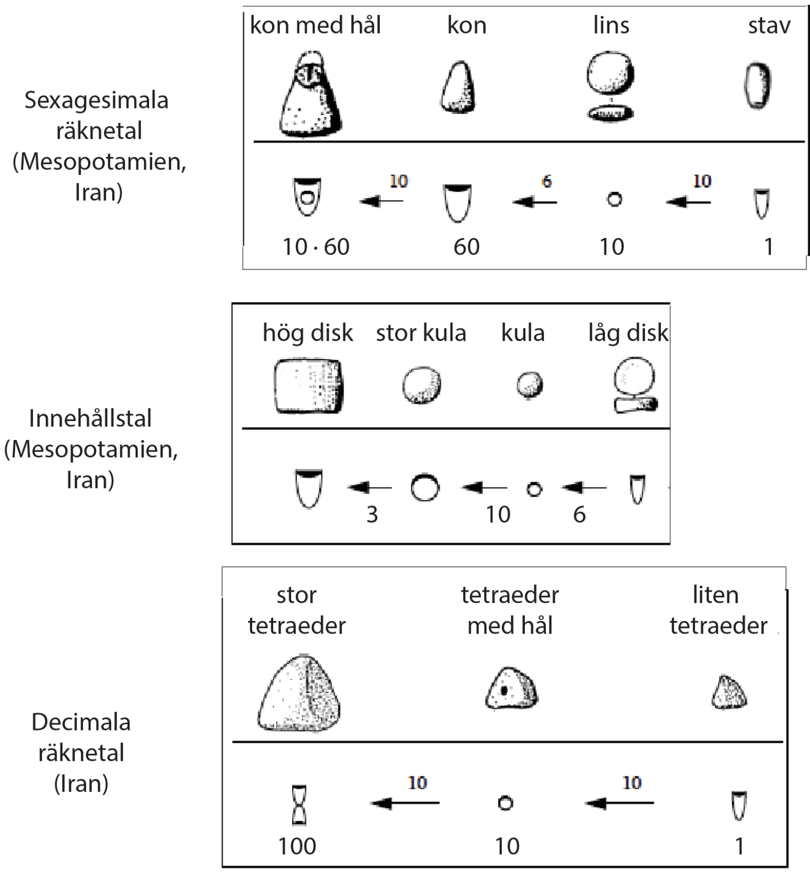
Tre tusen år med sexagesimala tal i mesopotamiska matematiska texter

Jöran Friberg, Chalmers Tekniska Universitet, Göteborg

1. En skiss av utvecklingshistorien för mesopotamiska sexagesimala räknetal

Det är numera välbekant att innan skriften uppfanns i Mesopotamien ungefär 3300 år f.Kr. så hade man i Mesopotamien med omgivande områden redan i ungefär 5000 år använt sig av små *lertecken* (eng. *tokens*) för kommunikation och arkivering.[1] Mindre väl känt är det kanske att i den sista fasen av den här användningen så inneslöts de små lerfigurerna i *lerbollar* (bullae), ibland med indikationer om innehållet utanpå. I vissa fall kan man tolka den numeriska innebörden av de inneslutna lerfigurerna.[2] Den föreslagna tolkningen av sådana *förskriftliga taltecken* som hör till *tre olika talsystem* anges i de tre *faktordiagrammen* nedan:



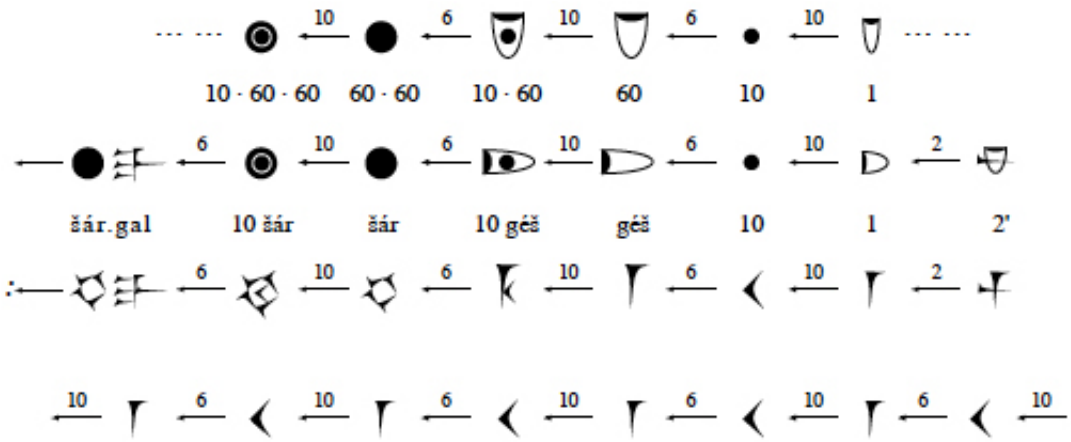
Det första av de angivna talsystemen är system S av *sexagesimala räknetal*, där enheterna

1. D. Schmandt-Besserat (1992) *Before Writing, vol. 1*: *From Counting to Cuneiform.*
2. J. Friberg (2007), *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*, s. 380-384.

markeras av *stavar*, tiotalen av *linser*, sextiotalen av *små koner*, och sexhundratalen av *koner med hål*. Det andra talsystemet är *innehållstal* som användes för att ange volymer av spannmål etc. Det tredje talsystemet är ett system av *decimala räknetal* som användes bara i ett område av nuvarande Iran som verkar ha haft nära förbindelser med Mesopotamien. Det användes troligen för att räkna arbetsdagar eller arbetare, slavar, djur och andra "livlösa" föremål, medan mera fullvärdiga personer räknades med sexagesimala räknetal.

Av de tre angivna förskriftliga talsystemen kom det sexagesimala talsystemet att leva kvar i Mesopotamien i mer än tre tusen år, medan systemet av innehållstal så småningom dog ut, fast det senare ersattes av ett nytt sumeriskt system av innehållstal. Det decimala talsystemet dog också ut utan att direkt ersättas av något nytt system.

De fyra faktordiagrammen nedan avser att visa hur de olika taltecknen i det *sexagesimala* talsystemet såg ut i fyra olika epoker av Mesopotamiens historia. Det första faktordiagrammet visar sexagesimala taltecken använda i *protokilskrift* ungefär 3300-2900, det andra visar *runda taltecken* i *gammalsumerisk kilskrift*, omkring mitten på 2000-talet, det tredje visar *spetsiga taltecken* utan platsvärde i *sumerisk och babylonisk kilskrift* efter mitten på 2000-talet, och det fjärde visar *taltecken med platsvärde* använda enbart i sumeriska och babyloniska *matematiska (eller astronomiska) kilskriftstexter* från ungefär 2000 f.Kr. och framåt, ända till omkring år noll när kilskriften dog ut.



2. En tolkning av innehållet i en förskriftlig lerboll, c. 3400 f.Kr.

Det finns inte några öppnade mesopotamiska lerbollar med bra exempel på räkning med sexagesimala taltecken. (Det finns tyvärr åtskilliga oöppnade lerbollar som ägarna, i regel museer och föreståndare för diverse samlingar, av olika skäl vägrar att öppna och göra tillgängliga för forskning.) Nedan visas därför i stället innehållet i en lerboll, kallad Sb 1967, med (förmodligen) decimala taltecken tillsammans med taltecken för innehållstal.

De tre olika slagen av tetraederformade taltecken i den nämnda lerbollen står troligen för det decimala talet

3(hundra) 2(tio) 4(ett) = 324 (eller snarare trehundratjugofyra).

Det är i det här fallet anakronistiskt att skriva 324 som decimaltal med platsvärde.

