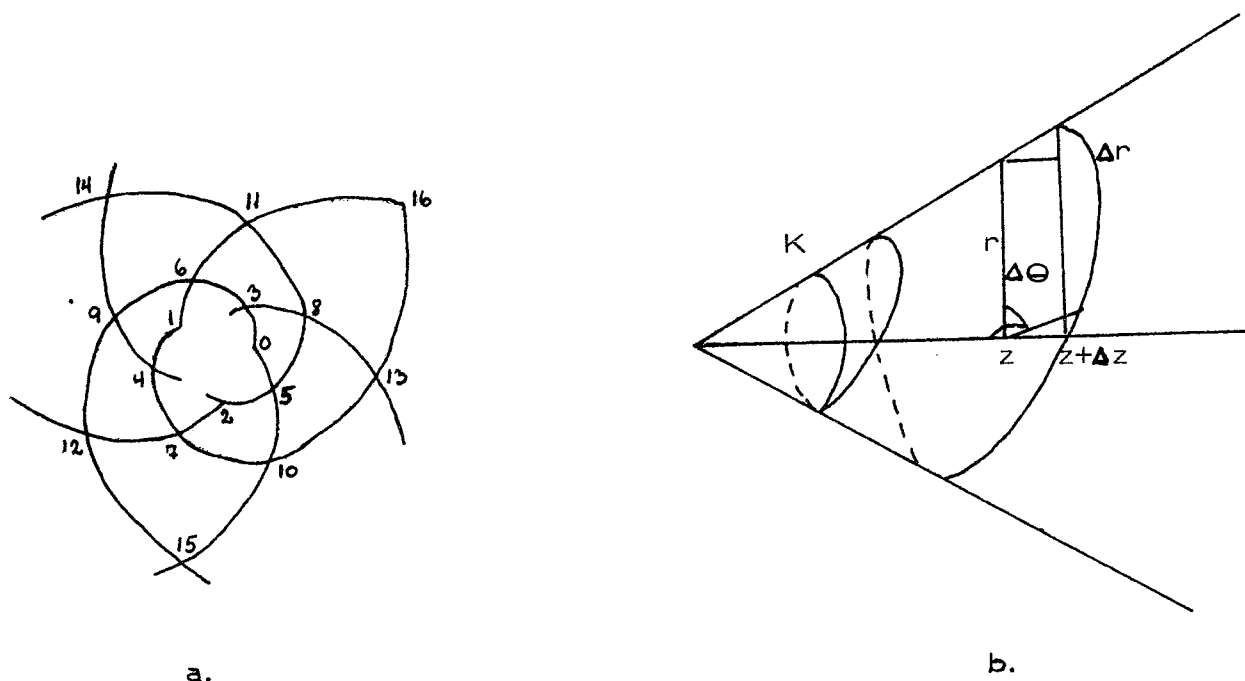


Fig. 2

(a) Koglen  $(\Theta, r, z)_C$  (deriv = 1, dvs.  $r = z$ ) set fra oven med mønster bestemt ved  $f_k = 3, f_{k+1} = 5, \psi = 90^\circ$ . ( $h = 0.02957$ ).

Keglen K (fig. 2b) har parameterfremstillingen  $(\Theta, \text{deriv. } z, z)_C$ , hvor  $\text{deriv} = \text{deriverede af } f = \text{konstant}$ .

$$\Delta r = \text{deriv} \cdot \Delta z = \text{deriv} \cdot h \cdot r \Delta \Theta \quad \text{hvoraf}$$

$$\frac{dr}{d\Theta} = \text{deriv} \cdot h \cdot r \quad \text{som har løsningen}$$

$$r = r_0 \exp(\text{deriv} \cdot h \cdot \Theta), \quad z = z_0 \exp(\text{deriv} \cdot h \cdot \Theta), \quad \text{hvor } r_0 = \text{deriv} \cdot z_0.$$

Det gamle konstruerede mønster er altså tilnærmelsesvis mønstret bestående af punkterne

$$\left(\frac{2\pi}{\tau} \cdot n, r_0 \cdot \exp(\text{deriv} \cdot h \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot n), z_0 \exp(\text{deriv} \cdot h \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot n)\right)_C$$

som kan skrives på to andre former

$$\left(\frac{2\pi}{\tau}(f_k \cdot n + i), r_0 \exp(u_i), z_0 \exp(u_i)\right)_C \quad \text{og}$$

$$\left(\frac{2\pi}{\tau}(f_{k+1} \cdot n + j), r_0 \exp(v_j), z_0 \exp(v_j)\right)_C$$

hvor  $u_i = \text{deriv} \cdot h \cdot \frac{2\pi}{\tau} (f_k \cdot n + i)$ ,  $v_j = \text{deriv} \cdot h \cdot \frac{2\pi}{\tau} (f_{k+1} \cdot n + j)$  og  $i = 0, 1, 2, \dots, f_k - 1$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots, f_{k+1} - 1$ .

Da  $\frac{2\pi}{\tau} \cdot f_k \approx -2\pi(-\tau)^{-k} \pmod{2\pi}$  ser vi at mønstret består af sk ringspunkterne mellem de  $f_k$  og  $f_{k+1}$  spiraler  $(-(-\tau)^{-k+1} \Theta + \frac{2\pi}{\tau} i, r_0 \exp(s_i), z_0 \exp(s_i))_C$ , hvor  $s_i = \text{deriv } h (f_k \Theta + \frac{2\pi}{\tau} i)$  og  $(-(-\tau)^{-k} \Theta + \frac{2\pi}{\tau} j, r_0 \exp(t_j), z_0 \exp(t_j))_C$  hvor  $t_j = \text{deriv } h (f_{k+1} \Theta + \frac{2\pi}{\tau} j)$ . (fig. 2a)

Sådanne concho-spiraler synes bladene også at danne på mange kogler i toppen og i bunden, hvor hældningen er stor. Det er måske mest tydeligt på fyrrekogler. Vi kan nu konstruere en frugtbund med bladpunkter, og i dem skal der sættes blade. Lad os gøre tre antagelser:

1<sup>o</sup> Frugtens bestanddele vokser næsten proportionalt.

2° Morfologiske enheder vokser ud og fylder åben plads op (frugten vokser kompakt).

3° Vinklen  $\varphi$  mellem frugtbundens tangentplan i bladpunktet og det enkelte blad er konstant.

Lad nu  $f$ ,  $h$  og  $\varphi$  bestemme hhv. en frugtbund, et passende bladmønster for denne og en vinkel som i 3°.

