Det Platon mener, er ... Essay om matematikken bag Epinomis 990 c 5 ff

af Christian Marinus Taisbak
Illustrationer: Claus Glunk
Platons tekst i Erik Ostenfelds oversættelse

Motto (Ian Mueller in memoriam):
Når Euklid skriver om matematik, er det for at vi skal forstå og blive klogere.
Når Platon skriver om matematik, er det for at vi skal fornemme og blive begejstrede.

> *Det vigtigste og første er det studium, der drejer sig om tallene selv, ikke i konkret form, men om hele det uliges og liges tilblivelse og den kvalitet, som de udstyrer virkeligheden med.*

Matematik skal de kunne, de unge, og først og fremmest skal de beherske læren om *tal* – dog skal de ikke blot sidde og tælle genstande, men lære om tallenes abstrakte natur. Det begynder med at forstå vigtigheden af forskellen *lige/ulige*, den kraftige forskel som pythagoræerne har udviklet en teori om.[1] At summen af to lige tal såvel som summen af to ulige tal er et lige tal, mens et lige plus et ulige tal er ulige. Ved multiplikation er det lidt anderledes: både lige gange lige og lige gange ulige giver et lige tal som produkt, mens ulige gange ulige altid giver et ulige produkt. Disse egenskaber ved begrebet lige/ulige er meget vigtige – og så må man huske at *ethvert tal er enten lige eller ulige* og ikke kan skifte *paritet*.[2]

> *Når man har lært dette, følger herefter, hvad man med et meget latterligt navn kalder 'geometri', men som fremtræder som en virksomhed som gør tal der ikke er af samme art, ensartede ved inddragelse af flader. At dette er et under, der ikke er menneskeligt, men guddommeligt, vil blive klart for den, der kan forstå det.*

Det lige og det ulige medvirker til at vise tallenes mærkværdige ufuldkommenhed eller mangfoldighed. I den disciplin der kaldes jordmåling eller geometri, giver lige/ulige-fænomenet anledning til tal i flere lag eller dimensioner (αὖξαι). Det er temmelig pudsigt at man går så højt op i at tale om geo-*metri*, når dens vigtigste resultat aldeles

1. Euklids *Elementer* IX 21-36
2. Disse egenskaber er grundlaget for digital matematik (Boolesk algebra) og dermed for computeren. Symboliseret ved 1 og 0, fysisk: elektromagnetisk ladning eller ej.

ikke er opmåling, men på samme tid er en indskrænkning og udvidelse af tallenes muligheder.

Det første lag kunne vi kalde *længdetal*, fordi de kan bruges til at angive længden af rette linjestykker. Det forunderlige er at de hurtigt kommer til kort – for (som vi ser det ved at betragte kvadratet) den enhed der måler siden i kvadratet og angiver længden som et tal, kan ikke også måle længden af diagonalen som et tal.

Sætning: Siden og diagonalen i et kvadrat er *inkommensurable*; de kan ikke måles med een og samme enhed.

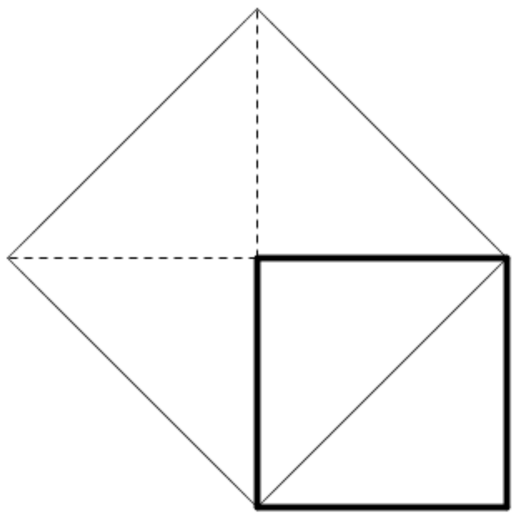
Bevis (*ad absurdum*, fører til en modstrid: at et og samme tal er både lige og ulige):

Antag at en enhed måler siden ialt s gange og diagonalen ialt d gange, hvor s og d er hele tal som ikke begge er lige; for hvis de er, kan vi vælge en dobbelt så stor enhed.