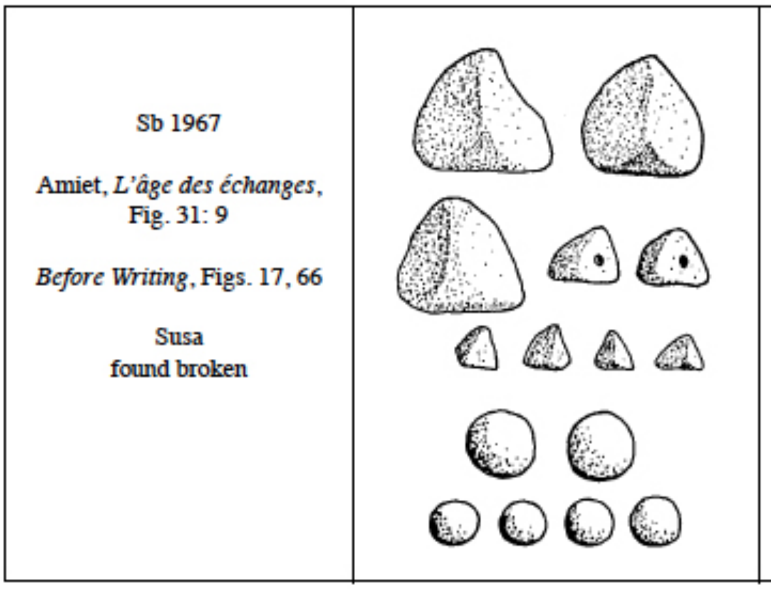
De två slagen av kulformade taltecken står troligen för innehållstalet

2(60 c) 4(6 c) = 144 c, där c är ett innehållsmått, kanske för en normal månadsranson av spannmål.

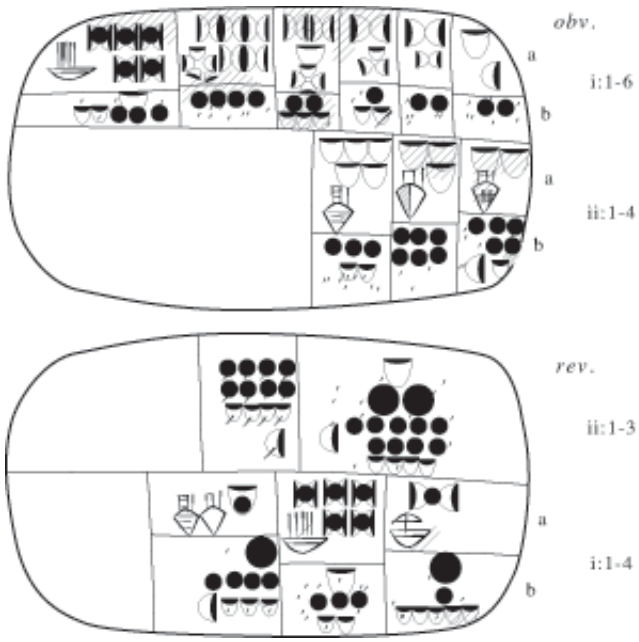
Att tolkningen av de inneslutna taltecknen i det här fallet kan vara riktig antyds av förhållandet att

$324 = 36 \cdot 9$ och $144 = 36 \cdot 4$.

Om man jämför med uträkningar i mycket senare sumeriska administrativa kilskriftstex–ter, så kan man försöksvis dra slutsatsen att innehållet i lerbollen står för uträkningen att 324 personer av lägre rang har erhållit totalt 144 c-mått av säd, motsvarande snålt till-tagna månadsransoner på 4/9 c per person.



3. En bröd-och-öl-text med tecken från fyra olika talsystem, c. 3000 f.Kr.

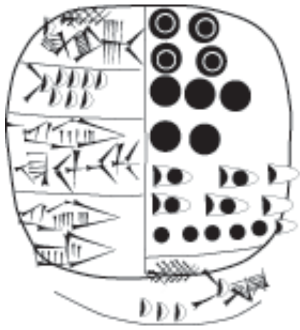


Den här texten från cirka 3000 f.Kr., läst från höger till vänster, ser ut som en vanlig administrativ protokilskriftstext men saknar personuppgifter och andra detaljer i de tre tomma facken och har orealistiskt stora och runda tal.[3] Det är troligen en övningstext från någon sorts skolundervisning. Texten innehåller uppgifter om fördelning av en mängd olika stora ransoner av bröd och öl till ett mycket stort antal personer. På framsidan (*obv.*) är brödransonerna i facken i:1a-6a räknade i *bisexagesimala tal*, med speciella tecken för 2(60) och 20(60). Ölransonerna i fack ii:1a-3a är räknade med *sexagesimala tal*, 2(60), 3(60) och 5(60). Kostnaden i kornmjöl är angivna i facken i:1b-6b och ii:1b-3b, med hjälp av "prickade" innehållstal i protokilskrift. På baksidan (*rev.*) är bland annat angivet det totala antalet ölransoner, i fack i:3a, nämligen 2(60)+3(60)+5(60) = 10(60).

Värt att observera är att i fack i:1a är antecknat 60 av de största brödransonerna, på 1/5 c, medan i fack i:6a är antecknat 5 · 2(60) = 600 av de minsta brödransonerna, på bara 1/30 c. Med andra ord, 600 lågavlönade får bara normala dagsransoner, medan 60 högavlönade får 6-dubbla dagsransoner.

3. MSVO 4, 66. R. K. Englund (1996), *Proto-Cuneiform Texts from Diverse Collections.*
J. Friberg (1999), Counting and accounting in the proto-literate Middle East, *Journal of Cuneiform Studies* 51, s. 112.

4. En gammalsumerisk (tidig dynastisk) divisionsuppgift, c. 2600 f.Kr.



Ett spannmålsmagasin.
7 sìla / erhåller 1 person.
Antalet personer?
45(60 · 60) 42(60) 51.
3 sìla korn återstår

(Notera att den sista raden av texten är skriven på den nedersta kanten av den tjocka lertavlan. Den skulle inte synas om man tittade på lertavlan rakt framifrån.) I den här matematiska kilskriftstexten[4] är uppgiften att *fördela innehållet av spannmål i ett magasin av känd storlek i ransoner om 7 sìla* (1 sìla var ett sumeriskt innehållsmått på ungefär 1 liter) och att räkna ut hur många ransoner det blir. Storleken av magasinet som tydligen skall anses vara känd är *40(60) stor-gur, där 1 stor-gur = 8(60) sìla*. Svaret, 45(60 · 60) 42(60) 51, är givet i facket till höger, men själva uträkningen saknas.

I avsaknad av möjligheten att räkna med sexagesimala tal med platsvärde kunde uträkningen gå till så här. Observera att det här är en *algoritmisk uträkning*, där varje steg i uträkningen bygger på resultatet i det föregående steget.