Man vælger et to-dimensionalt prototypeblad  $B$  på følgende måde. Dets form er en konveks kontinuert kurve  $K$  i planen. Man ganger så en passende skalar (skf) på denne kurve, sådan at bladene placeret på enhedscylinders overflade, med mønster bestemt ved  $h$ , danner et pænt bladmønster. Skalarfaktoren (skf) kan udregnes ud fra kendskabet til arealet (ar) omsluttet af  $K$ , den brøkdel  $r$  man ønsker skal være synlig af hvert blad samt  $h$ .  $r \cdot \text{skf}^2 \cdot \text{ar} = 2\pi \cdot h \cdot \frac{2\pi}{\tau} = 4\pi^2 \cdot \frac{h}{\tau}$ . Efter regel 1° skal  $B$  forstørres lineært i forhold til radius, hvor bladet sættes på frugtbunden. Men da bladet stritter opad langs frugten, som hos kogler, og da radius ændrer sig op langs frugtbunden, dækker bladet måske mere, måske mindre end det skulle. Derfor anvendes regel 2° og vi ganger en korrigerende faktor på, som er afhængig af hældningen af frugtbunden i bladpunktet. For at finde denne faktor, foretager vi en beregning for en kegleflade (konstant hældning) som frugtbund. Kald  $B$ 's areal  $\text{ar}$ . Til ethvert blad på enhedscylindren  $C$  svarer da  $(h \cdot \frac{2\pi}{\tau}) \cdot 2\pi$  af  $C$ 's overflade. Til  $n + 1$  blade på keglefladen hvor bladpunkterne er bestemt ved  $(\frac{2\pi}{\tau} \cdot n, r_n, z_n)$  hvor

$$r_n = r_0 \cdot \exp(h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot n)$$

$$z_n = z_0 \cdot \exp(h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot n),$$

$r_0 = \text{deriv} \cdot z_0$ , svarer et areal af størrelsen (delkeglefladen mellem  $z_0$  og  $z_n$ )

$$\pi r_n \sqrt{r_n^2 + z_n^2} - \pi r_0 \sqrt{r_0^2 + z_0^2} \approx \pi r_n \sqrt{r_n^2 + z_n^2}$$

når  $n$  er stor.



Bladenes areal er  $\sum_{i=0}^n r_i^2 \Delta \theta =$

$$ar \cdot r_0^2 \sum_{i=0}^n \exp(2 \cdot h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau})^i =$$

$$ar \cdot r_0^2 \frac{\exp(2h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot n) - 1}{\exp(2h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau}) - 1} \approx$$

$$ar \cdot r_0^2 \frac{\exp(2h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot n)}{2h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau}} \quad \text{for } n \text{ stor og } h \text{ lille}$$

Vi vil finde en faktor (fak), så  $ar$  forholder sig til  $4\pi^2 \frac{h}{\tau}$ , som  $fak^2$   
 $ar \cdot r_0^2$

$$\frac{\exp(2h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot n)}{2h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau}} \quad \text{forholder}$$

sig til  $\pi r_n \sqrt{r_n^2 + z_n^2} = \pi r_0^2 \frac{\sqrt{1 + \text{deriv}^2}}{\text{deriv}} \exp(2h \cdot \text{deriv} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cdot n)$  og vi får

$fak = \sqrt[4]{1 + \text{deriv}^2}$ . Såfremt hældningen er negativ, dækker bladene for meget, således at fak skal være mindre end 1, modsat vor beregning for positiv hældning. Sættes  $fak = 1 + \frac{\text{deriv}}{6}$  fås et brugbart udtryk som passer tilstrækkeligt for hældninger mellem -1 og +1.

For at opsummere er vores stiliserede fibonaccifrugt bestemt ved.

1° Frugtbunden - givet ved rotationsfladen omkring z-aksen af en differentiabel konveks funktion  $f(z) > 0$  defineret for  $0 < z_0 \leq z \leq \text{frugtlængden}$ .

2° Bladmønsteret  $M$  - givet ved konstanten  $h$ .

3° Prototypebladet  $B$  - givet ved en kontinuert, konveks kurve i xy-planen, der bestemmer bladformen samt et positivt reelt tal  $r \leq 1$ , der angiver, hvor stor en brøkdel af  $B$  der ikke er overdækket af andre blade, når enhedscylinderen beklædes med blade  $B$  i mønstret  $M$ .

4° Vinklen  $\varphi$  mellem det påsatte blad og tangentplanen i bladpunktet.

3. For at tegne den stiliserede fibonaccifrugt på datamaten er den forenklet yderligere, da det forekommer rigtigt at lade den være bestemt ved endelig mange parametre. Således er  $f$  stykket sammen af 3 andengradsligninger med  $3 \times 3$  koefficienter til ligningerne + 4 parametre til de tre intervaller ialt 13 parametre. Bladet  $B$  er givet på formen  $(bx(t), by(t)) = (a_1 \cos(b_1 t + c_1), a_2 \sin(b_2 t + c_2))$  i et almindeligt retvinklet koordinatsystem i planen, hvilket således kræver 6 parametre. Hvorledes bestemmes kurveligningen for det påsatte blad på frugten? Først er der en fast skalafaktor  $skf$  bestemt af  $(bx, by)$ ,  $h$  og  $r$  som i 3<sup>o</sup> ovenfor. Vi får prototypebladet  $B$  givet ved  $(skf \cdot bx, skf \cdot by)$ . Bladets længderetning er ud af  $x$ -aksen og stilken sidder i  $(0, 0)$ . Skal bladet påsættes i punktet  $(\cos(\Theta) f(z), \sin(\Theta) f(z), z)$  med vinklen  $\varphi$  i forhold til tangentplanen, kan dette ske i fire tem-  
pi:

- 1) En multiplikation af skalafaktorerne  $f(z) (1 + \frac{\text{deriv}}{6})$  på bladet  $B$  som giver bladet  $B'$ .
- 2) En drejning  $\Theta$  i  $xy$ -planen af  $B'$ .
- 3) En drejning  $\omega$  i planen, der er bestemt ved  $B'$ 's længderetning og  $z$ -aksen, sådan at  $B'$  får den rigtige stilling i forhold til tangentplanen i bladpunktet. Denne vinkel  $\omega$  er udtrykt ved  $\varphi$  og  $\text{deriv}$ .  $\omega = \frac{\pi}{2} - (\arctan(\text{deriv}) + \varphi)$  (fig. 3)

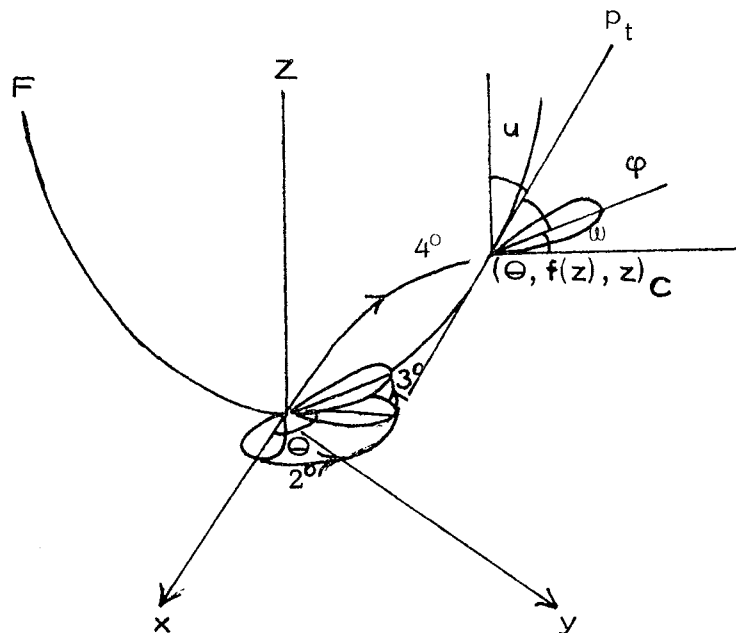


Fig. 3

$F$  = frugtbund,  $p_t$  = tangentplan,  $u$  =  $\arctan(\text{deriv})$  og tallene henviser til de tre flytninger.

