Effekter av flexibel resultatanpassad matematikundervisning

Håkan Sollervall
Universitetslektor,
Linnéuniversitetet, Växjö

Madelene Johansson
Grundskollärare, Skogstorpsskolan, Falkenberg

Roger Carlsson
Grundskollärare, Skogstorpsskolan, Falkenberg

Susanne Karlbom
Mellanstadielärare, Skogstorpsskolan, Falkenberg

Tre matematiklärare och en forskare i matematikdidaktik har tillsammans genomfört ett utvecklingsarbete för att stärka matematikundervisningen och elevers lärande inom området subtraktion. Projektet, som involverade 33 elever i årskurs 4, bedrevs i form av kollegialt lärande med expertstöd. Utifrån upprepade testresultat har undervisningen anpassats både till form och innehåll för att stödja elevernas lärande av det valda lärandeobjektet. Det kollegiala arbetet har organiserats med utgångspunkt i learning study. Därutöver har flera teorier och metoder kombinerats för att kunna möta alla elevers lärande utifrån deras förutsättningar. Undervisningen har fokuserat på variation av och omvandling mellan olika representationer av lärandeobjektet. I denna artikel redovisas viss positiv effekt på elevernas testresultat efter helklassundervisning och en större positiv effekt efter strukturerad lärarledd undervisning i mindre elevgrupper.

Underlaget till denna studie kommer från ett utvecklingsarbete som genomfördes under åren 2011–2013 vid en grundskola i södra Sverige, med stöd av det svenska Skolverket (2011a). Den del av utvecklingsarbetet som redovisas här behandlade strategier för att räkna subtraktion, med fokus riktat på strategin att räkna från den andra termen till den första när termerna i subtraktionen ligger nära varandra, till exempel 304 – 298, samt att kontrastera mot subtraktioner där det passar bättre att subtrahera talsorterna var för sig, som i exemplet 435 – 121.

I detta subtraktionsprojekt, som planerades våren 2012 och genomfördes med elever hösten 2012, deltog tre matematiklärare och en forskare i matematikdidaktik. De tre lärarna, som alla undervisade i årskurs 3–5, hade då fått introduktion till learning study som en modell för att utveckla och beforska sin egen undervisningspraktik (Runesson 2010). Själva grundansatsen i learning study – med kollegialt samarbete, att gemensamt planera undervisning med fokus på ett matematiskt lärandeobjekt samt att genomföra och utvärdera denna undervisning med förtest och eftertest – uppfattades som tilltalande och meningsfull. Gruppen kom tidigt överens om att i största möjliga utsträckning arbeta med learning study som metod, men att vid behov gå utanför denna modell. Allt eftersom arbetet fortskred introducerades olika arbetssätt med syfte att erbjuda bästa möjliga förutsättningar för elevernas lärande. Det var omöjligt att i förväg planera vilka teorier, metoder och arbetssätt som skulle användas i ett senare skede av projektet eftersom de anpassades till elevernas testresultat och utvärderades kontinuerligt. Denna flexibla ansats skulle visa sig ha stor betydelse för elevernas positiva resultatutveckling.

Elevernas lärande mättes kvantitativt med ett skriftligt prov bestående av 17 uppgifter av lärobokstyp (se bilaga 1, sid 41), där merparten (15 stycken) av uppgifterna uppmanade till direkta beräkningar av symboluttryck (till exempel 304 – 298 =) medan två uppgifter handlade om att sätta utgivna tal på en tallinje (se bilaga 1, uppgift 1 och uppgift 3). Detta prov utformades av lärarna och diskuterades med forskaren, varvid några enstaka justeringar gjordes. Lärarnas motivering till denna något ensidiga utformning av provet var just att dessa uppgifter liknar dem som finns i läroboken och de rena räkneuppgifter som återkommer på nationella proven. Avsikten var inte att provet skulle testa vad eleverna kom ihåg från undervisningen utan vad de hade lärt sig av den, med fokus på strategier för symbolisk beräkning. Identiska prov användes vid ett inledande förtest och tre eftertest, där eftertest genomfördes efter varje undervisningspass.

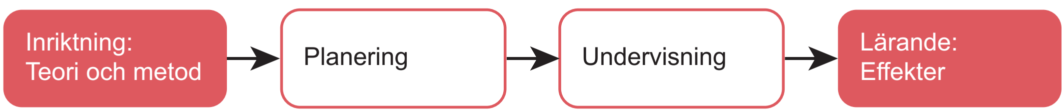
Vi har valt att beskriva elevernas resultatutveckling med linjediagram, som visar positiva effekter av den genomförda matematikundervisningen på elevernas lärande och hur dessa effekter uppnås med olika insatser för olika elevgrupper.

Syfte och forskningsfrågor

Syftet med det aktuella utvecklingsprojektet var att stödja elevernas lärande av strategierna utfyllnad och borttagning vid subtraktion. Syftet med denna studie är att beskriva elevernas resultatutveckling och att relatera denna utveckling till undervisningsinsatsernas karaktär. Huvudfrågan i denna studie är därför:

Hur har inriktningen på den genomförda matematikundervisningen påverkat elevernas resultatutveckling avseende räknestrategier för subtraktion?