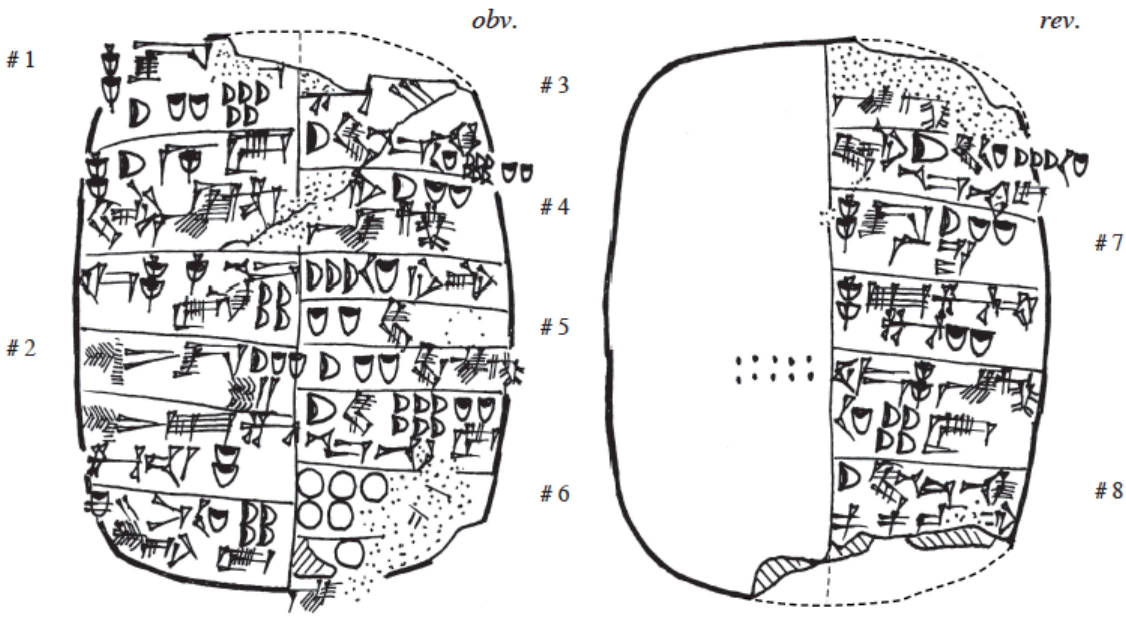
10 sìla =			1	ranson	plus	3 sìla
60 sìla =	6 · 10 sìla =		8	ransoner	plus	4 sìla
1 stor-gur =	8 · 60 sìla =		1(60) 8	ransoner	plus	4 sìla
10 stor-gur =	10 · 1 stor-gur =		11(60) 25	ransoner	plus	5 sìla
60 stor-gur =	6 · 10 stor-gur =		1(60 · 60) 8(60) 34	ransoner	plus	2 sìla
10(60) stor-gur =	10 · 60 stor-gur =		11(60 · 60) 25(60) 42	ransoner	plus	6 sìla
40(60) stor-gur =	4 · 10(60) stor-gur =		45(60 · 60) 42(60) 51	ransoner	plus	3 sìla

5. Den näst äldsta kända metro-matematiska tematexten, c. 2300 f.Kr.

En metro-matematisk *tematext* är en text som innehåller flera matematiska problem, alla med besläktat innehåll. Problemen kallas metro-matematiska om de är lika mycket matematiska övningar i aritmetik o.s.v. som metrologiska övningar i användandet av olika måttsystem. Den äldsta kända metro-matematiska tematexten är en protokilskriftstext från c. 3300 f.Kr., som innehåller två uppgifter av samma slag, i båda fallen att beräkna

4. TSS 50. J. Friberg (2007), *A Remarkable Collection*, s. 414.

ytan av en fyrsidig figur med kända sidor.[5] Den näst äldsta kända matematiska tematexten är från slutet av den tidiga dynastiska perioden, c. 2300 f.Kr. Den ser ut så här:[6]



Temat för den här texten är multiplikation eller division med tal av typen 1 ⅔. (Det här har egentligen ingenting med sexagesimala tal att göra, men det kommer att visa sig i avsnitt 7 nedan varför det ändå är befogat att ta med en kort diskussion av hur sådana uppgifter kunde lösas vid den nämnda tiden.) Frågorna i de olika uppgifterna är kortfattade och kryptiskt formulerade och terminologin är delvis obekant, så tolkningen av vad som egentligen avses är något osäker. Hur som helst, i uppgift # 2 t.ex., verkar frågan vara ett *divisionsproblem* av följande typ:

Pottaska(?) skall anskaffas till en *marknadskvot* av 1 ⅔ sìla pottaska per sìla korn. (Korn användes vid den här tiden jämte silver som betalningsmedel.) Totalt har 2 barig pottaska anskaffats.

Här är 1 barig = 6 bán, 1 bán = 6 sìla, 1 sìla = 60 shekel.

Vad var kostnaden i korn?

Den här frågan kan (med modernt uttryckssätt) omformuleras så här: Kalla kostnaden k. Då kan k beräknas som lösning till divisionsproblemet

$1\,⅔ \cdot k = 2$ barig.

5. W 19408. H. J. Nissen, R. K. Englund, P. Damerow (1993), *Archaic Bookkeeping*, s. 58.
6. CUNES 52-18-035. V. Bartash (avsedd att publiceras våren 2014), Miscellaneous Early Dynastic and Sargonic Texts in the Cornell University Collections.

Det är inte troligt att man vid den här tiden kunde dividera med bråk av typen 1 ⅔. Då kunde man i stället kanske omvandla ekvationen genom att multiplicera båda sidor av ekvationen med 3. Resultat:

5 k = 6 barig,

så att

k = 1/5 · 6 barig = 1 1/5 barig = 1 barig 1 1/5 bán = 1 barig 1 bán 1 1/5 sìla = 1 barig 1 bán 1 sìla ⅓ sìla 4 shekel.

Tyvärr har den som försökte lösa den här uppgiften begått ett fel och bara multiplicerat den ena sidan av ekvationen 1 ⅔ · k = 2 barig med 3. Då har han i stället för den förenklade ekvationen 5 k = 6 barig fått den felaktiga ekvationen 5 k = 2 barig, vilket har lett till den felaktiga lösningen

k = 1/5 · 2 barig = 2 bán 1/5 · 2 bán = 2 bán 2 sìla 1/5 · 2 sìla = 2 bán 2 sìla ⅓ (sìla) 4 shekel korn.

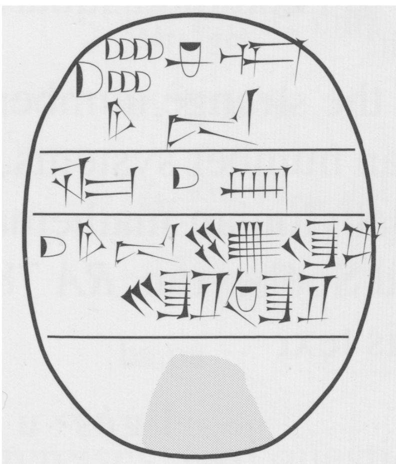
Det här felaktiga svaret står antecknat i det nedersta facket i vänstra kolumnen på framsidan (*obv.*).

Uppgift # 5 är ett besläktat *multiplikationsproblem*. Givet är ⅔ mina silver, kanske ett lån eller en investering. Återbetalning skall ske med 1 ⅔ shekel silver för för varje investerad shekel silver. (Här är 1 shekel = 1/60 mina.) Hur mycket får man då? Svaret är

1 ⅔ · ⅔ mina = 1 ⅔ · 40 shekel = 40 shekel + 26 ⅔ shekel = 1 mina 6 ⅔ shekel.

För en modern läsare är det något förvånande att se hur pass komplicerade lösningarna till de här två skenbart enkla uppgifterna tydligen var *i en tid när man inte utan vidare kunde dividera med bråk och när man hela tiden måste hålla reda på enheterna och omvandlingsfaktorerna i de måttsystem man arbetade med.*

6. En gammalakkadisk geometrisk divisionsuppgift, c. 2250 f.Kr.



Den här avbildade lertavlan är en av flera kända matematiska skoltexter av liknande typ från den gammalakkadiska perioden i Mesopotamien.[7] I första raden av den här texten anges det att en rektangel har långsidan 1(60) 7 ½ nindan (ett längdmått om c. 6 meter). I andra raden frågas efter längden av rektangelns kortsida om ytan av rektangeln är precis 1(iku), vilket är detsamma som 100 kvadrat-nindan. Det gäller alltså att lösa divisionsproblemet

1(60) 7 ½ nindan · s = 100 kv. nindan.

(Här är s den okända kortsidan.) För oss kan det här verka vara en enkel uppgift att lösa, men det var det inte för en gammalakkadisk skolelev som inte kände till sexagesimaltal med platsvärde och som var tvungen att hålla reda på den tidens olika enheter för längdmått.