Ifølge den pythagoræiske læresætning (*Elementerne* I.47) er $d^2 = s^2 + s^2$, $\quad d^2 = 2s^2$. $\quad$ (*1)
Her ses at 2 går op i d^2; d er altså et *lige* tal (fordi kvadratet på et ulige tal er ulige).
Altså må s være *ulige* ifølge antagelsen.
Da d er lige, kan d skrives som $2e$, og (*1) som $4e^2 = 2s^2$, som vi kan "forkorte" til $2e^2 = s^2$. $\quad$ (*2)
Her ser vi at 2 går op i s, som altså må være et *lige* tal, i strid med hvad vi netop indså.

Altså er antagelsen falsk: Der findes ikke nogen enhed der måler både siden og diagonalen. Q E D.

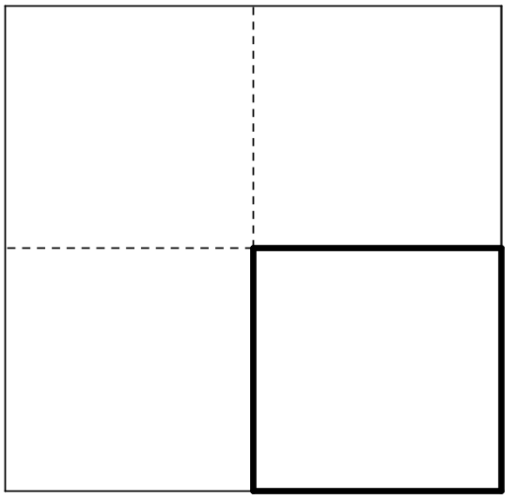
f figuren ses at kvadratet på diagonalen er dobbelt så stor som det oprindelige kvadrat, nemlig 4 halve kvadrater.



Her får vi brug for det næste lag tal, som vi vil kalde *fladetal* eller *potenser* (δυνάμεις).

Det forholder sig nemlig sådan at hvis vi kender længden af kvadratsiden, så kender vi indholdet, arealet, af to kvadrater, nemlig både det foreliggende og det kvadrat der har *diagonalen* som side. Det er nemlig dobbelt så stort som det første kvadrat. Vi kan desuden indse at hvis vi derimod vælger at *fordoble* den første kvadratside, får vi ikke et dobbelt så stort kvadrat, men et der er fire gange så stort.

$\square\,(2s) = 4 \,\square\, s$, algebraisk: $(2s)^2 = 4s^2$



Diagonalens længde er altså et eller andet sted mellem 1 og 2 af den enhed vi nævnte ovenfor. Vi vil sige at den er side (*πλευρά*) i fladetal 2, hvormed vi mener at hvis det første kvadrat er 1 fladeenhed, er diagonalens kvadrat 2 fladeenheder. Nogle matematikere taler om at "diagonalen *magter* (*δύναται*) to enhedskvadrater". Diagonalen og siden er u-sammålelige, (*ἀσύμμετροι*, *inkommensurable*).

Moderne: Diagonalens længde er kvadratrod 2, $\sqrt{2}$ (= 1,4142 ...), et irrationalt "tal", der kan skrives som en uendelig decimalbrøk. Begreber som var ukendte for oldtidens matematikere.

Til ethvert kvadrat med areal N (et helt tal) svarer en sidelængde $\sqrt{N}$. I en vis forstand er antallet af tal altså "forøget" med denne begrebsudvidelse, hele *arealtal*, idet arealet kan udtrykkes med et helt tal, men sidelængden ikke kan. Til længdetallene 1 og 2 svarer fladetallene 1 og 4. Der er to fladetal, 2 og 3, som ikke har noget tilsvarende længdetal.