I stället för att beskriva hur matematikundervisningen faktiskt har genomförts, har vi valt att rikta fokus mot dess inriktning, beskriven i form av de teoretiska utgångspunkter och metoder som lärarna har använt sig av i sin gemensamma planering. Detta ligger helt i linje med utvecklingsprojektets ansats att lärarna själva ansvarar för att omsätta tillgängliga teorier och metoder i planering och genomförande av undervisning. Å ena sidan finns i denna forskningsansats en förhållandevis svag koppling mellan aspekterna inriktning och lärande (jämför figur 1: Inriktningen påverkar planeringen som påverkar undervisningen som i sin tur påverkar lärandet), å andra sidan innebär den explicit undersökning av inriktningens betydelse för lärandet. Naturligtvis vore det önskvärt att även belysa planering och undervisning, men det kräver en mer omfattande studie än den som genomförts här.



Figur 1: Schematisk beskrivning av studiens ansats

Teoretiska utgångspunkter

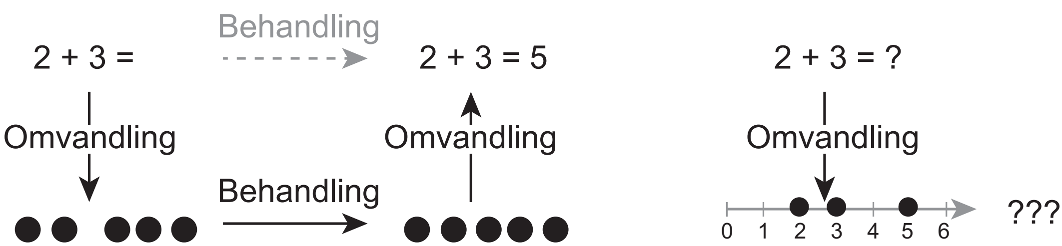
Vår studie stöds av ett bricolage av olika teorier och metoder, hämtade från olika vetenskapliga sammanhang (Kincheloe 2001). Öppenhet för olika teorier och metoder passar särskilt väl i forskningssamarbeten, där praktiker och forskare med olika bakgrund kan bidra utifrån olika synsätt och infallsvinklar på en problematik av gemensamt intresse (Penuel, Roschelle och Shechtman 2007). Ansatsen tillåter också att urvalet av teorier och metoder anpassas successivt, i förhållande till de resultat som framträder i forskningsprocessen. Medan denna anpassning medför en förhållandevis svag anknytning till redan etablerade vetenskapliga sammanhang, så förstärker den flexibla ansatsen möjligheterna att erhålla nya och oväntade insikter om forskningsobjektet (Kincheloe 2001). I stället för att formulera forskningsfrågor som passar in i etablerade vetenskapliga sammanhang, kan den vetenskapliga inramningen anpassas till praktikens frågor (Carlgren 2012). Ansatsen med bricolage har en lång tradition i den matematikdidaktiska forskningen och utmanar ”the positivist epistemology of practice wherein practical reason is construed as the application of theory” (Cobb 2007:3). Denna forskningsansats ska dock användas med försiktighet, och forskaren ansvarar för att minimera det inslag av godtycke och subjektivitet som den oundvikligen för med sig (Gellert 2010).

I vårt bricolage har teorier om representation av matematiska objekt en central roll. Vi ska i de kommande två avsnitten diskutera dessa teorier, såväl generellt som med fokus på studiens valda lärandeobjekt. I det tredje avsnittet tar vi upp metakognitiva strategier för självreglering av egna handlingar med speciell relevans för matematisk problemlösning. Medan teorierna om representation fanns med som utgångspunkter i projektet så aktualiserades teorierna om självreglering under projektets gång, när projektdeltagarna diskuterade utfallet av undervisning och tester.

Allmänt om matematiska representationer

Representationer är särskilt viktiga i matematiken, där objekten utgörs av idéer som inte kan observeras direkt i omvärlden utan måste konkretiseras i relation till artefakter (Ogden och Richards 1923; Duval 2006), till exempel fysiska objekt, bilder, diagram och symboler (Sollervall 2009, 2011).

En viktig egenskap är att olika representationer av samma objekt kan ha olika förklaringsvärden (Davis 2010; Sollervall 2011). Exempelvis kan 2 + 3 = 5 förklaras genom att flytta först två steg och sedan tre steg till (i verkligheten eller på en tallinje) eller genom att lägga ihop 2 bollar och 3 bollar (figur 2, till vänster) men inte genom att relatera till en tallinje där talen 2, 3 och 5 är representerade som punkter (figur 2, till höger). För att tallinjen ska fungera som stöd för



Figur 2: Omvandling som förklarar (vänster) och omvandling som inte förklarar (höger)

