Her i nærheden [1]

af Christian Marinus Taisbak.

En lille dialog om store emner, *τὸ ἄπειρον* og *τὸ ἄτοπον* , det endeløse og det hjemløse. En dialog i platonisk ånd i anledning af en tresårsdag. Nu var *runde* dage næppe noget grækere og romere gik op i som vi danske af i dag, men 60-året var alligevel noget særligt: om ikke før, geront og senex var man fra den dag. Og 60-tallet var alle dage genstand for den opmærksomhed som et udstrakt brugt talmål må være: den foretrukne enhed (bortset fra eneren selv) siden alle tællingers begyndelse ved Babylons floder, uundværlig for astrologer, såvel de regnende som de gættende, åbent for utallige divisorer (2, 3, 4, 5, 6 … næsten dem alle sammen). Denne lille dialog markerer en Ener.

De samtalende er *Euklid* fra Alexandria, *Στοιχειωτής*, Elementsamleren fra det fjerde århundrede før Tidens Midte, og *Gorm* fra Heliopagos, aktiv *philologus* og *interpres* fra det tyvende efter. Euklid har valgt at inkarnere sig på Det fredensborgske Akademi, og selv om samtalen føres på dét alexandrinske græsk der falder dem begge naturligt, har formidleren valgt at oversætte den, ikke til angelsaxisk, det i øjeblikket definerede lingua franca, men til Gorms gode nordsjællandske mål. Euklid har omhyggeligt valgt en af de sjældnere hjemmemorgener, en søndag i juli, hvor Gorm ikke har foden ude af døren på vej mod sine mange forpligtelser i ånd og rige.

Scenen er akademiets førstesal med det store arbejdsbord, papir og blyant, og måske en passer og lineal, skønt Euklid helst er fri for disse håndgribeligheder. Her skal tænkes, og kun tegnes hvis tanken går i stå.

* * *

E: Du har jo gået i skole, Gorm, både den teoretiske og den praktiske, og véd at nogle rette linjer er parallelle. Hvordan er det nu man kender dem?

1. Tak til Martha Christensen for lån af titel

G: For det første skal de jo tegnes på samme skrivebord, eller som I matematikere siger: i samme plan, og så skal det gælde at de ikke skærer hinanden selv om man forlænger dem i det uendelige.

E: Pas nu på, Gorm; Aristoteles – vores fælles lærer og forbillede – advarer jo mod at bruge "det uendelige" i argumentationen, og med god grund. Hvorfor nu det?

G: Næh, hvorfor egentlig? Det lyder da så flot og overbevisende. Men lad os så sige at parallelle linjer ikke skærer hinanden hvor langt man end forlænger dem.

E: Godt, så siger vi det. Men også det udsagn er da lidt vidtløftigt, for hvordan vil du overkomme at godtgøre at disse to linjer (*tegner og peger*) er parallelle? Der er jo ret langt i begge retninger, hvis jeg nu tænker dem forlænget så langt det skal være. Det bliver da vistnok hverken i dag eller inden din næste fødselsdag, rund eller kantet.

G: Næh, det har du såmænd ret i, Euklid. Det har jeg nok ikke tænkt længe nok over.

E: Det skal du ikke være så ked af, for du er ikke alene i den kø. Men nu skal jeg vise dig hvordan vi kan klare opgaven *her i nærheden,* lige her på bordet. Men for at det skal blive helt overbevisende, må vi lige snakke lidt om trekanter og vinkler.

G: Er du nu ikke ved at tale uden om? Hvad har trekanter og vinkler med parallelle linjer at gøre? Når de er parallelle, og altså ikke skærer hinanden, danner de jo ikke vinkler og kan derfor heller ikke danne en trekant.

E: Véd du godt at du er lige ved at have fat i det rigtige dèr? For lad os nu antage at disse to rette linjer alligevel skærer hinanden og ikke er parallelle, så kan vi jo få en trekant ud af det ved at skære dem med en tredje linje, fx *lige her*. Og lad os så gøre os klart hvad vi har lært om vinklerne i en trekant – jeg har skrevet det ned i første bog af Elementerne, sætning 16 og 17,[2] som du muligvis husker: det er dèr hvor det går op for os at forholdene *udenom*

2. se Q.E.D. side 62, Thyra Eibe side 24 ff

trekanten er vigtige. Den udvendige vinkel til en trekantsvinkel er nemlig større end enhver af de to andre vinkler inde i trekanten, og deraf kan man slutte at summen af to trekantsvinkler er mindre end 2 rette vinkler (det som din tid, Gorm, kalder 180 grader – men grader overlod vi dengang til astronomerne og deres cirkler).

G: Ja, de sætninger husker jeg godt – og det gælder jo uanset hvilke to vinkler vi betragter. Jeg var godtnok forbavset over at trekantens omgivelser betyder så meget; er der ikke også noget om at denne sætning ikke gælder for trekanter på kuglen?