Tyvärr finns bara svaret på uppgiften antecknat (i fack 3), men inte själva lösningsproceduren. Det finns emellertid skäl att anta att lösningen beräknades steg för steg med hjälp av en *algoritmisk metod*. Att det överhuvudtaget var möjligt beror på att den givna långsidan är 1(60) 7 ½ nindan, där talet 1(60) 7 ½ har en enkel faktoruppdelning. I själva verket är ju

1(60) 7 ½ = ½ · 2(60) 15 = ½ · 5 · 27 = 2 ½ · 3 · 3 · 3.

(*Observera att faktorerna 2 ½ och 3 i det givna talet också är faktorer i 60*). Uträkningen kan därför t ex ha gått till så här. För att den betraktade rektangeln skall ha den givna ytan 100 kv. nindan, så kan den i ett enkelt fall ha en sida 2 ½ nindan och den andra sidan 40 nindan. Eller så kan den förra sidan vara 3 gånger längre och den senare sidan ⅓ gång så lång, dvs. den ena sidan kan vara 3 · 2 ½ = 7 ½ nindan och den andra 40/3 = 13 ⅓ nindan. Och så vidare i samma stil. Vid den här tiden var

1 nindan = 12 alnar, 1 aln = 30 fingrar.

(*Observera att både 12 och 30 också är faktorer i 60.*) Därför kan en enkel algoritmisk uppställning för lösning av det angivna problemet ha sett ut så här:

100 kv. nindan	=	2 ½ nindan ·	40 nindan
	=	7 ½ nindan ·	13 nindan 4 alnar
	=	22 ½ nindan ·	4 nindan 5 ⅓ alnar
	=	1(60) 7 ½ nindan ·	1 nindan 5 ⅔ alnar 3 ⅓ fingrar.

Lösningen till det uppställda problemet är alltså att kortsidan på den betraktade rektangeln är precis 1 nindan 5 ⅔ alnar 3 ⅓ fingrar. Det är också vad som står i det tredje facket i texten. Det är viktigt att observera att *anledningen till att den algoritmiska beräkningen*

7. HS 815. A. Westenholz (1975), *Early Cuneiform Texts in Jena*; J. Friberg (2007), *A Remarkable Collection*, s. 408

fungerade delvis var att både faktorerna i det givna talet och omvandlingsfaktorerna i det gammalakkadiska systemet av längdmåttsenheter var faktorer i 60. Man kan uttrycka det här förhållandet som att *längdmått-systemet var sexagesimalt anpassat* och att *det givna längdmåttet var sexagesimalt reguljärt.*

7. En reciproktalstabell utan användning av sexagesimala tal med platsvärde

En ännu opublicerad lertavla[8], med det provisoriska namnet T. 2865, innehåller den tabell som är reproducerad nedan i direkt translitteration (till vänster) och i modern tolkning med platsvärdes-beteckningar (till höger). Åldern på själva lertavlan är svår att uppskatta, men antingen den eller en äldre lertavla som den kan vara en kopia av kan antas vara från den neo-sumeriska Ur III-perioden, c. 2050 f.Kr., eller mera precist, strax *före uppfinnandet av sexagesimala tal med platsvärde.* (Därför är den moderna tolkningen till höger i tabellen nedan egentligen fullständigt anakronistisk.)

Avsikten med en tabell av den här typen är helt klar. Den var avsedd att underlätta lösandet av matematiska problem av den typ som förekom i tematexten CUNES 52-18-035 i avsnitt 5 ovan, nämligen division med bråktal av typen 1 ⅔. Tag t.ex. raden

igi 13 ⅓ gál.bi 4 ½ som kan översättas med rec. 13 ⅓ = 4 ½,

där rec. står för ‘reciproktalet till’. Vad det betyder framgår om man multiplicerar 13 ⅓ med 4 ½. Då får man med något besvär

13 ⅓ · 4 ½ = 13 · 4 + ⅓ · 4 + 13 · ½ + ⅓ · ½ = 52 + 1 ⅓ + 6 ½ + ⅙ = 59 ½ ⅓ ⅙ = 60.

Av den här uträkningen kan man dra följande slutsats:

Att dividera med 13 ⅓ är detsamma som att multiplicera med 4 ½ shekel (sextiondelar).

Egentligen är det här ett anakronistiskt sätt att uttrycka saken. Några termer för “division” eller “dividera med” finns aldrig i matematiska kilskriftstexter. I stället finns det frågor av följande slag, ibland explicit framställda:

Vad skall man multiplicera 13 ⅓ med för att få ett givet tal *c*?

Om svaret på den här frågan är *b*, så betyder det att

13 ⅓ · $b = c$.

Multiplicerar man båda sidor av den här ekvationen med rec. 13 ⅓ = 4 ½, så får man den ekvivalenta ekvationen

8. Nyligen upptäckt av min samarbetspartner professor Farouk N. Al-Rawi.

$60 \cdot b = 4\ ½ \cdot c$ eller $b = 4\ ½ \cdot 1/60 \cdot c = 4\ ½$ shekel $\cdot\ c$.

Den här korta diskussionen kan sammanfattas så här:

Om $13\ ⅓ \cdot b = c$, så är $b = 4\ ½$ shekel $\cdot\ c$.

Generellt gäller att

Om $a \cdot b = c$, så är $b =$ rec. a shekel $\cdot\ c$.

Det är nämligen lätt, om än väldigt arbetskrävande, att kontrollera att för alla par (a, rec. a) i tabellen T. 2685 nedan, så är $a \cdot$ rec. a = 60.

obv.	...	...	...	...	...	...	...	
	[igi	3 1/2 6	gál.bi	16 2/3]	rec.	3;36	16;40	
	igi	[3 2/3 5	gál.bi]	16	rec.	3;45	16	
	igi	[4	gál.b]i	15	rec.	4	15	
	igi	[4 1/2]	gál.b]i	13 [1/3]	rec.	4;30	13;20	
	igi	5	gál.bi	12	rec.	5	12	
	igi	5 1/3	gál.bi	11 15	rec.	5;20	11;15	
	igi	5 1/2	gál.bi	[10 2/3] 15	rec.	5;30	10;55	(appr.)
	igi	6	gál.bi	[10]	rec.	6	10	
	igi	7	gál.bi	[8 1/2 4]	rec.	7	8;34	(appr.)
	igi	7 12	gál.bi	[8 1/3]	rec.	7;12	8;20	
	igi	7 1/2	gál.bi	[8]	rec.	7;30	8	
	igi	8	gál.bi	[7 1/2]	rec.	8	7;30	
	igi	8 1/3	gál.bi	[7 12]	rec.	8;20	7;12	
	igi	9	gál.bi	6 [2/3]	rec.	9	6;40	
	igi	9 1/2 6	gál.bi	6 1[5]	rec.	9;36	6;15	
	igi	10	gál.bi	6	rec.	10	6	
edge	igi	10 2/3	gál.bi	5 1/2 7 1/2	rec.	10;40	5;37 30	
	igi	11 15	gál.bi	5 1/3	rec.	11;15	5;20	
	igi	12	gál.bi	5	rec.	12	5	
	igi	12 1/2	gál.bi	4 2/3 8	rec.	12;30	4;48	
rev.	igi	13 1/3	gál.bi	4 1/2	rec.	13;20	4;30	
	igi	13 1/2	gál.bi	4 1/3 6 2/3	rec.	13;30	4;26 40	
	igi	15	gál.bi	4	rec.	15	4	
	igi	16	gál.bi	3 2/3 5	rec.	16	3;45	
	igi	16 2/3	gál.bi	3 1/2 6	rec.	16;40	3;36	
	igi	18	gál.bi	3 1/3	rec.	18	3;20	
	igi	20	gál.bi	3	rec.	20	3	
	igi	22 1/2	gál.bi	2 2/3	rec.	22;30	2;40	
	igi	24	gál.bi	2 1/2	rec.	24	2;30	
	igi	25	gál.bi	2 1/3 4	rec.	25	2;24	
	igi	26 2/3	gál.bi	2 15	rec.	26;40	2;15	
	igi	27	gál.bi	2 13 [1/3]	rec.	27	2;13 20	
	igi	30	gál.bi	2	rec.	30	2	
	igi	32	gál.bi	1 5/6 2 1/2	rec.	32	1;52 30	
	igi	36	gál.bi	1 2/3	rec.	36	1;40	
	igi	40	gál.bi	1 1/2	rec.	40	1;30	
	igi	45	gál.bi	1 1/3	rec.	45	1;20	
	igi	4[8]	gál.bi	1 15	rec.	48	1;15	
	igi	50	gál.bi	1 12	rec.	50	1;12	
	igi	53 1/3	gál.bi	1 7 1/2	rec.	53;20	1;07 30	
	igi	54	gál.bi	1 6 [2/3]	rec.	54	1;06 40	
	igi	56 15	gál.bi	1 [4]	rec.	56;15	1;04	
	igi	57 1/2 6	gál.bi	1 [2 1/2]	rec.	57;36	1;02 30	
	igi	1(60)	gál.bi	[1]	rec.	1 00	1	
	igi	1(60) 12	gál.bi	5/6	rec.	1 12	;50	