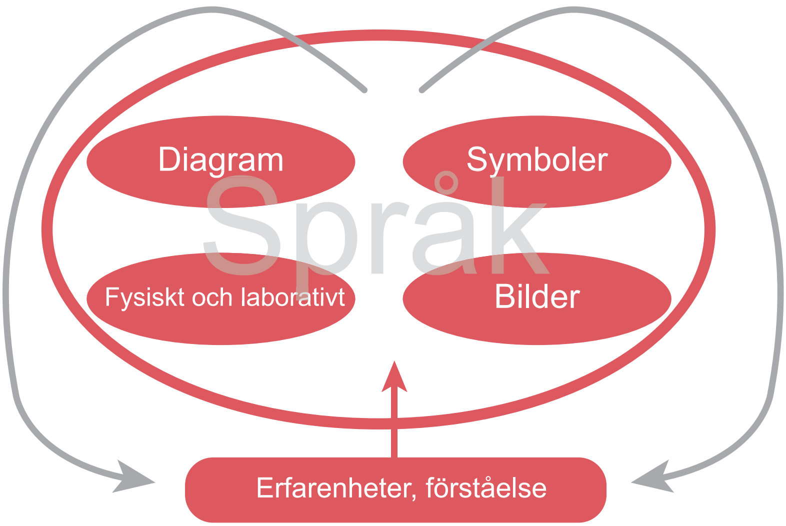
tolkning av addition måste ytterligare omvandling göras, från punkter till talpilar eller annan representation som stödjer en tolkning av tal som förflyttning. Punktrepresentationen fungerar utmärkt för de enskilda talen men inte för att förklara summan.

Figur 2 till vänster visar först en omvandling från symboler till bild (ikonisk representation), följd av en behandling av bilden och slutligen en omvandling tillbaka, från bilden till symboler. Denna process ger kognitivt stöd för behandling av 2 + 3 till 5, vilket informellt kan kallas att räkna med förståelse. Att kunna hantera flera representationer av samma objekt och kunna omvandla flexibelt mellan dem ger en sammanhangsbunden förståelse som är speciellt användbar vid problemlösning, där det ofta krävs en anpassning av representation för att effektivt kunna lösa ett visst problem (Winsløw 2003; Duval 2006). Referensmodellen i figur 3 fanns med i det material (två sidor) som delades ut och diskuterades med lärarna vid första träffen i februari 2012 (jämför Sollervall 2009, 2011).

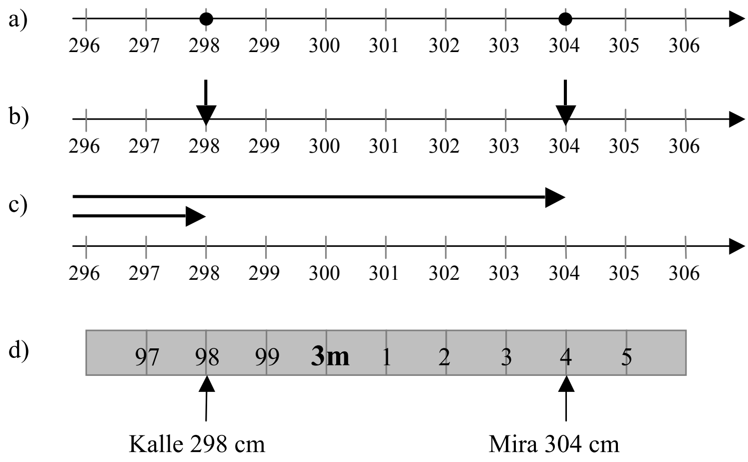
Avsikten med att introducera denna modell var både att synliggöra olika former för representation och att poängtere (det naturliga) språkets diskursiva roll i matematikundervisningen. Avsikten var också att modellen skulle fungera som referens vid fortsatt arbete och speciellt inspirera till systematiskt arbete med olika representationer i undervisningen.

Olika representationer av subtraktion

I skolan kommer addition före subtraktion, trots att idén om subtraktion som borttagning kan tyckas vara mer erfarenhetsnära än addition. Barnet räknar och subtraherar medan det äter godis ("Hur många har jag ätit? Hur många har jag kvar?") men får inte lika ofta extra godisbitar att lägga i godispåsen. Subtraktion används också vid jämförelse, till exempel om barnet vill lista ut hur många godisbitar det skiljer mellan den egna och kompisens godispåse. Då kan de lägga bitarna i två rader bredvid varandra och se hur många bitar det skiljer mellan raderna. Denna fysiska konkreta modell eller ”situation” (Larsson 2011) för subtraktion kan omvandlas till representation med bild och diagram, där tallinjen är en särskilt an-



Figur 3: En schematisk modell för samspelet mellan naturligt språk och representationer



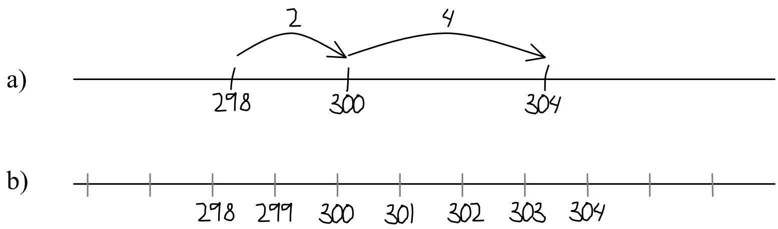
Figur 4: Fyra olika representationer för tolkning av 304 – 298