$\sqrt{N}$ er et rationalt tal (kan skrives som en brøk $\frac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal) *hvis, og kun hvis*, N er et kvadrattal. Dette kan også udtrykkes således: $\sqrt{N}$ er enten et helt tal eller irrationalt.
(Se beviset i Q.E.D. side 44.)

Elementernes bog X, som muligvis er et arbejde af Theaitetos, udvikler konsekvenserne af eksistensen af inkommensurable linjestykker og fladetal. (Se Taisbak, *Coloured Quadrangles*.)

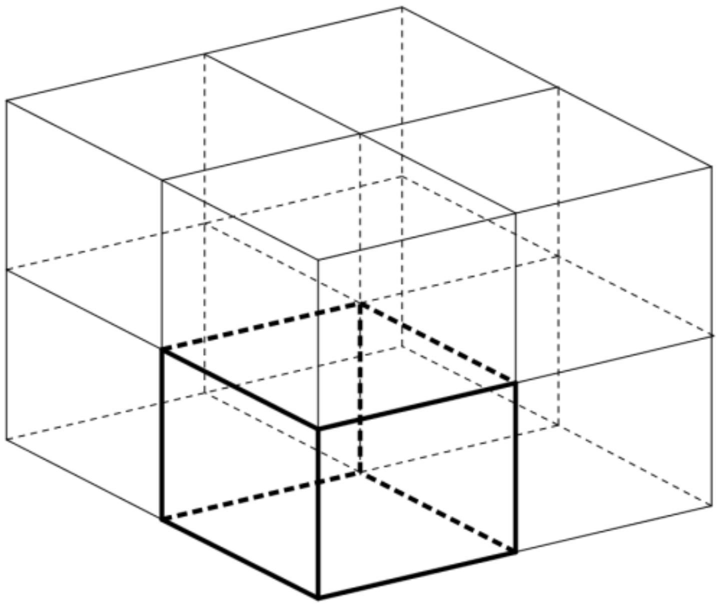
De to slags "tal" er af forskellig art (*ἀνόμοιοι*), fordi et kvadrat kan måles af et fladetal (fx 3), mens dets side ikke kan måles af et tal. Vi kan jo sige at vi har "fordoblet" mængden af "tal" ved hjælp af geometrien; andre vil mene at vi har fundet ud af at linjestykker er en mere omfattende art end tal.[3]

> *Og efter dette skal han lære om de tal der er opløftet til tredje potens og gjort ensartede ved tredimensionalitet. Det vil sige at han gør de uensartede tal ensartede med en anden videnskab, som de erfarne kalder 'stereometri'.*

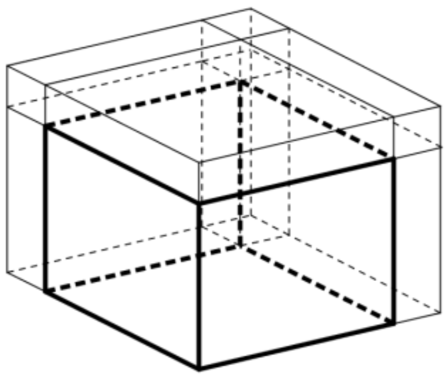
Etagerne slutter dog ikke her, vi kan komme til et tredje lag ved at betragte et rum, specielt en terning: her vil vi opdage at hvis vi blot fordobler kantlængden på en terning, får vi kanten på en terning der er 8 gange så stor som den foreliggende. For at få en terning der er præcis dobbelt så stor (vi mener: rummer dobbelt så meget) som den foreliggende, skal vi finde en længde der udtrykkes med et *rumtal.*

3. Både her og i det følgende er det bedre at opfatte Platons "fordobling" som "udvidelse". Men terminologien er uklar.

Kanten af en terning hvis rumfang er 2 enheder, er “den tredje rod” eller “kubikroden” af 2, igen et irrationalt tal (en smule mindre end 1.26, altså $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{100}$).



En terning med kanten 2 er 8 gange så stor som enhedskvadratet.