E: Lad nu bare det vente, og lad os vende tilbage til de parallelle linjer. Altså: Hvis linjerne ikke er parallelle, men danner en trekant sammen med den linje vi har tegnet lige her, så må de vinkler som denne tredje linje danner med de to første på denne side (*peger i retning af skæringen*) være mindre end to rette. Så har vi da et middel til her i stuen at afgøre at de er parallelle. Vi behøver altså ikke løbe til verdens ende, men kan afgøre det *her i nærheden.*

G: Ja, jeg forstår at vi nu kan fastslå at *hvis de nævnte vinkler tilsammen er præcis lig med to rette vinkler, så er linjerne parallelle*. For hvis de mødtes til en af siderne, ville vi stå med en trekant hvor summen af to vinkler "er for stor".

E: Det er netop hvad jeg har bevist i sætning 27 og 28 i første bog.[3] Der er altså ingen tvivl om at der findes parallelle linjer, for vi kan konstruere dem ved hjælp af rette vinkler. Men gælder også den omvendte sætning?

G: Den omvendte sætning? Forstår jeg helt hvad du mener?

E: Det må du da have lært af Aristoteles? Udsagnet "hvis B så A" er den omvendte sætning til "hvis A så B". Du husker vel at hvis en trekant er ligebenet, er vinklerne ved grundlinjen ligestore? Hvorledes lyder den omvendte sætning?

G: Hvis vinklerne ved grundlinjen i en trekant er ligestore, er trekanten ligebenet.

3. Q.E.D. side 68 f. Thyra Eibe side 40 ff

E: Flot! De to sætninger har du måske set som nr. 5 og 6 i første bog.[4] Kan du også huske hvordan den omvendte sætning (nummer 6) er bevist?

G: Var det ikke noget med at benytte resultatet fra nr. 5 på en særlig måde?

E: Særlig? Ja, det må du nok sige – det er den metode der fører til et udsagn som er ret hjemløst; vi matematikere kalder det *ἄτοπον*. I sætning 6 ender det med at en bestemt trekant er både mindre og større end én og samme trekant, og det har jo ingen steder hjemme.

G: Åh ja, det er det latinerne kalder *ad absurdum*, og andre taler om "et indirekte bevis". Der er vist nogle matematikere der ikke er så glade for den type?

E: Jeg synes nu det er ret effektivt til at standse diskussionen – såvidt jeg har læst, var Sokrates rigtig god til at lokke folk i modstridende udsagn. Men tilbage til vort emne: Hvordan må så den omvendte parallel-sætning lyde? Noget i retning af: *Hvis to rette linjer er parallelle og overskæres af en tredje, er de indvendige vinkler på samme side tilsammen lig med to rette.*

G: Ja, det er da indlysende, omtrent sådan må den omvendte sætning lyde.

E: Pas nu på – jeg må nok hellere tilstå at vi skal gå stille med dørene, for der er et problem her. Det bliver nu nok lettere for dig at følge hvis du lige husker at den omvendte sætning til "Hvis A så B" også kan lyde "Hvis ikke A, så ikke B". Er du med?

G: Er det ikke den form logikerne kalder *kontrapositionen* til "Hvis B, så A"?

4. Q.E.D. side 57. Thyra Eibe side 10 ff

E: Det lyder som latin, så det er nok rigtigt. Det er i hvert fald en meget nyttig form, og ofte mere overbevisende end den ligefremme. – Det kunne jo være at vi skulle formulere den omvendte sætning således: Hvis et *system* (det er sådan et godt græsk ord) af tre linjer (som det vi har tegnet her) danner indvendige vinkler hvis sum er mindre end 2 rette, danner de en trekant, og der er altså ikke tale om parallelle linjer.

G: Ja, det lyder som en rigtig god formulering, den skulle ikke være til at tage fejl af.

E: Kære Gorm, det kan vi strengt taget ikke vide; det kunne jo være at de ikke var "mindre nok", så at linjerne alligevel ikke når sammen. Jeg skal dog ikke skjule at jeg er overbevist om at sætningen er sand, men vi er indtil videre nødt til at fremsætte den som en påstand, et *αἴθημα*, og jeg bruger den til at bevise sætning 29.[5]

G: Ja, det ord betyder vel "noget vi beder om" eller "forlanger"? Latinerne oversatte det til *postulatum*, så det kan vi også bruge. Er det ikke netop det udsagn du har anført som nummer 5 i din samling af postulater? *Hvis en ret linje skærer to rette linjer, og de indvendige vinkler på samme side tilsammen er mindre end to rette, så mødes de to linjer hvis de forlænges ubegrænset, på den side (af den skærende linje) hvor de to vinkler ligger som er mindre end to rette.*

E: Godt husket, Gorm – der er er ikke noget så nyttigt som paratviden.