För att kunna använda en sådan tallinje för att utföra beräkningar måste eleven själv skriva ut tal vid tallinjens markeringar. Utöver att eleven stimuleras att vara aktiv och bestämma var talen ska skrivas, så inbjuder denna tallinje till uppräkning 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, vilket i sin tur kan leda till att eleven upptäcker strategin ”2 upp till 300, sedan 4 till, alltså 6”, som kan representeras med symboler 304 – 298 = 2 + 4 = 6. Varje sådan omvandling mellan representationer ställer högre kognitiva krav på eleven än behandling inom en och samma representationsform (Duval 2006). En subtraktion kan även representeras med naturligt språk, till exempel med en räkneberättelse där eleverna aktiverar mentala representationer. En sådan berättelse behöver inte relatera till något som eleverna faktiskt har upplevt, det räcker att berättelsen kan byggas upp i arbetsminnets episodiska buffert utifrån fragment av erfarenheter (Baddeley 2007).

vändbar variant. Men det finns väl kända svårigheter (räkna punkter eller räkna mellanrum?) med att använda tallinjen vid subtraktion, särskilt om termerna representeras som punkter (figur 4a, 4b). Här kan en omvandling till talpilar (figur 4c) eller till måttband (figur 4d) stödja en korrekt tolkning av subtraktion som avstånd.

Ytterligare stöd för representation är den ograderade ”tomma” tallinjen. Den finns i flera varianter, där en linje helt utan markeringar är vanligt förekommande (Klein, Besihuizen och Treffers 1998; McIntosh 2008). Eleven får då själv markera talen ungefärligt på tallinjen (figur 5a). Både inom matematikdidaktiken (McIntosh 2008) och inom den psykologiska forskningen om elevers (logaritmiska och linjära) taluppfattning (Booth och Siegler 2006) används också tomma tallinjer där ändpunkterna är markerade med tal. I denna studie, som fokuserar uppräkningsstrategin för subtraktion mer än taluppfattning, har vi i stället valt att använda oss av tomma tallinjer med markeringar men helt utan tal (figur 5b).

Medan subtraktionen 304 – 298 lämpar sig bäst för beräkning med utfyllnad, så utförs subtraktionen 435 – 121 enklast med borttagning genom att subtrahera varje talsort för sig, det vill säga 400 – 100 = 300, 30 – 20 = 10, 5 – 1 = 4, vilket leder till svaret 314. Det går i och för sig att fylla ut från 121 till 435 men beräkningarna blir komplicerade. Även om det finns elever som föredrar att ha beräkningarna inbäddade i text så föredrar många den rent symboliska representationen 435 – 121 = 300 + 10 + 4 = 314.



Figur 5: Två varianter av tom tallinje, där eleven själv skriver ut talen

Ett vanligt fel är att använda denna (ofta dominanta) borttagningsstrategi även för subtraktioner som 304 – 298, där resonemanget att 300 – 200 = 100, ”0 minus 9 går inte, därför tar jag 9 minus 0 i stället, samma med 4 – 8 går inte, då tar jag 8 – 4 = 4 i stället” leder till den felaktiga slutsatsen att 304 – 298 är lika med 100 + 90 + 4 = 194. Det räcker alltså inte att eleverna lär sig de olika metoderna, de måste också klara av att bedöma vilken metod som de ska använda sig av. För att inte ytterligare komplicera lärandesituationen för eleverna i den aktuella studien, valde lärarna att undvika uppgifter där ingen av de båda metoderna passar väl, till exempel 421 – 135 (som vanligen utförs med lån). Fokus var alltså på strategierna utfyllnad och borttagning i subtraktioner där termerna ligger ”nära” varandra respektive där man kan räkna ”störst först”. Just dessa uttryck ”nära” och ”störst först” användes av lärarna för att träna eleverna i att känna igen olika typer av subtraktioner.

Lärandeobjektet, med fokus på utfyllnadsmetoden för subtraktion, valdes av lärarna framför allt med tanke på att många elever har svårt för att utföra strategin och för att avgöra när den kan användas för att förenkla beräkningar.

Självreglerat lärande och självreglerande processer

Viktiga aspekter av matematisk problemlösning är att

- bedöma vilka strategier som, i kombination med olika representationer, kan användas för att utföra en viss beräkning
- välja och implementera en vald strategi med en viss representation
- övervaka det egna utförandet av beräkningen
- kontrollera delberäkningar, reagera om delresultat verkar orimliga
- reflektera över svarets rimlighet i relation till den ursprungliga problemformuleringen.

Att dessa aspekter är betydelsefulla framgår tydligt i de svenska kursplanerna för grundskolans matematik, där det uttrycks att eleven ska ges förutsättningar att ”… värdera valda strategier och metoder … välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar … föra och följa matematiska resonemang … använda matematikens uttrycksformer …” (Skolverket 2011b).

Dessa aspekter av problemlösning ligger också tydligt i linje med de fyra faserna av självreglerat lärande (”self-regulated learning”): fore-thought, planning and activation; monitoring; control; reaction and reflection (Schunk 2005). Den första fasen med planering och aktivering av strategi ställer krav på kognitiv förmåga, medan övervakning och kontroll relaterar till elevens motivation respektive beteende. Att reagera och reflektera kräver att eleven kan kontextualisera sina processer och resultat både i relation till närmast föregående resultat och till det övergripande problemet.