Men dette er noget guddommeligt og forunderligt for dem, der ser nærmere og overvejer, hvorledes hele naturen på denne måde former arter og slægter efter ethvert forhold (idet potensopløftning og det modsatte hele tiden drejer sig om det dobbelte) . Det første talfordoblingsforhold sker i den naturlige talrække, én til to, mens potensopløftningsforholdet er en slags fordobling. Og forholdet der leder til tredimensionale og faste genstande, er igen en slags fordobling, idet man går fra én til otte.

Der er altså hele tiden tale om en udvidelse, en slags "fordobling": 1) Til ethvert *helt tal* svarer et *lige* tal, nemlig det dobbelte af tallet. Forunderligt nok er der ligeså mange lige tal som der er hele tal i talrækken. Så mærkelig er uendelighed. 2) Ethvert helt tal kan optræde som *fladetal* på et kvadrat. Men der er mange flere hele fladetal end der er hele tal på kvadraternes sidelængder. Kun kvadrattal har rationale sidelængder. 3) Og ethvert helt tal kan optræde som *rumtal* (rumfang af en terning), mens den tilsvarende kantlængde ikke er et helt tal, men en irrational kubikrod. Kun de såkaldte kubiktal har rationale kantlængder. Kvadrat- og kubiktallene er i sig selv en "fordobling", idet der til ethvert helt tal svarer netop eet kvadrattal, 1, 4, 9, 16, 25 ... og eet kubiktal: 1, 8, 27, 64, 125 ...

Men for rigtigt at forstå og arbejde med disse "tal" får vi brug for den meget avancerede teori der handler om *forhold* (λόγος) mellem tal og mellem linjestykker. Tal og linjestykker og flader og rumlige figurer – kasser og kugler og kegler og pyramider osv – *taler med hinanden*, forholder sig til hinanden, har et *logos*, et mellemværende. Det er en særlig teori inden for læren om tal og geometriske figurer. [4] Mellem to tal eller to linjestykker er der altid et forhold; det bemærkelsesværdige er at der mellem to andre tal eller to andre linjestykker kan være det samme forhold – som om de to nye bruger samme ord på samme sprog som de to første.

Og det forhold der når til mellemleddet af det dobbelte, et tal der er lige meget større end det mindste tal og mindre end det højeste, og til et andet tal, som overgår yderleddene selv og overgås med samme del af disse – i midten af 6 til 12 forholdet findes både 2:3 og 3:4 forholdet – dette forhold, der går i begge retninger i midten mellem selve disse yderled, har som gave fra Musernes lykkelige kor tildelt menneskene en brug af samklang og proportion med sigte på glæde ved rytme og harmoni.

4. *Elementernes* bog V (om "størrelser", μεγέθη) og VII-IX (om tal ἀριθμοί, talpar og talsæt)

Fx er forholdet 6:8 det samme som forholdet 9:12. Vi taler da om at 6 og 12 er yderled (ἄκρα) og 8 og 9 er mellemled (μέσα) i en proportion (ἀναλογία) 6:8 :: 9:12. Mellemleddene kan bytte plads (ἐναλλάξ); så får vi to nye par som også er samme, men et andet forhold – 6:9 er samme forhold som 8:12.

20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Man kan tænke på forhold som talpar der bor på forskellige etager i en tabel. 3:7 (nederst) har samme forhold som 15:35 (i femte række). Nogle tal kan kun optræde i nederste række, de såkaldte *πρῶτοι ἀριθμοί*, *numeri primi*, primtal (3, 5, 7). Hvis man lægger tabellen ned, bytter mellemleddene plads, 3:15 :: 7:35 (:: 1:5), (*ἐναλλὰξ λόγος*).

Jo, der er en omfattende lære om forhold mellem tal og mellem linjestykker. For tal er det vigtigt at finde det mindste par i et givet forhold – det forhold kan udrette store ting.