Ett enklare sätt att kontrollera att $a \cdot$ rec. a = 60 för alla par i tabellen är att tänka efter hur tabellen ursprungligen kan ha blivit konstruerad. Det kan ju knappast ha varit så att någon har prövat med alla slags komplicerade bråkuttryck för att se om det gick att hitta motsvarande “reciproka” bråkuttryck. I stället är det troligaste att en systematisk konstruktion av tabellen gick till så här: Ett första steg var att hitta reciproktalen till alla lämpliga (sexagesimalt reguljära) *heltal* mellan 2 och 60, vilket är lätt gjort. Man ser nämligen omedelbart att

$2 \cdot 30 = 60$

$3 \cdot 20 = 60$

$4 \cdot 15 = 60$

$5 \cdot 12 = 60$

7 har inget exakt reciproktal

$8 \cdot 7\tfrac{1}{2} = 56 + 4 = 60$

$9 \cdot 6\tfrac{2}{3} = 54 + 6 = 60$

$10 \cdot 6 = 60$

11 har inget exakt reciproktal

$12 \cdot 5 = 60$

osv.

Man får då följande utgångstabell:

a	rec. *a*	
2	30	
3	20	
4	15	
5	12	
6	10	
8	7 ½	
9	6 ⅔	
10	6	
12	5	
15	4	
16	3 ⅔ 5	läs: 3 ⅔ + 5 shekel
18	3 ⅓	
20	3	
24	2 ½	
25	2 ⅓ 4	läs: 2 ⅓ + 4 shekel
27	2 13 ⅓	läs: 2 + 13 ⅓ shekel
30	2	
32	1 5/6 2 ½	läs: 1 5/6 + 2 ½ shekel
36	1 ⅔	
40	1 ½	
45	1 ⅓	
48	1 15	
50	1 12	
54	1 6 ⅔	läs: 1 + 6 ⅔ shekel
1(60)	1	

25 par i steg 1

Därefter kunde man med utgångspunkt från kända *reciproka par* (*a*, rec. *a*) konstruera nya reciproka par av typen (⅔ *a*, 1 ½ rec. *a*) eller (½ *a*, 2 rec. *a*) eller (⅓ *a*, 3 rec. *a*) osv. Vad det leder till är redovisat i tabellen nedan, där sh. står för shekel (= 1/60).

· 2/3	· 1 1/2	· 1/2	· 2	· 1/3	· 3	· 15 (sh.)	· 4	· 12 (sh.)	· 5
1 1/3	45								
		1 1/2	40						
2 2/3	22 1/2								
3 1/3	18	2 1/2	24	1 2/3	36	1 15	48		
								[1 12	50]
5 1/3	11 15							(1 1/2 6	37 1/2)
		4 1/2	13 1/3			2 15	26 2/3	(1 2/3 8	33 1/3)
(6 2/3	9)								
								[2 1/3 4	25]
		7 1/2	8			3 2/3 5	16		
10 2/3	5 1/2 7 1/2							(3 12	18 2/3 5)
								3 1/2 6	16 2/3
13 1/3	4 1/2								
								4 2/3 8	12 1/2
16 2/3	3 1/2 6	12 1/2	4 2/3 8	8 1/3	7 1/2	(6 15	9 1/2 6)		
		13 1/2	4 1/2 6 2/3			(6 2/3 5	8 5/6 3 1/3)	(5 1/3 4	11 6 2/3)
								(6 1/3 4	9 1/3 2 1/2)
								7 12	8 1/3
26 2/3	2 15								
		22 1/2	2 2/3			11 15	5 1/3		
								9 1/2 6	6 15
(33 1/3	1 2/3 8)								
								(10 2/3 8	5 1/2 3 1/3)
8 nya par (2 saknas)		7 nya par		2 nya par		4 nya par (2 saknas)		5 nya par (7 saknas)	

Det visar sig att man med den här enkla metoden kan konstruera alla utom 4 av de exakta paren i tabellen T. 2685 (plus 11 par till som av någon anledning saknas i T. 2685)! Approximativa reciproktal till de icke-reguljära talen 7 och till 5 ½ = 1½ har sedan tillagts, kanske av pedagogiska skäl.

De fyra extra paren som inte kan beräknas med hjälp av den nämnda metoden är

53 1/3	1 7 1/2
56 15	1 4
57 1/2 6	1 2 1/2
1(60) 12	5/6

Alla fyra paren finns med mot slutet av tabellen, vilket knappast kan vara en tillfällighet. Observera att den angivna metoden överhuvudtaget inte kan producera några nya reciproka par (n, rec. n) med n större än 33 ⅓. Utan de extra fyra paren hade tabellen blivit ganska gles mot slutet, så därför har uppenbarligen en alternativ metod använts för att konstruera några nya reciproka par i nedre delen av tabellen. Vilken den alternativa metoden är är ganska uppenbart, om man observerar att

(40, 1 1/2)	= ((1 – rec. 3) · 60, 1 + rec. 2)	
(45, 1 1/3)	= ((1 – rec. 4) · 60, 1 + rec. 3)	
(48, 1 15)	= ((1 – rec. 5) · 60, 1 + rec. 4)	
(50, 1 12)	= ((1 – rec. 6) · 60, 1 + rec. 5)	
(53 1/3, 1 7 1/2)	= ((1 – rec. 9) · 60, 1 + rec. 8)	extra par
(54, 1 6 2/3)	= ((1 – rec. 10) · 60, 1 + rec. 9)	
(56 15, 1 4)	= ((1 – rec. 16) · 60, 1 + rec. 15)	extra par
(57 1/2 6, 1 2 1/2)	= ((1 – rec. 25) · 60, 1 + rec. 24)	extra par

Här är (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (8, 9), (9, 10), (15, 16), och (24, 25) successiva så kallade *reguljära tvillingar*, med vilket menas talpar (n–1, n) där både n–1 och n är sexagesimalt reguljära, så att både rec. (n–1) och rec. n existerar. Tydligen kände konstruktören av tabellen till att om n–1 och n är reguljära tvillingar, så är (1 – rec. n) · (1 + rec. (n–1)) = 1.[9]

Det återstår fortfarande att förklara varför i tabellen T. 2685 det *sista paret* är (1(60) 12, 5/6). Den intressanta förklaringen är att det *första paret* i tabellen var (1 12, 50). Just det paret är nu tyvärr förlorat på grund av skador på lertavlan, men att det fanns med vet vi ändå eftersom det var konstruerat med utgångspunkt från paret (6, 10), nämligen som (12 (sh.) · 6, 5 · 10). Konstruktören av tabellen har tydligen velat visa att om (n, rec. n) är ett givet reciprokt par, så är också (60 · n, 1(sh.) · rec. n) ett reciprokt par. Uppenbarligen är ju