Att värdera och välja mellan olika strategier och sätt att representera dessa strategier hör till den kognitiva fasen planering och aktivering. Eleven förväntas här kunna göra bedömningen att subtraktionen 304 – 298 bör beräknas med utfyllnad, medan 435 – 121 bör beräknas genom att talsorterna subtraheras var för sig. Sådana bedömningar görs ofta med stöd av mentala representationer, till exempel en mental tallinje. När eleven har valt strategi och representation ska beräkningen genomföras, vilket kräver övervakning (motivation) för att hålla igång processen och kontroll (beteende) av att den genomförs på ett acceptabelt sätt. När eleven har kommit fram till ett svar återstår en reflekterande bedömning av dess rimlighet i förhållande till problemformuleringen. Exempelvis ska eleven i detta skede kunna komma fram till att 304 – 298 inte kan vara lika med 194. Reflektion kan tillämpas även under genomförandet av processen, som tillfälligt avstannar då eleven undersöker tidigare utförda beräkningar. Om dessa bedöms vara felaktigt utförda och inte kan korrigeras, kan processen helt avstanna eller återkallas och återgå till planeringsstadiet. Elever som använder sig av systematisk reflektion under beräkningsprocessen kan känna mindre behov av att genomföra en avslutande reflektion.

Medan framför allt kontroll men också reflektion kan färdighetstränas, så kräver planering och aktivering ett kognitivt engagemang som förutsätter att eleven deltar aktivt i undervisningen. Att i matematikundervisningen arbeta med variation av och omvandling mellan representationer är både kognitivt krävande och nödvändigt för att eleven ska kunna lösa matematiska problem som kräver anpassning av metod (Duval 2006). Detta är huvudorsaken till att denna studie lägger så starkt fokus på variation av och omvandling mellan representationer.

Organisation av projektarbetet

Denna studie har genomförts inom ramen för ett utvecklingsarbete, som involverade elever i årskurs 4 och bedrevs som kollegialt lärande med expertstöd (Timperley 2008) i en grupp med tre deltagande lärare och en forskare. Vi redogör nedan för bakgrunden till denna utformning och hur gruppen valde att arbeta med det kollegiala lärandet.

Gruppens arbete organiserades med utgångspunkt i den i Sverige populära modellen learning study (Runesson 2008). Learning study behandlar lärandeobjektet i enlighet med fransk forskningstradition, där inflytandet av didaktisk transposition (Bosch, Chevallard och Gascón 2005) och teorin om didaktiska situationer (Brousseau 1997) är särskilt tydliga. En annan viktig utgångspunkt för learning study är att lärare är delaktiga i den produktion av kunskap som ska ligga till grund för deras arbete. Lärare ska ställa egna frågor och undersöka den egna praktiken. Man arbetar i en cyklisk process med att planera, genomföra, utvärdera och förändra sin egen undervisning med fokus på ett väldefinierat matematiskt lärandeobjekt (Runesson 2008). Denna ansats är helt i linje med flera andra internationellt etablerade modeller som design-based research (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer och Schauble 2003) och co-design (Penuel, Roschelle och Shechtman 2007). Dessa ansatser har som gemensam ambition att närma och utveckla utbildningsvetenskaplig teori och praktik genom att lärare lär utifrån att de förändrar sin praktik och analyserar hur deras elever lär i denna praktik (Stigler och Hiebert 1999; Clarke och Hollingsworth 2002).

Naturligtvis kan befintlig vetenskaplig kunskap användas som stöd i det kollegiala arbetet. Det är emellertid inte rimligt att lärare ska behöva ta ansvar för att identifiera och integrera denna vetenskapliga kunskap i det kollegiala arbetet och därför rekommenderas att extern expertis involveras i arbetet (Timperley 2008), något som inte alltid är fallet i en learning study (Runesson 2008). Vidare brukar learning study bedrivas med fokus på begreppsbildning och variation av begreppsattribut med utgångspunkt i variationsteori (Marton och Booth 2000). Eftersom vår studie inte handlade om begreppsbildning utan om matematisk problemlösning, föll det sig mer naturligt att i stället rikta fokus mot variation av representationer. Vidare kom projektdeltagarna tidigt överens om att också vara öppna för att variera arbetsformer, speciellt olika sätt att organisera undervisning i helklass och i mindre grupper. Vår ansats kan sägas vara inspirerad av learning study, design-based research och co-design, tre modeller som alla poängterar lärarnas centrala roll i forskningsprocessen, ett av lärarna definierat lärandeobjekt samt noggrann planering, systematisk utvärdering och förnyelse av undervisningen.

Innan forskaren träffade de tre lärarna för första gången i februari 2012 hade de formulerat lärandeobjektet ”huvudräkningsstrategier i subtraktion vid tiotals- och hundratalsövergångar”, som vid mötet förtydligades till strategierna utfyllnad och borttagning (utan lån). Detta första möte användes också för att stämma av förväntningar och tankar om olika sätt att arbeta. En del tid ägnades också åt att diskutera matematiska representationer (jämför figur 3) och olika sätt att variera undervisningen. Lärarna tog gemensamt fram ett för-förtest med 17 traditionella matematikuppgifter som efter avstämning med forskaren provades ut under våren 2012 på elever som inte skulle delta i det fortsatta projektet. Forskarens fortsatta deltagande begränsades av projektets tillgängliga resurser till ytterligare en träff under våren 2012 och tre träffar under hösten 2012. Samtliga dessa träffar ägde rum på den aktuella skolan. Mellan dessa träffar arbetade lärarna på egen hand med att planera, genomföra och utvärdera undervisning.