G: Men så kan jeg nu ikke skjule for dig at dine efterfølgere har brugt megen tid på at bevise dette axiom, og at det faktisk lykkedes for et par matematikere et par tusind år efter dig at vise at der findes parallelle linjer der ikke respekterer postulatet. Derved fik de opdaget en geometri der er forskellig fra din – men det behøver du nu ikke være ked af, for den bærer stadig dit navn – ikkeEuklidisk geometri.

5. Q.E.D. side 70. Thyra Eibe side 43

E: Det glæder mig – og tro mig: det anede mig at der kunne være tvivl om 5. postulat – blot ikke i *min* plane og ubegrænsede verden af rette linjer og cirkler Men lad os vende tilbage til det der var anledning til denne samtale, begrebet *uendelig*. Og mærk dig at vi altså løste de parallelle linjers problem uden at bevæge os ud af stuen. Jeg kan godt lide at løse problemer *her i nærheden*. Jeg har da for resten endnu et eksempel på et endeløst problem der kan afklares her på bordet.

G: Mere geometri? Eller hvad?

E: Nej, dette eksempel drejer sig om tal – jeg har jo skrevet tre bøger om forhold mellem tal, og har især interesseret mig for dem mine lærere kaldte *πρῶτοι ἀριθμοί*, *første tal*.

G: Vi kender dem bedst med det latinske navn, *numeri primi*, primtal. I grunden et underligt navn når man tænker over det?

E: Aldeles ikke: de hedder således fordi de kun kan stå forrest i multiplikationstabellerne, altid i randen og aldrig nede eller inde i tabellerne. Fx 2, 3, 5, 7, ..., 37, 41, 43, ... 97, 101... Ja, vi kan fortsætte til det bliver både mørkt og lyst igen, for der er faktisk uendeligt mange af dem. Til gengæld kan ingen af dem divideres, intet andet tal går op i et primtal, undtagen 1, som jo ikke er et rigtigt tal i min teori.

G: Hvor véd du fra at der er uendeligt mange primtal, Euklid?

E: Det har jeg da selv bevíst, Gorm, - og med så få hjælpemidler som muligt.[6] Jeg kan vise at hvis du bare giver mig to – nej lad os sige tre primtal, kan jeg vise at der findes mindst ét og måske to til, altså: at *der er flere primtal end du kan komme med*. I dette tilfælde ganger jeg de tre primtal sammen og lægger 1 til. Så vil ingen af de primtal du gav mig, gå op i produktet, men give 1 til rest. Altså er resultatet enten selv et nyt primtal eller kan divideres med et fjerde primtal. Enkelt, ikke sandt? Og med små midler, selvom jeg bruger “det hjemløse udsagn”s bevis, *τὸ ἄτοπον*. Og læg mærke til at jeg for det første ikke bruger ordet

6. se appendix 1, eller Thyra Eibe, bind IV, sætning IX.20, side 105

“uendelig”, ἄπειρον, og for det andet klarer beviset *lige her* ved at jonglere med kun tre primtal..

G: Smukt, må jeg indrømme. Men helt slippe uden om “uendelig” kan du vel ikke?

E: Du kan, såvidt jeg husker, ikke finde noget sted i mine *Elementer* hvor ordet optræder, selvom begrebet – som i disse to tilfælde – er effektivt til stede. Derimod kan du jo more dig med, i en ledig stund, at finde flere eksempler på de hjemløse udsagn i omvendte sætninger. – Men lad være med at spilde for mange tanker på Achilleus og Skildpadden, du véd: Zenons grinagtige eventyr om den hurtigste der ikke kan indhente den langsomste, men må løbe “i det uendelige”. Herre Zeus, du kan jo selv regne ud hvornår og hvor Achilleus indhenter og overhaler skildpadden, som vi jo véd at han gør. Vogt dig for Paradoxerne, Gorm.[7] Og så må du hellere passe din runde fødselsdag og demonstrere for gratulanterne at du er til at træffe – som altid når der er bud efter dig. Hvem vil ikke gerne hilse på dig i dag, du ἑξηκονταέτης? Til lykke med Den Store Ener.

G: Hjertelig tak. Skal jeg ikke følge dig til stationen og Lille Nord?

E: Nej tak, bliv du hellere *her i nærheden*, jeg har andre muligheder, så jeg tror jeg evaporerer nu. Lev vel og længe endnu, jeg hilser fra dig i Elysium.

Litteraturhenvisninger:

Q.E.D. Platon & Euklid tegner og fortæller. Gyldendal 2006, 2. udg. 2010.

Thyra Eibe, Euklids Elementer. Bind I, 1897. Bind IV, 1912.