- 4) En translation bestemt ved vektoren  $(\cos(\Theta)f(z), \sin(\Theta)f(z), z)$ .

Sammensætningen af 2) og 3) er en ortogonal afbildning med matricen

$$\begin{pmatrix} \cos(\Theta)\cos(\omega) & -\sin(\Theta) & -\cos(\Theta)\sin(\omega) \\ \sin(\Theta)\cos(\omega) & \cos(\Theta) & -\sin(\Theta)\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & 0 & \cos(\omega) \end{pmatrix}$$

Frugten tænkes set fra punktet  $(x_0, 0, z_0) \neq (0, 0, 0)$  og projiceres derfor ned på planen (tegneplanen) med ligningen  $xx_0 + zz_0 = 0$  efter retningen mod  $(x_0, 0, z_0)$ . For  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  gælder at det bliver ført over i punktet

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \frac{1}{x_0^2 + z_0^2 - x_0x - z_0z} \begin{pmatrix} z_0(xz_0 - x_0z) \\ y(x_0^2 + z_0^2) \\ x_0(x_0z - xz_0) \end{pmatrix}, \text{ som}$$

ligger i tegneplanen. Vi vælger nu et almindeligt retvinklet koordinatsystem i tegneplanen hvis 1.-akse er y-aksen i det 3-dimensionale koordinatsystem. 2.-aksen bliver således i forlængelse af  $(-z_0, 0, x_0)$ . Ligger punktet  $(\xi, \eta, \zeta)$  udtrykt i det gamle 3-dimensionale koordinatsystem i tegneplanen, dvs.  $x_0\zeta + z_0\zeta = 0$  er de nye koordinater i det 2-dimensionale system

$$(\eta, \text{sign}(x_0\zeta - z_0\zeta) \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}) \quad (\text{fig. 4})$$

(Fig. 4, se side 11 )

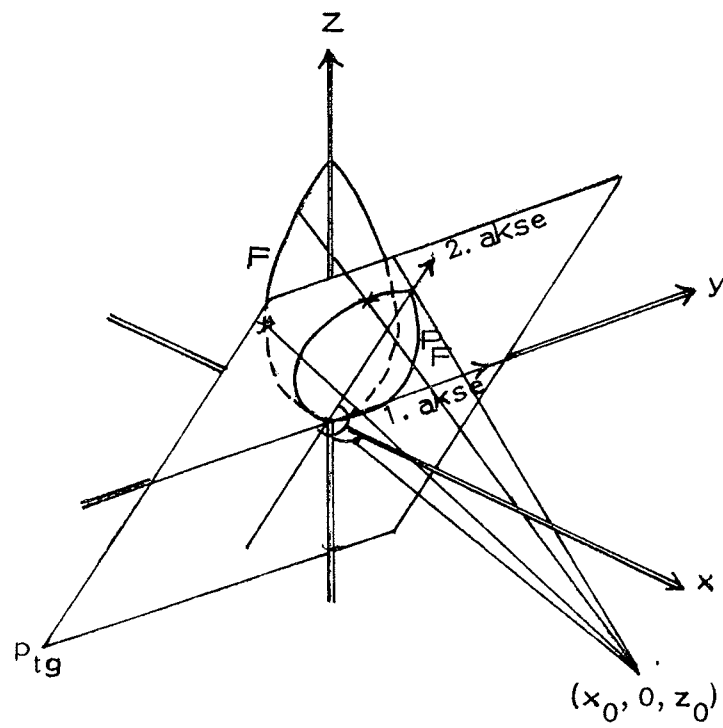


Fig. 4.

$F$  = frugtbund og  $P_F$  =  $F$ 's projektion på tegneplanen  $p_{tg}$  bestemt ved ligningen  $xx_0 + zz_0 = 0$ .

Alt i alt har vi foretaget beregninger, sådan at vi kan tegne projektionen på tegneplanen af ethvert blad på frugten. Nu kan vi naturligvis ikke se blade-  
ne på bagsiden af frugten. For at gøre det hele nemmere vedtager vi, at et  
blad kan ses fra  $(x_0, 0, z_0)$  hvis og kun hvis bladpunktet kan ses. Lad  $\vec{a}$   
betegne vektoren fra  $z$ -aksen til punktet  $P = (\cos(\Theta)f(z), \sin(\Theta)f(z), z)$   
vinkelret på tangentplanen til frugtbunden i dette punkt, og  $\vec{b}$  vektoren fra  
 $(x_0, 0, z_0)$  til  $P$ . Vi får  $\vec{a} = (\cos(\Theta)f(z), \sin(\Theta)f(z), -f'(z))$   
 $\vec{b} = (\cos(\Theta)f(z) - x_0, \sin(\Theta)f(z), z - z_0)$  (fig. 5)

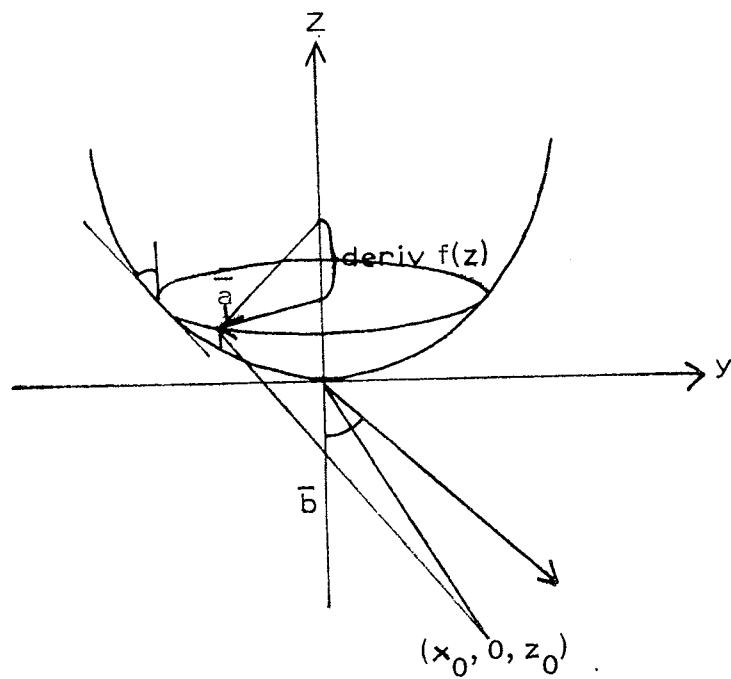
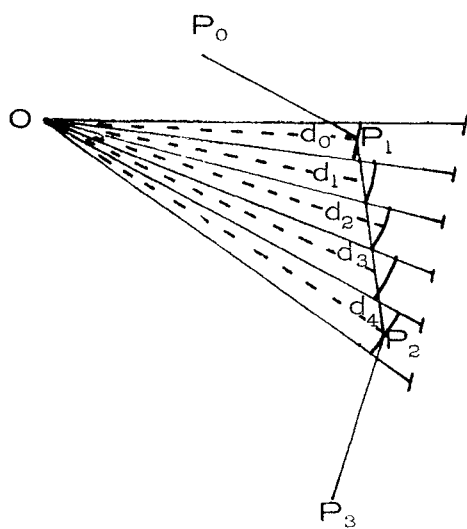