Den studie som redovisas nedan genomfördes under hösten 2012 med två klasser i årskurs 4. Dessa klasser hade vardera 17 elever. En elev (B6 i bilaga 2, sid 42) deltog inte i någon del av studien, som alltså omfattade 33 elever. Efter ett inledande förtest resonerade arbetsgruppen om hur kommande undervisning kunde organiseras, med fokus på omvandling av representationer. Under hösten varvades sedan tester, träffar och undervisning. Totalt genomfördes tre undervisningspass, alla inriktade mot ett och samma lärandeobjekt.

Analysmetoder

Elevernas testresultat dokumenterades under projektets gång i tabellform (se bilaga 2) och resultatens utveckling har sedan redovisats i flera olika linjediagram (se diagram 1, 2 och 3, sid 37, 38, 39). Varje heldragen linje mellan två resultat i linjediagrammet representerar en elev som har gjort båda testen, medan en (horisontell) streckad linje står för en elev som missat något av dessa test. Olika elevgrupper har urskiljts och karaktäriserats utifrån resultaten. Eftersom hela studien omfattade endast 33 elever har det inte genomförts någon kvantitativ analys utöver beräkningar av resultatförändringar och medianer av dessa. Vi har i stället gjort bedömningen att diagrammen med önskvärd tydlighet ger stöd för de analyser och slutsatser vi för fram i denna artikel. Vi vill dock nämna att det finns anledning att tolka utfallet av i synnerhet eftertest 3 med viss försiktighet. Medan eftertest 1 och eftertest 2 genomfördes några dagar efter respektive undervisningspass, genomfördes eftertest 3 samma dag som undervisningen ägde rum.

Resultat och analys

Elevernas testresultat finns redovisade i bilaga 2. Samtliga närvarande elever deltog i de två första undervisningspassen. Efter dessa två pass konstaterades att hela 13 av de 33 eleverna fortfarande inte hade uppnått tillfredsställande resultat, där tillfredsställande definierades som minst 12 poäng på något av de två inledande eftertesten. Dessa 13 hade från 2 till 8 poäng av 17 möjliga. Projektgruppen diskuterade problematiken och kom fram till att dessa elever kanske var alltför passiva i helklassundervisningen, att de inte tog plats utan överlät åt dem som verkade kunna mer att styra vad som hände i klassrummet. Detta trots att stor del av undervisningen genomfördes i mindre grupper, vilka gemensamt löste problem som gick ut på att omvandla mellan representationer, medan läraren gick runt mellan grupperna och svarade på frågor. Projektgruppen beslutade därför att genomföra strukturerad lärarledd undervisning, med 14 elever uppdelade i fyra grupper (3, 3, 4, 4 elever) och där läraren träffade en grupp i taget för att då kunna leda och strukturera gruppens arbete. Denna undervisning genomfördes 2 x 30 minuter per grupp, fördelat på 30 minuter vardera under två på varandra följande dagar. Utöver de 13 eleverna med svaga testresultat deltog ytterligare en elev (B12 i bilaga 2), som inte hade behövt vara med på grund av tidigare goda testresultat men som ändå deltog. Anmärkningsvärt är att testresultaten för 9 av dessa 13 elever ökade från 2–8 poäng till 12–17 poäng. Denna ökning ska dock tolkas i relation till att eftertestet genomfördes på eftermiddagen medan undervisningen genomfördes på förmiddagen samma dag. Å andra sidan berörde undervisningen inte uppgifter av den typ (räkning med symboler) som fanns på eftertestet utan inriktades på omvandlingar mellan olika representationer, dock med fokus riktat mot de två aktuella räknestrategierna. Strategierna var alltså desamma, men de representerades på ett sätt i testet och flera andra sätt i undervisningen.

Resultaten från samtliga tester redovisas i diagram 1. Den lägsta nivån motsvarar 0 poäng, nästa nivå 1 poäng och så vidare upp till den högsta nivån, maximala 17 poäng.

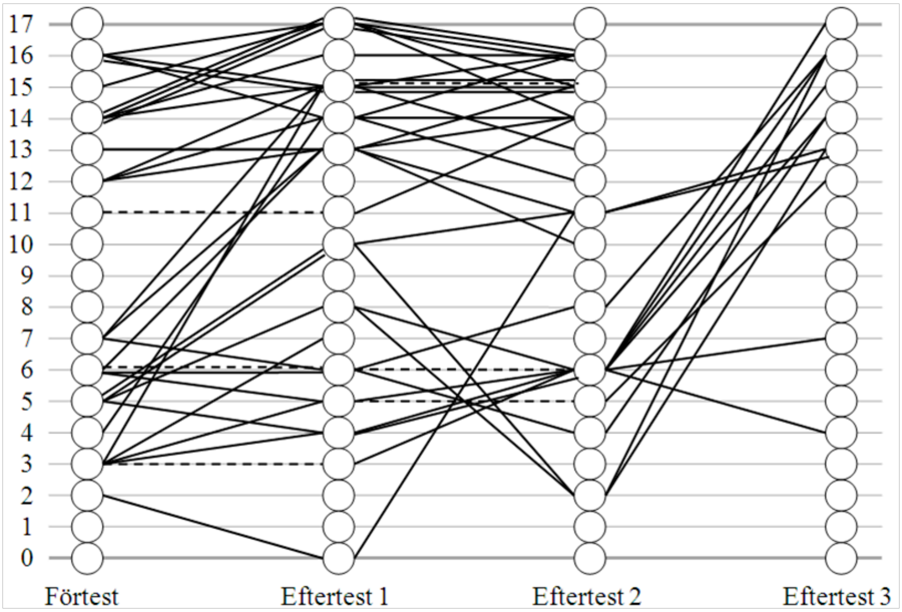


Diagram 1: Samtliga testresultat. (Streckad linje indikerar icke deltagande)