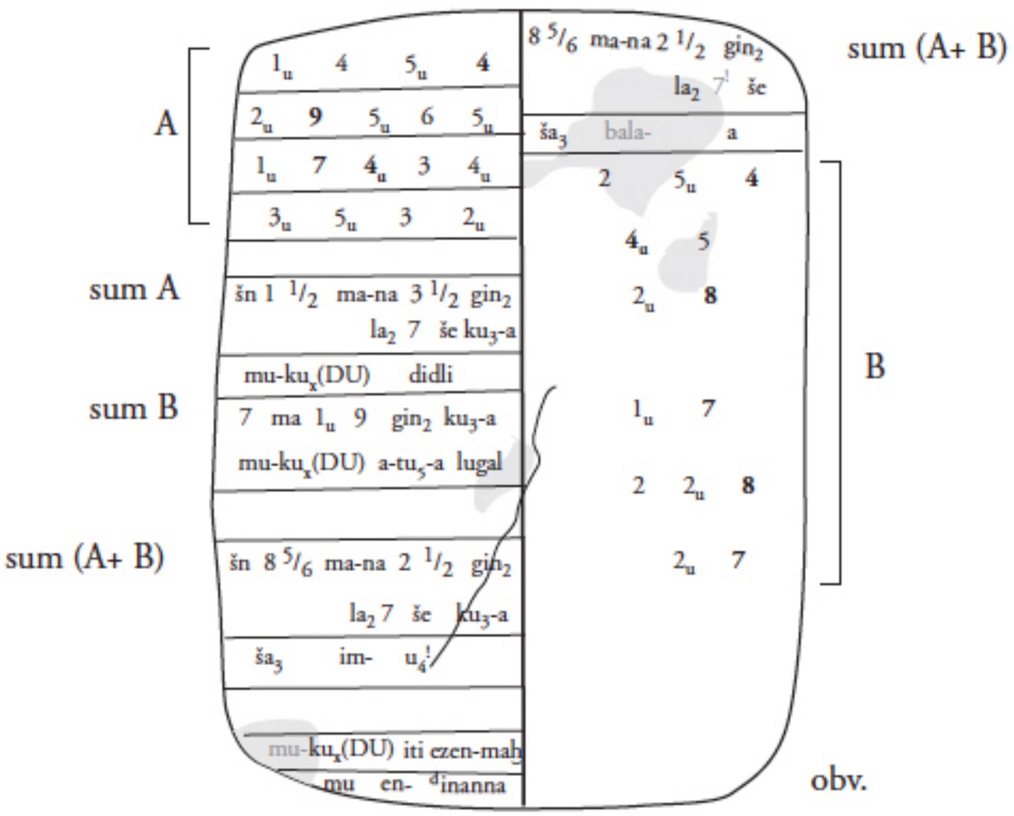
1(60) 12 = 60 · 1 12 (sh.)   och   5/6 = 1 (sh.) · 50.

Avslutningsvis: Ur matematikhistorisk synvinkel är upptäckten av reciproktalstabellen T. 2685 oerhört intressant. Tabellen är en sorts *felande länk* mellan sättet att räkna i gammalbabyloniska matematiska texter och det annorlunda sättet att räkna i alla tidigare kilskriftstexter från hela 2000-talet f.Kr., texter som inte kände till sexagesimaltal med platsvärde och som alltid var metro-matematiska i den meningen att det inte fanns några abstrakta tal utan endast antingen metrologiska tal uttryckta som kombinationer av diverse måttenheter eller sexagesimala tal för styckvis räkning. *Hela tabellen är ju uttryckt utan användning av några måttenheter.* Visserligen kan man visa att användandet av både basbråk och shekel var hämtade från det då gällande systemet av viktmått, men det är kanske signifikant att *användningen av själva ordet shekel är konstant undertryckt i tabellen*. Vad som nu behövdes för att komma på idén att räkna med sexagesimaltal med platsvärde var egentligen bara att *också undertrycka användningen av basbråken* och att t.ex. skriva 5 37 30 i stället för 5 ½ 7 ½!

8. Den äldsta daterade kilskriftstexten med sexagesimala platsvärdestal

9. Med moderna beteckningar blir det här en självklarhet: (1 – 1/n) · (1 + 1/(n–1)) = (n–1)/n · n/(n–1) = 1.

Det finns bara en enda publicerad kilskriftstext som otvetydigt visar att sexagesimaltal med platsvärde var kända redan i den neo-sumeriska Ur III-perioden, c. 2000 f.Kr. Det är den administrativa (dvs. icke-matematiska) texten YOS 4, 293, som visas nedan.[10]



Det finns flera intressanta uträkningar i den här texten.

1. De *sexagesimala platsvärdestalen* i avdelning A = rad 1-4 i vänstra spalten kan adderas som följer:

14 54

29 56 50

17 43 40

30 53 20

—————

1 33 27 50

10. M. Powell (1976), The antecedents of Old Babylonian place notation and the early history of Babylonian mathematics, *Historia Mathematica* 3, 417-39.

J. Friberg (2005), On the alleged counting with sexagesimal place value numbers in mathematical cuneiform texts from the third millennium BC, *Cuneiform Digital Library Journal,* 2005:2, s. 8.

2. Det som räknas här är *vikten av olika belopp i silver*. Se raden som kallas sum A, där ku_3 betyder silver.

Där är den ovan angivna summan av de sexagesimala platsvärdestalen i avdelning A översatta till *viktmåttstal*:

1 33;27 50 (shekel) = 1 ½ mina 3 ½ shekel – ;02 10 shekel = (avrundat) 1 ½ mina 3 ½ shekel – 7 korn.

(Eftersom 1 korn = 1/180 shekel = ;00 20 shekel, så är ;02 10 shekel avrundat = 7 korn.)

3. De *sexagesimala platsvärdestalen* i avdelning B i högra spalten kan adderas som följer:

2 54

45

28

17

2 28

————

7 19

4. I raden som kallas sum B är summan av platsvärdestalen i avdelning B översattta till viktmåttstal:

7 19 (shekel) = 7 mina 19 shekel.

5. I raden som kallas sum (A + B) ovan är summan uträknad av sum A och sum B tillsammans:

1 ½ mina 3 ½ shekel – 7 korn + 7 mina 19 shekel = 8 ½ mina 22 ½ shekel – 7 korn

= 8 5/6 mina 2 ½ shekel – 7 korn.

Dateringen av texten finns i nedersta raden i vänstra spalten, där det står en så kallad *årsformel:*

mu en-^{d}inanna

Det här är en förkortad version av en känd årsformel som betyder

Året då (Enunugalanna installerades som) en-präst åt Inanna (i Uruk).