Fig. 5

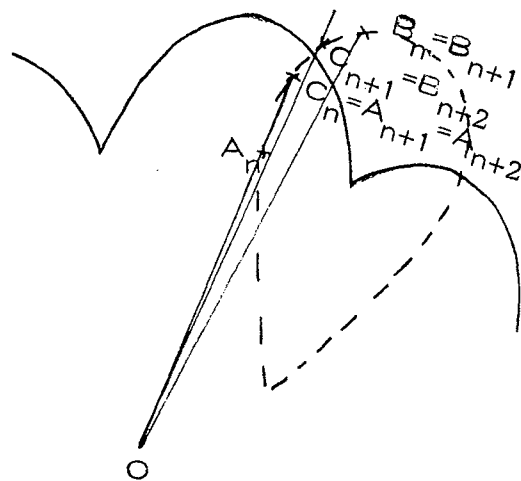
Det ses at hvis  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  ligger  $(x_0, 0, z_0)$  i tangentplanen til  $P$ , hvis  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$  kan  $P$  ikke ses og hvis  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow f(z) < \cos(\Theta) \cdot x_0 + \text{deriv}(z - z_0)$  kan  $P$  ses fra  $(x_0, 0, z_0)$  og bladet skal dermed tegnes. Nu mangler vi blot at sikre os, at de synlige blade ikke bliver tegnet oven i hinanden. Hertil vælges  $(x_0, 0, z_0)$  således at ingen blades inderside kan ses. På denne måde vil de nedre blade altid overlappe de øvre, set fra  $(x_0, 0, z_0)$ , og det vil være naturligt at tegne dem et for ét fra neden. I de allerfleste tilfælde vil det overdækkede areal, efter at det  $n$ 'te blad er tegnet, være således beskaffent, at forbindelseslinien mellem ethvert punkt i arealet og  $(0, 0)$  er indeholdt i det overdækkede på nær en ubetydelighed inde omkring  $(0, 0)$ , stammende fra at frugtens radius er positiv i begyndelsespunktet. Der ses bort fra andre tilfælde. Information om det af blade på tegningen overdækkede areal under tegneprocessen kan så passende være indeholdt i en funktion  $g$  fra  $[0, 2\pi[$  ind i de ikke negative reelle tal. Et punkt  $(x, y)$  vil da være overdækket såfremt  $g$  taget på argumentet til punktet er større end eller lig med  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . I praksis indretter vi  $g$  som en endelig trappe funktion (trappetrinene lige brede) med f. eks. 2000 trin, afhængig af hvor god nøjagtighed og hvor store tegninger man ønsker. Et blad bliver tegnet som endelig mange linjestykker, og  $g$  ajourføres derpå ved lineær interpolation mellem disses knæpunkter (fig. 6a).

Før det næste blad tegnes findes begyndelses- og slutparameteren ved almindelig intervalhalvering indtil tilstrækkelig stor nøjagtighed er opnået. Til dette benyttes informationen i  $g$ . For at finde begyndelsesparameteren sættes  $A_0 = B(0)$ ,  $B_0 = B(\pi)$ ,  $C_0 = B(\frac{\pi}{2})$ .  $B(t_0)$  betegner projektionen af bladkurvepunktet (på frugten) bestemt ved parameterværdien  $t = t_0$  ned på tegneplanen efter  $(x_0, 0, z_0)$ 's retning. Vi sætter  $A_1 = A_0$ ,  $B_1 = C_0$  hvis  $C_0$  ikke er overdækket, ellers  $A_1 = C_0$  og  $B_1 = B_0$ .  $C_1$  vælges dernæst som det punkt på den projicerede bladkurve  $B(t)$ , hvis parameter værdi ligger midt imellem parameterværdierne for  $A_1$  og  $B_1$ . Sådan fortsættes successivt indtil den ønskede nøjagtighed er opnået (fig. 6b).

(Fig. 6a og b) Se side 14



a.



b.

Fig. 6

(a)  $P_0, P_1, P_2, P_3$  er en bladvkant. De ens vinkler anskueliggør trappefunktionen  $g$  og længden  $d_i$  af de stiplede linier er  $g$ 's værdi i det pågældende vinkelrum. ( $d_i = |OP_1| + i \frac{|OP_2| - |OP_1|}{4}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .)

(b) Begyndelsesparameteren findes for det stiplede blad.

4. Mange af de antagelser, der her er gjort for at opbygge den "stiliserede" fibonaccifrugt, er naturligvis oversimplificerede. Der er i tusindvis af genkoder, der bestemmer, hvordan en kogle ser ud foruden mekaniske og meteorologiske påvirkninger; og ikke bare 20-25 reelle tal som her. Tager man f. eks. vinklen mellem skællene på en grankogle og dens frugtbund, varierer denne naturligvis på koglen. Thi vinklen er bestemt ved genetiske træk (bladet vokser ud i en bestemt retning), mekaniske påvirkninger (alle de andre blade skal også have plads, derfor puffes og mases det i stilling) og meteorologiske påvirkninger (hvis det er tørt bliver vinklen større og hvis det er fugtigt bliver vinklen mindre). Hvis nogen ønsker at få nærmere kendskab til begrebet behandlet i denne artikel kan jeg henvise til et par bøger.

"Introduction to geometry", Wiley, New York, 1961 af H. S. M. Coxter er en let tilgængelig bog, der behandler mange ting, der har tilknytning til denne artikel, f. eks. det gyldne snit, fibonaccitallene, phyllotaxis (hvilket afsnit denne artikel delvis bygger på), den logaritmiske spiral, concho-spiralen o. m. a. Desuden kan man få meget udbytte af at læse i "On growth and form" af D'Arcy W. Thompson. Hans bog behandler også utallige fænomener med tilknytning til denne artikel.