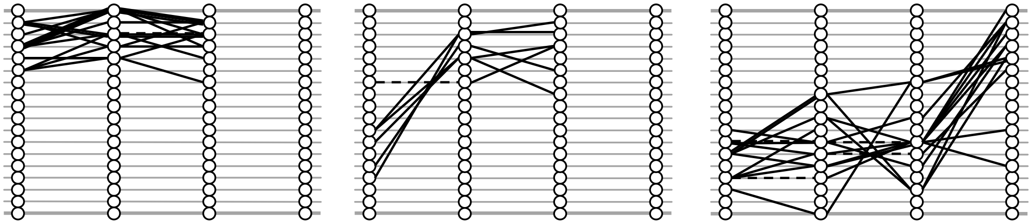


Diagram 2: Testresultat för tre delgrupper av elever, definierade utifrån testresultat

Till att börja med kan noteras att resultaten endast förbättras en aning från förtest till eftertest 1. Resultatsförbättringsmedianen är 2 poäng. Mellan eftertest 1 och eftertest 2 är medianen 0 poäng. Den stora förbättringen kommer mellan eftertest 2 och eftertest 3 där medianen är hela 8 poäng.

Utifrån kriteriet att 12 poäng på något av de två första eftertesten anses vara godkänt resultat, kan vi urskilja tre grupper av elever: De 14 elever som uppnådde godkänt resultat redan på förtestet, ytterligare 6 elever som uppnådde godkänt resultat efter första undervisningspasset samt återstående 13 elever som inte var godkända efter det andra undervisningspasset. Vi redovisar dessa tre grupper var för sig, i diagram 2.

Vi ser i diagram 2 (till vänster) att de 14 elever som blev godkända redan på förtestet, förbättrade sina resultat en aning till första eftertestet men tappade något på det andra eftertestet. De hade möjligen inte behövt någon undervisning över huvud taget på detta moment. Motsvarande, så hade de 6 elever (diagram 2, i mitten) som lärde sig tillräckligt på första undervisningspasset inte heller behövt något andra pass. De återstående 13 eleverna (diagram 2, till höger) uppvisar svagt förbättrade resultat efter de två första undervisningspassen, men det stora lyftet för dem kom efter det tredje passet där de uppvisade markant förbättrade resultat. I efterhand framstår det som om det andra undervisningspasset inte tillförde särskilt mycket för någon av de tre grupperna, medan det första passet medförde en markant förbättring för 5 elever (den sjätte eleven var frånvarande första passet men blev godkänd under andra passet) och det tredje passet lyfte 11 av 13 elever från icke godkänt till godkänt resultat med en förbättringsmedian på hela 8 poäng. Sammantaget uppnådde 31 av 33 elever godkänt resultat efter de tre undervisningspassen. Förbättringarna inträffade till någon del under det första passet men framför allt under det tredje passet (se diagram 3).

Kommentarer om svaga testresultat

Vi vill speciellt diskutera en av de elever (A13 i bilaga 2) som inte uppnådde godkänt resultat efter det tredje passet. Resultatserien 3/-/6/4 ger intryck av att eleven inte lärde sig något alls under projektets gång, inte ens under strukturerad undervisning i liten grupp, vilket ligger mycket nära sanningen. Efter det sista eftertestet frågade läraren hur eleven räknade uppgifterna och fick till svar ”störst först” (vilket för eleven innebar att 304 – 298 förvandlades till 194). Eleven kommenterade dock att han visste att detta var fel, men att han ändå valde den metoden för att han kunde den. Han prioriterade därmed den tillfredsställelse han fick av att kunna genomföra sin egen räknestrategi på ett (för honom) korrekt sätt, trots att strategin