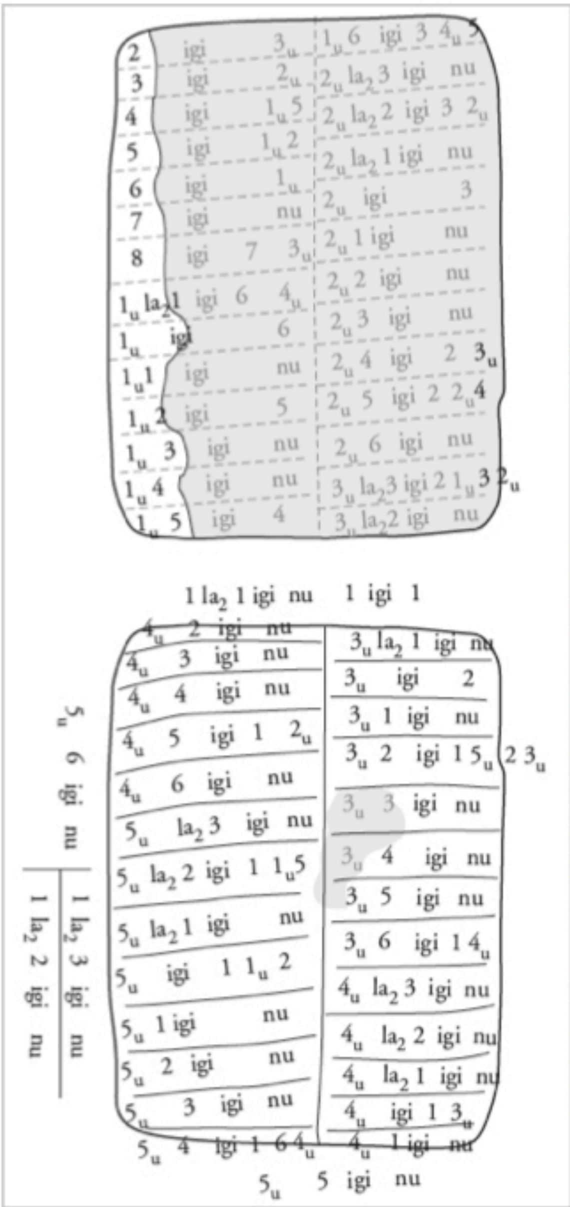
Året som åsyftas är det femte året av kung Amar-Suens regeringstid, dvs. 2043 f.Kr.

9. En reciproktalstabell med sexagesimala platsvärdestal, c. 2000 f.Kr.

Nedan är ett exempel på hur en sumerisk reciproktalstabell kunde se ut *efter införandet av sexagesimala tal med platsvärde*.[11]

Reciproktalen är uträknade för *reguljära heltal* mellan 2 och 1(60). För icke-reguljära heltal står det igi nu, som är sumeriska för 'reciproktal (finns) inte'. Reguljära sexagesimala heltal är heltal som är faktorer i någon potens av 60 och därför själva, liksom 60, inte innehåller några andra primtalsfaktorer än 2, 3, och 5. Observera också att de sexagesimala platsvärdestalen inte innehåller någon information om den absoluta storleken av talen. Som i så kallad *flytande räkning* så saknas någon form av separator mellan heltalsdel och bråkdel. Därför skrivs t.ex. 1(60) bara som '1'. Uttryck i tabellen som 1_u osv. står för 1 u osv., där u är sumeriska för 'tio'.

11. Ist. L 7375. J. Friberg, A Geometric Algorithm with Solutions to Quadratic Equations in a Sumerian Juridical Document from Ur III Umma, *Cuneiform Digital Library Journal* 2009:3, § 4.2.1.



2	30	16	3 45
3	20	20-3	–
4	15	20-2	3 20
5	12	20-1	–
6	10	20	3
7	–	21	–
8	7 30	22	–
10-1	6 40	23	–
10	6	24	2 30
11	–	25	2 24
12	5	26	–
13	–	30-3	2 13 20
14	–	30-2	–
15	4		
42	–	30-1	–
43	–	30	2
44	–	31	–
45	1 20	32	1 52 30
46	–	33	–
50-3	–	34	–
50-2	1 15	35	–
50-1	–	36	1 40
50	1 12	40-3	–
51	–	40-2	–
52	–	40-1	–
53	–	40	1 30
54	1 06 40	41	–
55	–		
56	–		
1-3	–		
1-2	–		
1-1	–		
1	1		

De sex sista raderna i tabellen är skrivna runt omkring på kanterna av lertavlan. De är:

5u 5 igi nu

  55 reciproktal (finns) inte

5u 6 igi nu

  56 reciproktal (finns) inte

1 – 3 igi nu

  1 – 3 reciproktal (finns) inte

  läs: 57 (= 60 – 3)

1 – 2 igi nu

1 – 2 reciproktal (finns) inte

läs: 58 (= 60 – 2)

1 – 1 igi nu

1 – 1 reciproktal (finns) inte

läs: 59 (= 60 – 1)

1 igi 1

1 reciproktal 1

läs: 1 (=60) reciproktal 1

I senare, *gammalbabyloniska* reciproktalstabeller[12] ser de två första raderna i en reciproktalstabell i regel ut såhär, i ungefärlig översättning

Av 60 är ⅔ lika med 40, och hälften är lika med 30.

Av det kan man dra slutsatsen att det fortfarande egentligen antogs att produkten av ett tal och dess reciproktal skulle vara lika med 60, precis som i den äldre typen av reciproktalstabell i avsnitt 7 ovan.

Dessutom är alla rader av typen *n* igi nu '*n* reciproktalet (finns) inte' borttagna i gammalbabyloniska reciproktalstabeller, och tabellerna avslutas med det reciproka paret (1 21, 44 26 40), där 1 21 (= 81) = 3 · 3 · 3 · 3 och 44 26 40 = 20 · 20 · 20 · 20.

10. Räkning med sexagesimala platsvärdestal i gammalbabyloniska matematiska uppgifter

Det är redan väl känt att reciproktalstabeller med sexagesimala platsvärdestal var en neo-sumerisk uppfinning. Vad som däremot inte alls är känt är om också så kallade *metrologiska tabeller* var en neo-sumerisk uppfinning eller om de infördes först litet senare, i den gammalbabyloniska perioden. En metrologisk tabell är en tabell för omvandling till sexagesimala platsvärdestal av en systematiskt arrangerad växande lista av innehållsmåttstal, viktmåttstal, ytmåttstal, eller längdmåttstal.[13] I den grundläggande delen av utbildningen för eleverna i gammalbabyloniska skrivarskolor spelade inlärningen av sådana metrologiska tabeller, tillsammans med sexagesimala multiplikationstabeller och reciproktalstabeller, en stor roll.[14]

Avsikten med de metrologiska tabellerna var att eleverna skulle kunna omvandla givna måttuttryck i en matematisk uppgift till sexagesimala platsvärdestal, sedan utföra alla beräkningar enbart med hjälp av de sexagesimala platsvärdestalen, och därefter vara i

12. Se t ex J. Friberg (2007) *A Remarkable Collection*, Kap. 2.5.
13. Se t.ex. J. Friberg (2007), *A Remarkable Collection*, Kap. 3 och Appendix 5.
14. Se t.ex. C. Proust (2007), *Tablettes mathématiques de Nippur*, Kap. 5 och Kap. 8.

stånd att uttrycka det erhållna svaret till problemet som vanliga måttutryck igen. Ett bra exempel på hur det kunde gå till är den lilla problemtexten MLS 1842.[15] Där är frågan uttryckt så här, i svensk översättning:

Marknadskvoten gick upp och jag köpte 30 gur korn, marknadskvoten gick ner och jag köpte 30 gur korn.

Jag lade ihop mina marknadskvoter, det blev 9.

Jag lade ihop silvret för mina marknadskvoter, det blev 1 mina 7 ½ shekel.

Vilka var mina marknadskvoter?

Lösningsproceduren börjar med att säga

Anteckna att silvret var 1 07 30. Beräkna reciproktalet för 1 07 30, då kommer det upp 53 20.

Multiplicera 53 20 som kom upp med 9 för marknadskvoterna, då kommer 8 upp.

Multiplicera med 2 30 för dina marknadskvoter, då kommer 20 upp.

Osv.