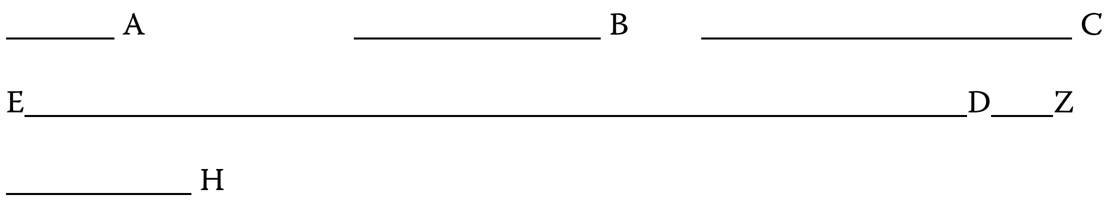
Thomas Heath, The thirteen books of Euclid’s Elements. Dover, mange udgaver.

7. se appendix 2

Appendix 1

Elementerne **IX.20**: *Der findes flere primtal end ethvert forelagt antal primtal.*

Lad de foreliggende primtal være A, B og C. Min påstand er at der findes flere primtal end A, B og C.



Bevis: Lad DE være det mindste fælles mangefold af A, B og C [dvs. produktet A x B x C], og læg enheden DZ til. Så er EZ enten et primtal eller ej. Antag først at det er et primtal; der er da fundet primtallene A, B, C og EZ, som er flere end A, B og C.

Men antag så at EZ ikke er et primtal; så kan det måles af et eller andet primtal [dvs: et eller andet primtal går op i EZ]. Antag at det måles af primtallet H.

Min påstand er nu at H ikke er det samme som et af tallene A, B eller C. Thi hvis det er muligt så lad det være tilfældet.

Men A, B og C går op i DE [deres produkt]. Og H går altså også op i DE, samtidig med at H går op i EZ. Følgelig går H op i resten DZ, altså enheden, skønt H er et tal større end enheden. Men det *har ingen steder hjemme.*

Altså er H ikke det samme som et af tallene A, B og C. Og det var forudsat at H er et primtal; altså er der fundet primtallene A, B, C og H, som er flere end A, B og C. *Hvilket skulle bevises.*

Appendix 2

Paradox: "(En) tilsyneladende fornuftstridig påstand som i virkeligheden indeholder en sandhed" (Dansk Fremmedordbog – Gyldendal).

Det var Zenon fra Elea der – i et anfald af paradoxitis, som stadig kan smitte – sendte den fodrappe Achilleus ud i det håbløse kapløb med den sløveste sløvskildpadde. Den lader sig ikke indhente såfremt den har et forspring – for når Achilleus når frem til Skildpaddens startpunkt, er den jo foran, og så må han først lige løbe det stykke osv osv *ad infinitum.*

Han må da have været en gevaldig komiker, ham Zenon – hvis det da er ham selv der har indført skildpadden, Aristoteles nævner den ikke. Hvor må de have grinet ad den scene, hans tilhørere og venner, og vel ikke mindst ad filosofferne, der stod og måbede (ja, måbede – i halvtredje tusind år, den dag endnu). Matematikerne var mere pragmatiske, i det omfang de overhovedet gad interessere sig: de regnede simpelthen ud hvorlangt de to har løbet når Achilleus overhaler, som vi jo véd at han gør.

Antag, for nemheds skyld, men lidt absurd, at Achilleus løber 10 m/s (36 km/h, ca dobbelt så hurtigt som man kan cykle i København), mens Skildpadden løber 1 cm/sek (36 m/h), og lad S få en kilometers forspring, 1000 meter eller 100 000 cm. I stedet for at ræsonnere over de enkelte intervaller kan vi koncentre os om at beregne hvornår A indhenter S. Lad os sige efter x sekunders løb.

Så har A løbet 10 • x meter (= 1000 • x cm), og S har vandret x cm. Idet As løb indeholder S's forspring på 100.000 cm, har vi følgende ligning:

1000x = 100 000 + x, hvoraf x = 100 000 / 999 sekunder = 100,1001001001… = 100 sekunder + en bagatel mere end en tiendedel sekund, altså 1 minut 40,1 sekunder. Skildpadden nåede lidt mere end 100 cm, dvs. én meter plus én millimeter, og blev overhalet da Achilleus havde løbet én km plus skildpaddens lange meter.

Selvom vi ikke intuitivt kan fatte det, lærer vi heraf at en uendelig sum af stedse aftagende intervaller (konvergerende, kalder vi de intervaller) har en endelig sum (at vi ikke kan udtrykke 100/999 som en endelig decimalbrøk, har jo kun noget med 10-talsystemet at gøre). Paradoxet er ikke så meget matematisk som psykologisk – dog fik matematikken ikke afgørende styr på det før Cauchy (1789-1857) "opfandt" grænseværdi-definitionen.

marinus@mail.dk