Undertiden optræder der ikke to (som ovenfor), men kun et enkelt tal (eller linjestykke) imellem to tal (eller linjestykker), som så fungerer som mellemled (μέσος) i "samtalen", en *mellemproportional*. Der findes forskellige typer af mellemproportionaler: Den *arit-*

hmetiske, hvor mellemleddet er halvdelen af summen ("gennemsnittet") af yderleddene (fx 3, 7, 11). Den vigtige *geometriske,*[5] hvor mellemleddets kvadrat er lig med yderleddenes produkt (fx 4:6 :: 6:9). Og den morsomme *harmoniske*, hvor differenserne mellem mellemleddet og yderleddene forholder sig som yderleddene, $(a–b) : (b–c)$ :: $a : c$. Den spiller med i musikteorien og i læren om stambrøker, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$.

Tre tal, $A < B < C$, er i harmonisk proportion hvis $(B – A) : (C – B) :: A : C$, "mellemleddets afstande fra yderleddene har samme forhold som yderleddene".

Heraf udledes udtrykkene $AB + BC = 2AC$, og $\frac{1}{A}+\frac{1}{C}=\frac{2}{B}$, det sidste en operation med *stambrøker* (med tæller 1), en opgave som synes at have optaget ægyptiske matematikere meget, nemlig: "at skrive det dobbelte af en stambrøk $(2/B)$ som en sum af to (eller flere) forskellige stambrøker."

Primiske (uforkortelige) harmoniske talsæt kan produceres af denne formel:
Vælg to indbyrdes primiske tal a og c.
Hvis de begge er ulige, kald deres sum $2p$. Sæt $q = 1$.
Hvis de har forskellig paritet, kald deres sum p. Sæt $q = 2$.
Så er $A = ap$, $B = acq$, $C = cp$.

Eksempler: (2, 3, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 15), (4, 7, 28), (5, 8, 20), (30, 35, 42).

Mellem to *rumlige figurer* er der altid to geometriske mellemproportionaler, mens det ikke er tilfældet for tilfældige *tal*. Kort fortalt gælder det at kun kvadrattal (eller samme multipla af kvadrattal) har en mellemproportional; og kun kubiktal (8, 27, 64 osv) eller samme multipla af to kubiktal har to mellemproportionaler. Derimod er det altid muligt at konstruere en mellemproportional til to *linjestykker* (nemlig et linjestykke), og til to *kvadrater* (nemlig et rektangel) – men pas på: det ikke muligt at *konstruere* de to mellemproportionaler til to terninger.[6] Vi ved at mellemproportionalerne er der, men vi kan ikke få dem at se. Nogle mener at det altid vil være umuligt at fordoble en terning ved konstruktion.

5. Den geometriske er den eneste der spiller en rolle i Euklids forholdslære (*Elementer* VII-IX).
6. Nemlig med de euklidiske (virtuelle) redskaber passer og lineal. Med brug af keglesnit kan to mellemproportionaler konstrueres – men da forskydes problemet til "hvordan konstruerer man et keglesnit ?"

Ikke mindst forhold mellem linjestykker er en betydelig teori, fordi den gør det muligt at undgå at bruge tal og dermed slippe for at skelne mellem sidens tal og diagonalens tal. Matematikerne mener dog at linjestykker kun kan tale med linjestykker og flader kun med flader – de taler hver sin dialekt, så at sige, ligesom vi grækere.[7] Matematikland er slet ikke nemt at trafikere i. Det kræver en særlig undervisning og indsigt – men allerede det her sagte må være tilstrækkeligt til at unge mennesker fornemmer den guddommelige indretning. Se så at komme i gang.

Litteratur:
Q.E.D., Platon & Euklid tegner og fortæller. Gyldendal 2006, 3. oplag 2014.
C. M. Taisbak, *Coloured Quadrangles. A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements.* Museum Tusculanum 1982.

7. Den græske forholdslære tåler kun forhold mellem størrelser "af samme art" – hvilket var en væsentlig hindring i at udvikle adskillige fysiske begreber, for eksempel et anvendeligt hastighedsbegreb.