Det betyder att 1 mina 7 ½ shekel silver tyst har omvandlats till '1 07 30'. På samma sätt har, utan någon som helst förklaring, 30 gur korn omvandlats till '2 30', därför att

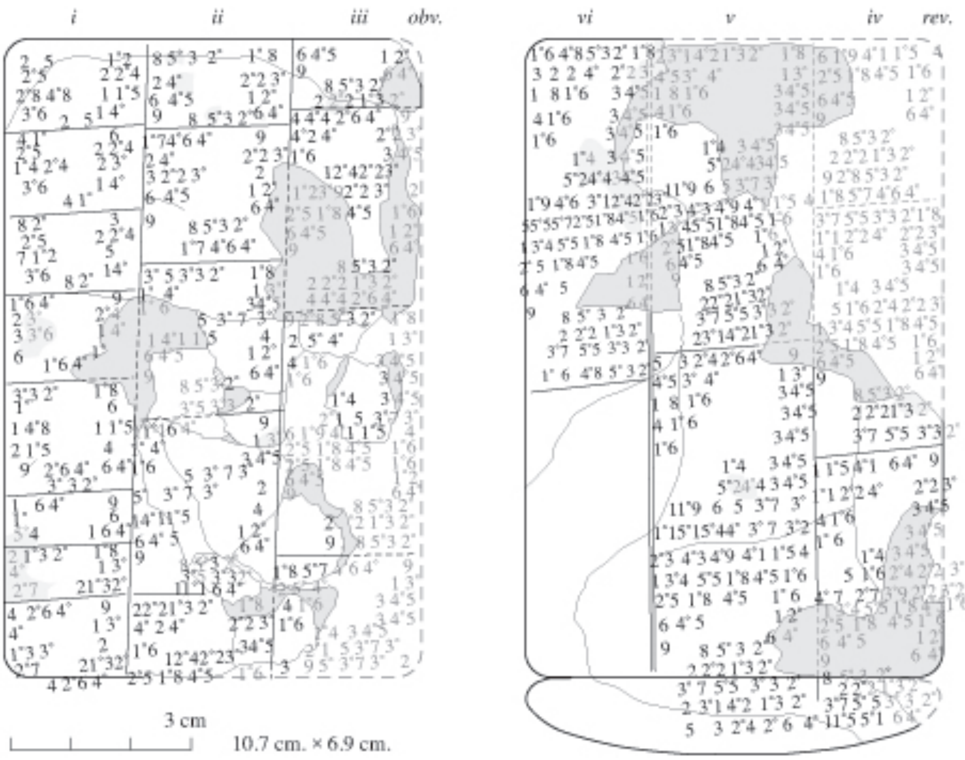
1 gur = 5 barig = 5 · 6 bán = 5 · 6 · 10 sìla = 5(60) sìla, så att 30 gur = 30 · 5(60) sìla = 2 30 · 60 sìla = '2 30'.

Sedan räknas det alltså med dessa omvandlade värden. Tyvärr är sista delen av texten förlorad, men resultatet av beräkningarna var säkert att de två okända marknadskvoterna var '5' och '4' i flytande sexagesimaltal. I svaret kunde detta resultat sedan omvandlas tillbaka till innehållsmått, nämligen till 5(60) sìla = 1 gur, respektive 4(60) sìla = 4 barig.

Det finns också ett antal gammalbabyloniska matematiska texter som inte innehåller några mått alls utan bara sysslar med abstrakta sexagesimala platsvärdestal. Exempel är intressanta beräkningar av kvadratroten ur givna tal som produkten av kvadratrötterna ur faktorerna i talen eller beräkningar av reciproktalen till givna reguljära sexagesimaltal som produkten av reciproktalen till faktorerna i talen.

Ännu intressantare är algoritmer för konstruktionen av nya par av reciproka reguljära sexagesimaltal med utgångspunkt från redan kända sådana par. Metoden är en vidareutveckling av den metod som användes för konstruktionen av reciproktalstabellen T. 2865 i avsnitt 7 ovan.

15. Se Neugebauer och Sachs (1945), *Mathematical Cuneiform Texts*, text Sb, s. 106, och J. Friberg / A. George, Six more mathematical cuneiform texts in the Schøyen Collection, i D. Minutoli och R. Pintaudi (utg.), *Papyri Graecae Schøyen*, s. 155.



En sådan algoritm finns med i texten CBS 1215,[16] som ovan är avbildad i translitteration. Utgångspunkten för algoritmen är det reciproka paret (2 05, 28 48), där 2 05 (= 125) = 5 · 5 · 5. I det första facket i kolumn *i* räknas det ut med den nämnda typen av faktoriseringsalgoritm att rec. 2 05 = 28 48 = 12 · 12 · 12 och att omvänt rec. 28 48 = 2 05. I nästa fack är 2 05 fördubblat och 28 48 halverat. Resultatet blir det nya reciproka paret (4 10, 14 24). Med samma faktoriseringsalgoritm som förut räknas det ut att rec. 4 10 = 14 24 och att omvänt rec. 14 24 = 4 10. Osv., tills i det sista facket, i kolumn *vi*, visas att rec. 10 06 48 53 20 = 5 55 57 25 18 45 och vice versa. (I den här texten följs den vanliga rutinen i gammalbabyloniska kilskriftstexter att kolumnerna på baksidan av lertavlan räknas från höger till vänster.)

Uppenbarligen har man i sådana här algoritmtexter kommit mycket långt från praktiskt användbar matematik och räkning med mått och tal av bestämd storlek!

11. Sexagesimala tal i senbabyloniska matematiska texter.

Ett antal senbabyloniska texter från den senare hälften av det första årtusendet f.Kr. återupptog och vidareutvecklade de nämnda gammalbabyloniska algoritmiska metoderna för beräkning av reciproktalen till givna reguljära sexagesimala platsvärdestal eller för den

16. Friberg (2007), *A Remarkable Collection*, Appendix 3.

systematiska konstruktionen av enormt omfångsrika reciproktalstabeller med mångsiffriga reguljära sexagesimaltal.[17]

Ett intressant fall är W 23021[18] (nedan). Det är en skoltext från den achemenidiska (persiska) perioden i Mesopotamien, c. 450 f.Kr., som innehåller flera algoritmiska uträkningar av reciproktal som produkten av reciproktalen till faktorerna i det givna talet. Det är precis samma metod som i den gammalbabyloniska texten CBS 1215 i föregående avsnitt. Till exempel den första beräkningen på W 23021 visar att rec. 52 40 29 37 46 40 = 1 08 20 37 30. Beräkningen går till så att först elimineras alla faktorer i det givna talet, en efter en, i en vänsterkolumn, och därefter multipliceras reciproktalen till de eliminerade faktorerna med varandra, ett efter ett, i högerkolumnen.

Ett annat intressant fall är den utvidgade reciproktalstabellen AO 6456 (se fotot nedan), med en datering till den seleukidiska (hellenistiska) perioden, c. 200 f.Kr.[19]. Man kan visa att tabellen är konstruerad på ungefär samma sätt som den neo-sumeriska reciproktalstabellen T. 2865 i avsnitt 7 ovan. Först beräknades alla potenser av 3 och 5 som sexagesimala platsvärdestal med upp till 6 sexagesimala platser (dubbelsiffror), och deras reciproktal. Med utgångspunkt från dessa reciproka par beräknades sedan nya reciproka par med hjälp av *dubblerings- och halverings-algoritmen*, alltså som (2 *n*, ½ rec. *n*), eller (½ *n*, 2 rec. *n*), i regel så länge som minst ett av talen i de beräknade reciproka talparen höll sig inom gränsen med högst 6 sexagesimala platser. Det återstående talet däremot kunde ha långt mer än 6 sexagesimala platser! Exempel:

17. J. Friberg (under arbete), *New Mathematical Cuneiform Texts*, Kap. 1-2.
18. J. Friberg (1999), A Late Babylonian factorization algorithm for the computation of reciprocals of many-place sexagesimal numbers, *Baghdader Mitteilungen* 30, 139-161, 2 pl.
19. O. Neugebauer (1935), *Matematische Keilschrift-Texte I*, s. 14;
 J. Friberg (under arbete), *New Mathematical Cuneiform Texts*, Kap. 1.5.

rec. 1 29 40 50 24 27 = 40 08 32 44 57 28 29 55 20 00 52 35 33 20.

Det här reciproka talparet kan man läsa i den tredje raden från slutet i andra kolumnen på framsidan.