Til slut vil jeg udtrykke min tak til Brian Mayoh, afdelingsleder ved Datalogisk Institut, Aarhus Universitet, uden hvis råd og vejledning denne artikel næppe var blevet til.

/bj



Fig.	Frugt	$f_k$	$\psi$	$\varphi$	$r$
1-2	grankogle	8	1.57	0.25	0.3
3-4	grankogle	5	1.7	0.15	0.4
5-6	fyrrekogle	8	1.57	0	1
7	fyrrekogle	8	1.57	0	1
8	annanas	5	2.09	0	1

( $\psi$  og  $\varphi$  måles i radian)

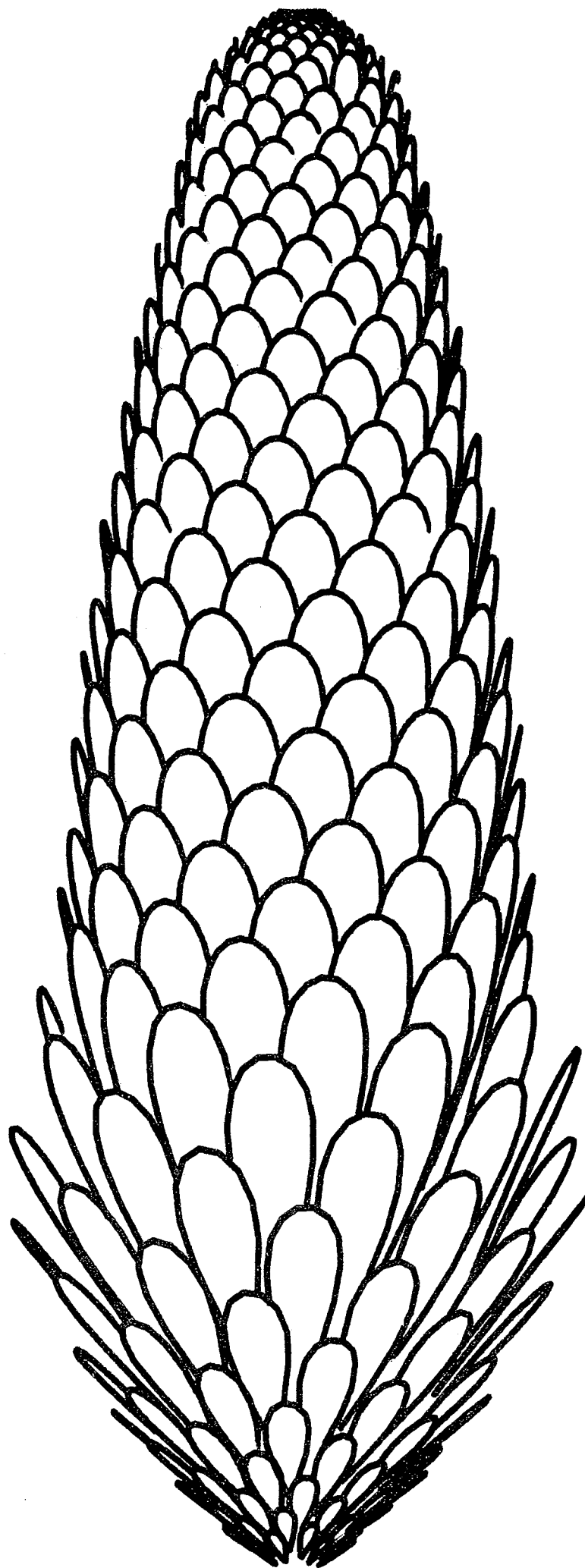


Fig . 1

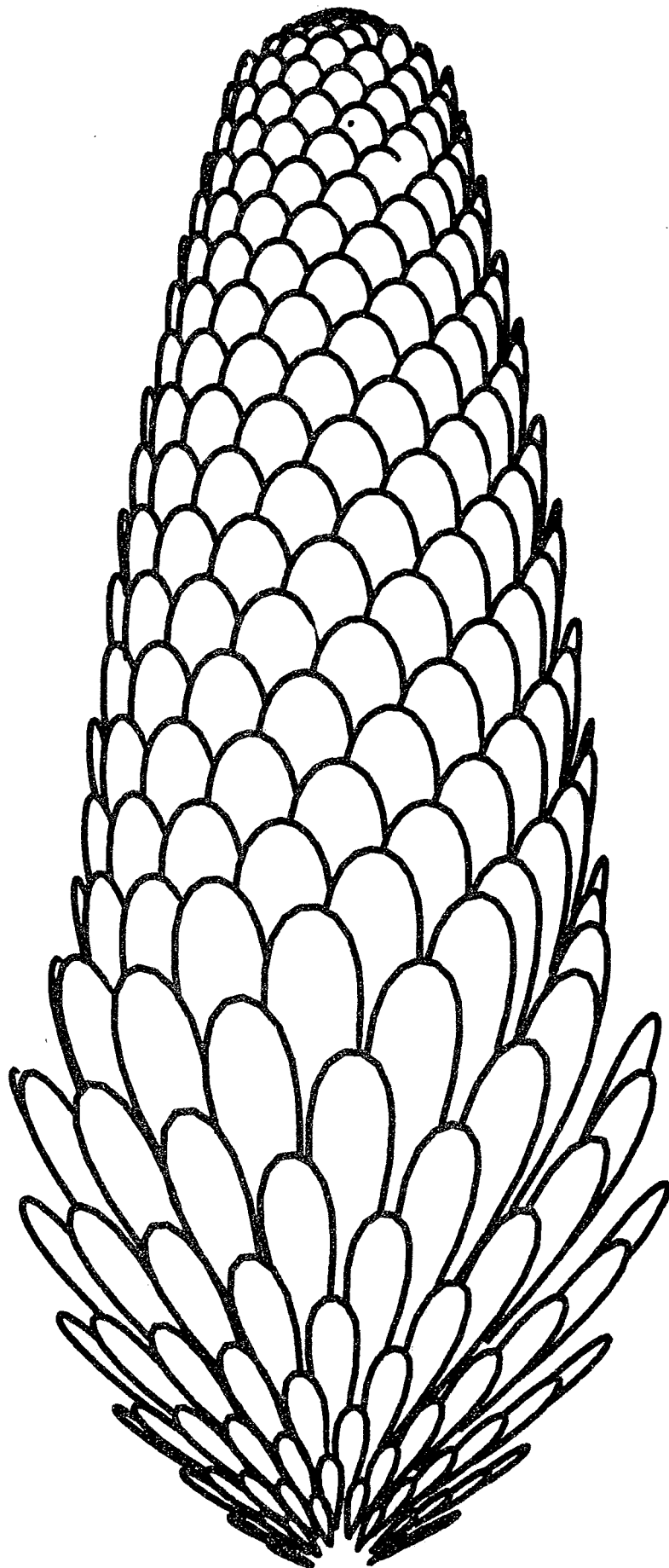


Fig. 2

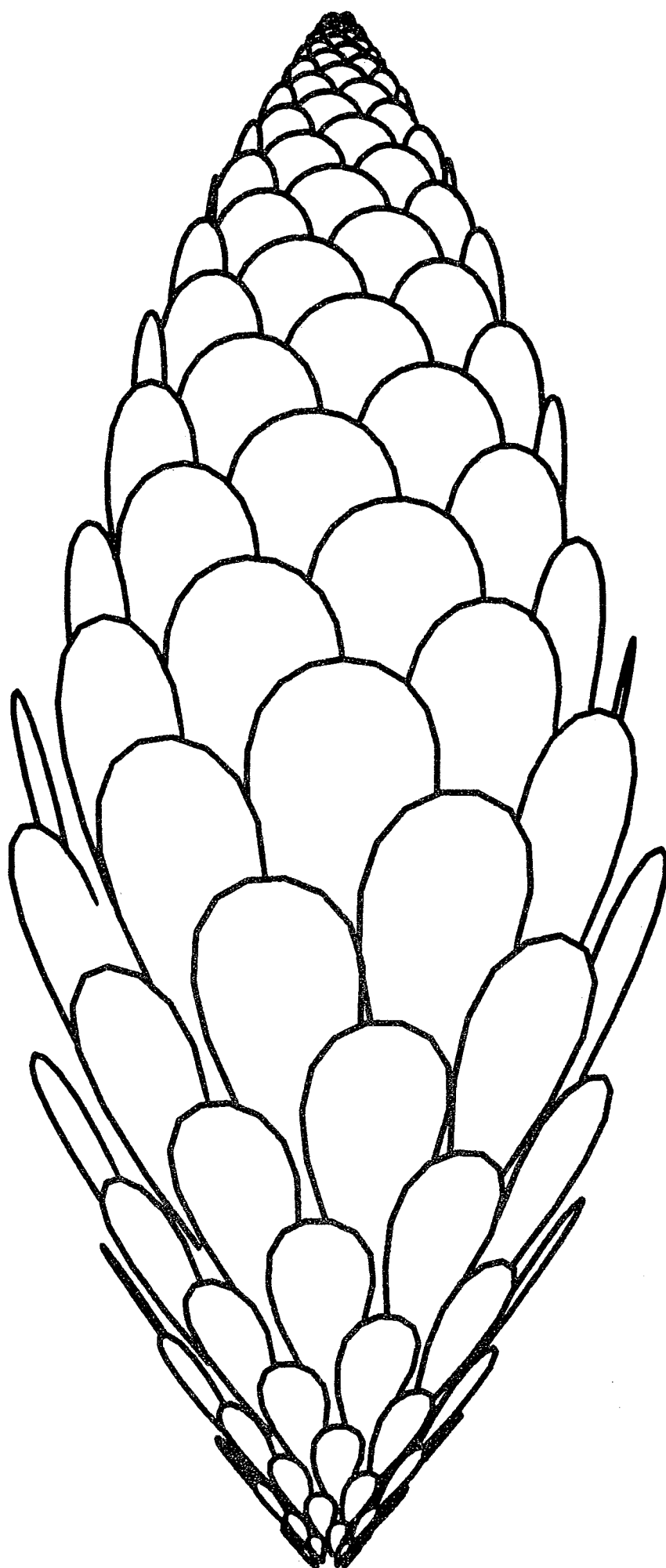


Fig. 3

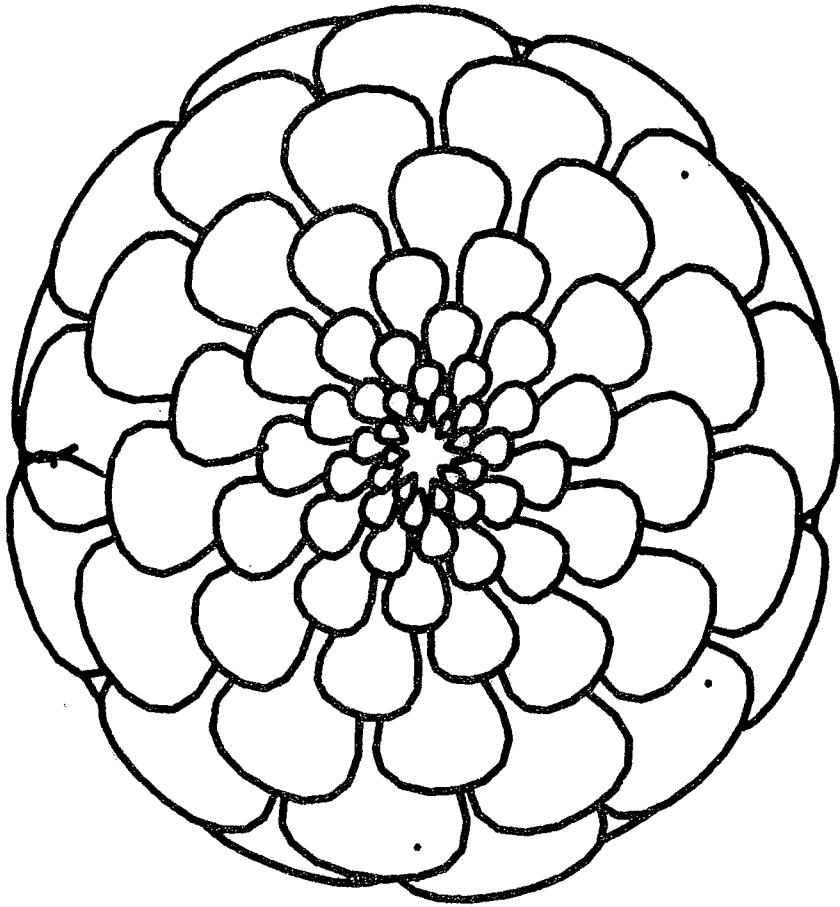


Fig. 4

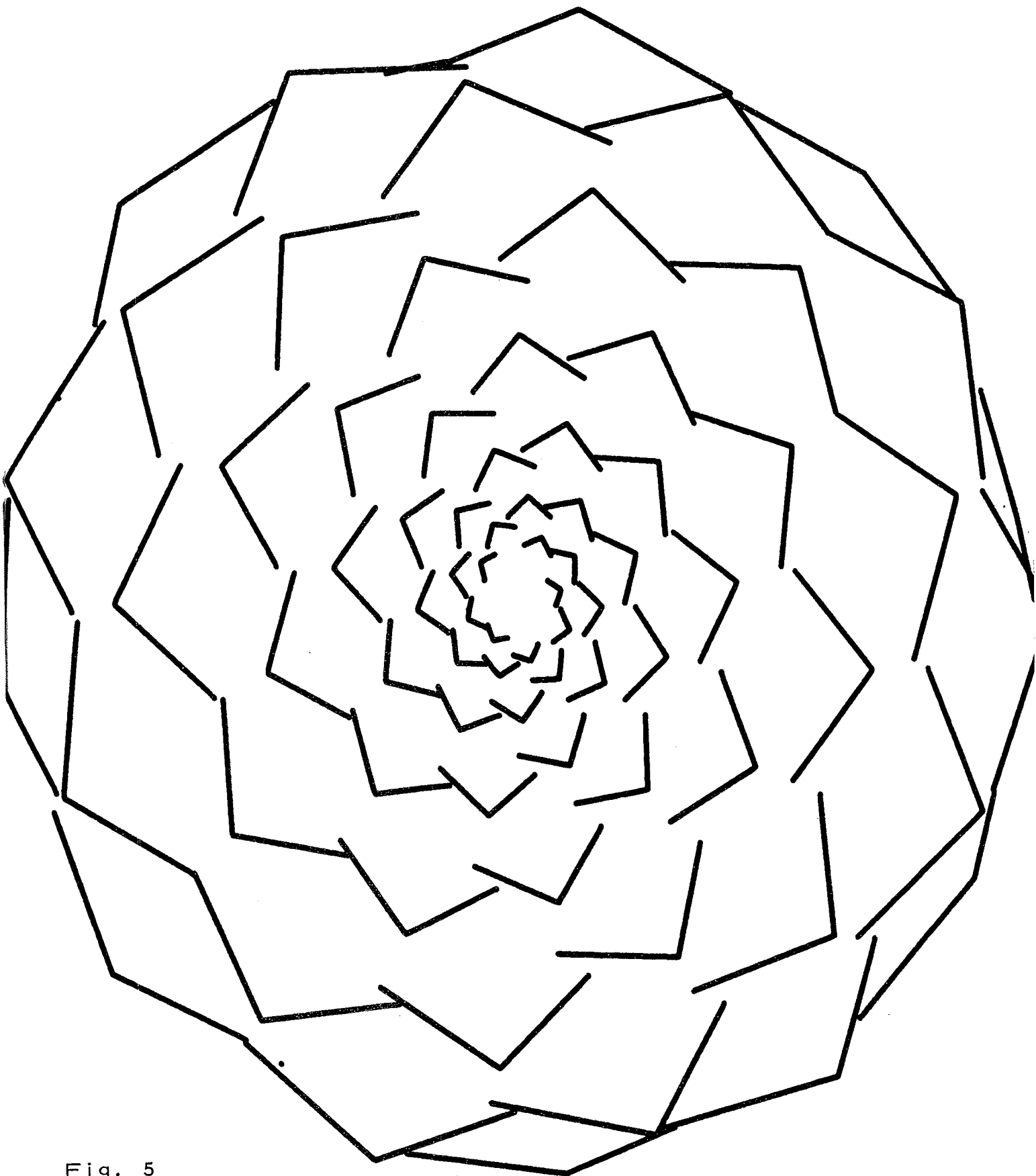


Fig. 5

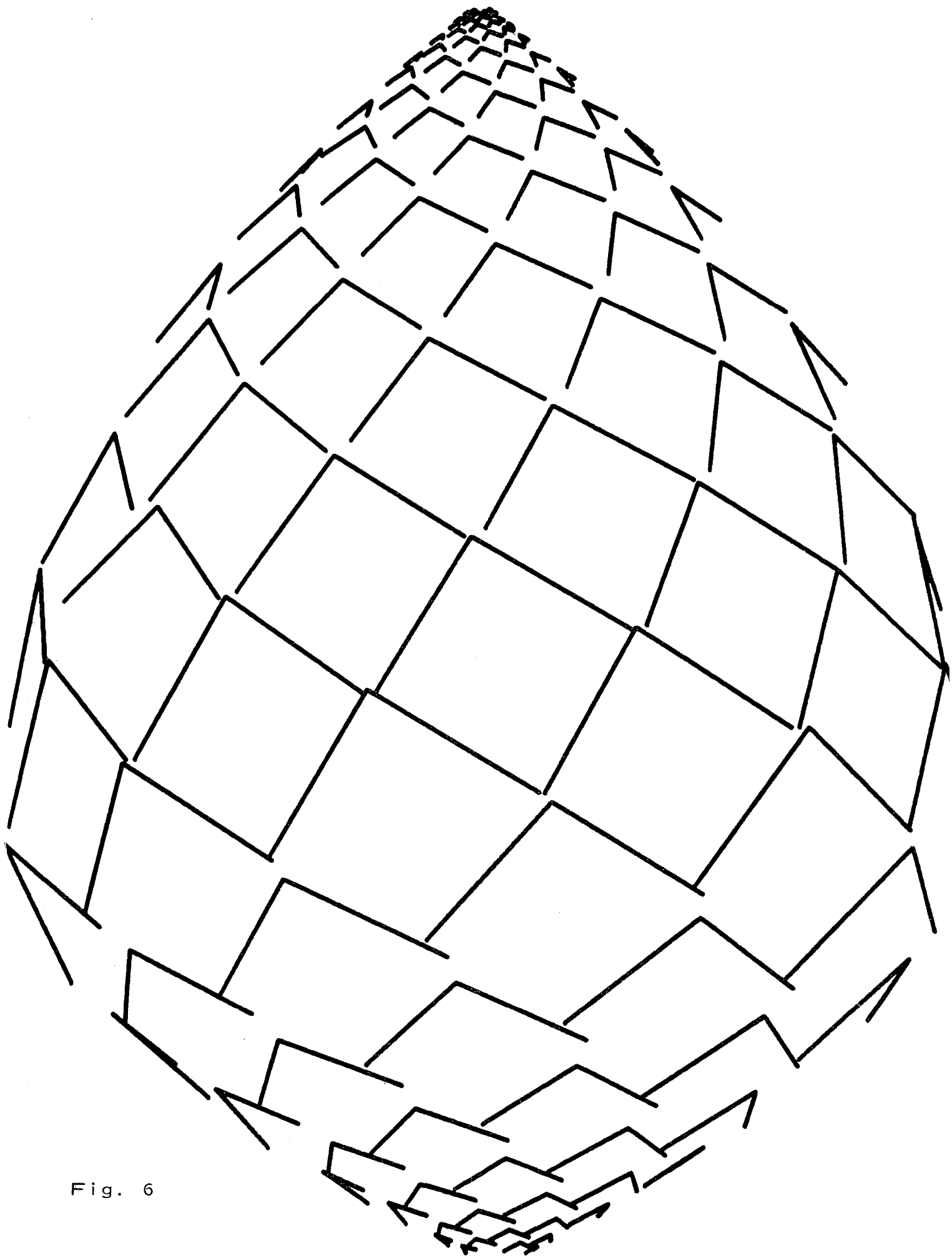


Fig. 6

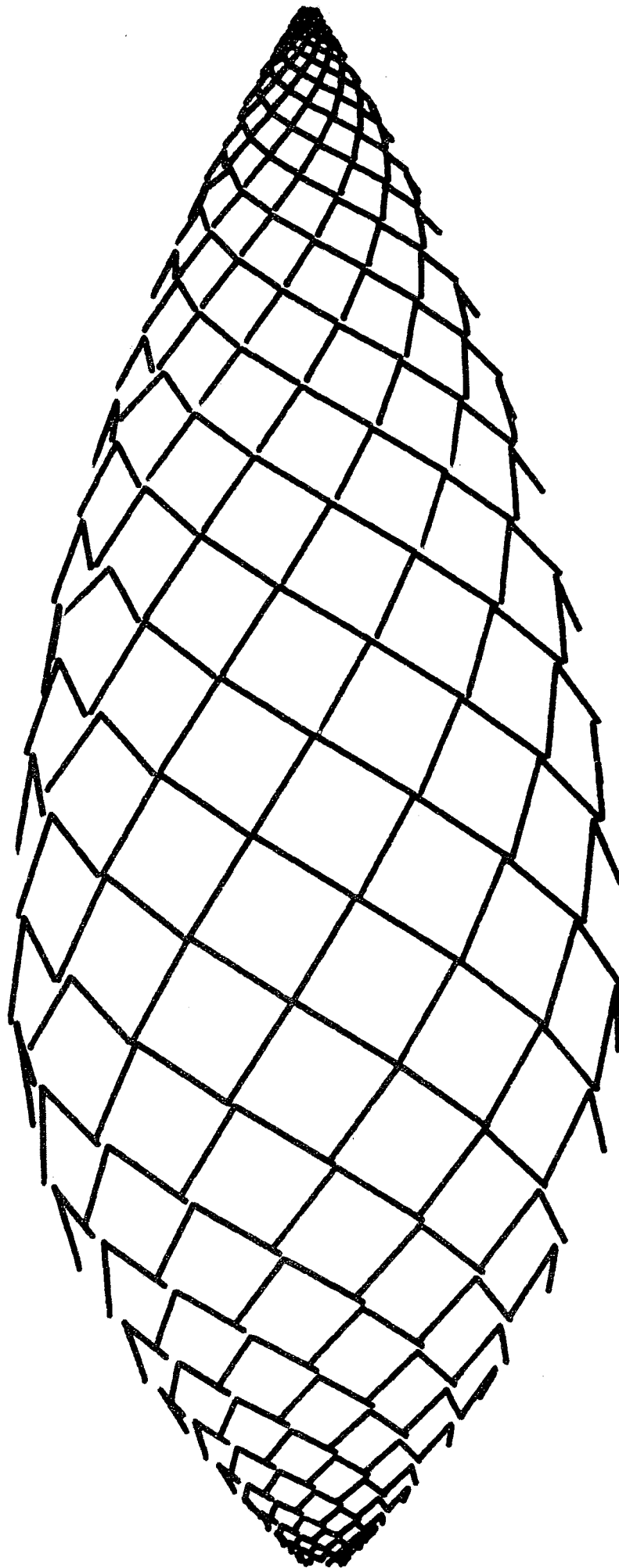


Fig. 7



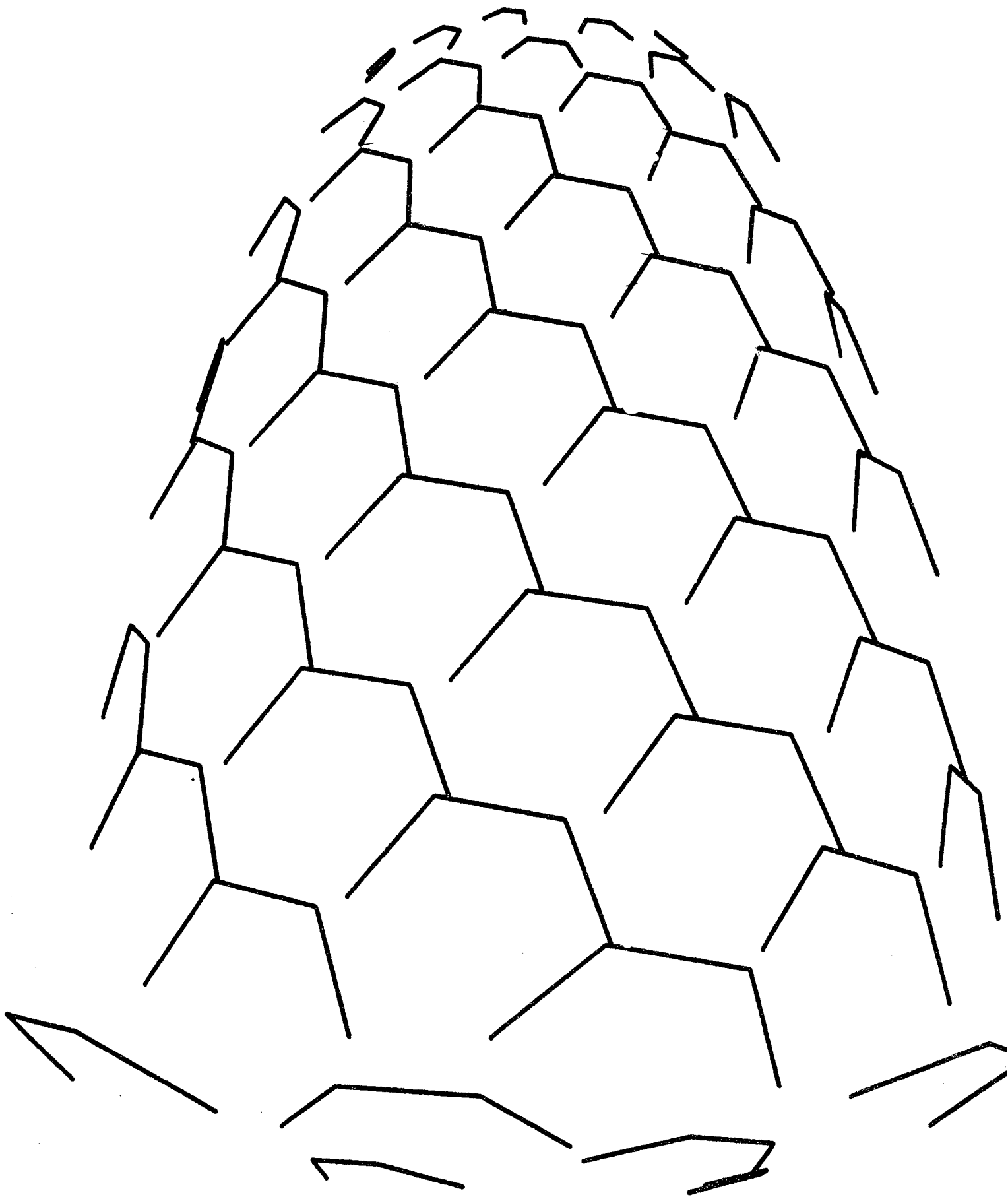


Fig. 8