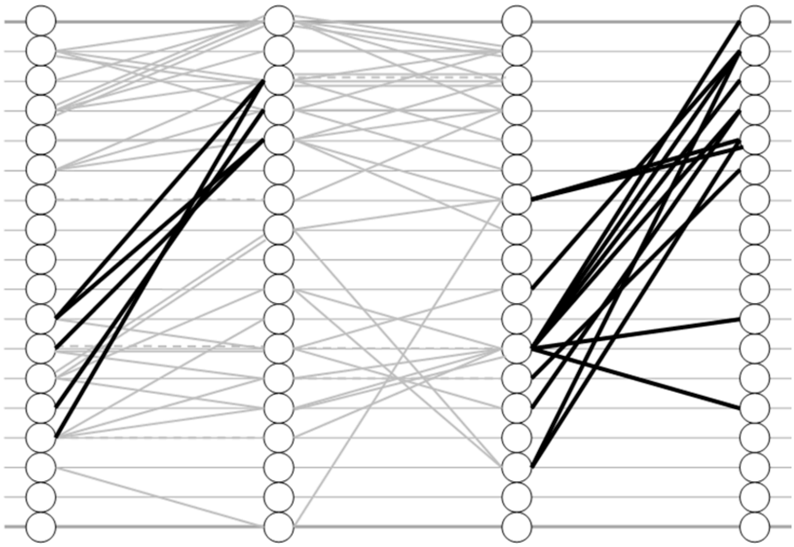


Diagram 3: Förbättrade resultat för två grupper av elever

endast fungerade för ett fåtal uppgifter. I termer av självreglering har han alltså prioriterat övervakning och kontroll av delprocesser framför planering och aktivering av en fungerande strategi. I detta fall hjälps eleven troligtvis inte av mer matematikundervisning, utan behöver bli övertygad om att våga utmana sig själv och att våga misslyckas ibland för att kunna ta till sig undervisning senare.

Den märkliga resultatserien 2/0/11/13 för elev B8 (som vid sista eftertestet uppnådde godkänt resultat) kan möjligen förklaras av bristande motivation vid de inledande testen, vilket i så fall kan hänföras till att eleven inledningsvis inte klarade av att hantera den övervakande fasen av självregleringen.

Dessa två fall indikerar att de svaga prestationerna kan bero mer på motivation för och attityd till matematikundervisningen än på bristande förståelse för matematiska förhållanden. Här krävs i så fall andra insatser än mer matematikundervisning för att få eleverna att engagera sig i matematisk problemlösning på ett konstruktivt sätt.

Resultatdiskussion

Medan elevernas resultatutveckling kan beskrivas kvantitativt med stöd av deras testresultat, blir våra försök till kvalitativa förklaringar av denna resultatutveckling mer spekulativa. Denna osäkerhet förstärks av studiens iterativa ansats, där planering, genomförande och utvärdering upprepas i flera omgångar och där tidigare utfall påverkar kommande undervisningsansatser och den fortsatta studiens inriktning. Den iterativa ansatsen och en öppenhet för att flexibelt använda och kombinera olika teorier och metoder har dock gett möjlighet att få nya och oväntade insikter i en väl känd problematik, nämligen hur vi kan lära elever att välja och använda den strategi som mest effektivt hanterar en viss beräkning. Med en alltför stram forskningsdesign hade vi troligtvis inte kunnat identifiera dessa i vårt tycke intressanta förhållanden.

Efter två undervisningspass i helklass fanns fortfarande en stor grupp elever (13 av 33) som inte hade nått upp till 12 poäng (av 17 möjliga) på de två första eftertesten. Vår grundansats – helklassundervisning med fokus på omvandling mellan representationer – var alltså inte tillräcklig för att nå tillfredsställande testresultat. Det stora lyftet i prestationer kom i stället vid strukturerad lärarledd undervisning i mindre elevgrupper om 3–4 elever, genomförd 2 x 30 minuter under två dagar, alltså 30 minuter per grupp och dag.

Läraren såg till att samtliga elever blev delaktiga i den lilla gruppens arbete. Ingen elev kunde därmed överlåta gruppens arbete vare sig till läraren eller till de övriga eleverna i gruppen. Denna intervention kan ses som ett försök att bryta en social ordning där vissa elever har vant sig vid att låta andra dominera och själva intar en passiv roll i helklassundervisningen. När de själva tvingas vara aktiva, uppnår 11 av de 13 eleverna markant bättre resultat på eftertestet. Som tidigare nämnts så genomfördes detta test av praktiska skäl samma dag som undervisningen ägde rum.

En naturlig fråga är om dessa insatser gett några långtidseffekter. Vi har inte genomfört ytterligare skriftliga tester, men en av lärarna har muntligt diskuterat denna typ av uppgifter med några av de svagpresterande eleverna. Detta skedde våren 2013, sex månader efter sista eftertestet. Eleverna föreföll osäkra, men en elev lyckades ge korrekt svar till någon uppgift. Det räckte dock för läraren att säga ”minns ni den tomma tallinjen?” för att flertalet elever skulle kunna ge korrekta svar till de uppgifter läraren formulerade. Eleverna kunde hantera räknestrategierna när de blev stimulerade att använda dem, men klarade inte själva av att aktivera strategierna efter så lång tid som sex månader. Å andra sidan, så har de vid ett specifikt tillfälle (sista eftertestet) visat att de klarar av att hantera dessa strategier på egen hand.

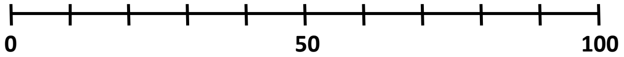
Slutsatser

Det förefaller som om den öppna ansatsen med ett flexibelt bricolage av teorier och metoder, som anpassas till elevernas testresultat, är ett bra sätt att möta komplexiteten i deras lärande och beteende. På längre sikt hade det varit intressant att särskilt arbeta med att utveckla den första självreglerande fasen, som berör de kognitiva funktionerna planering och aktivering. Vår studie indikerar att flera elevers svaga prestationer beror på svårigheter att hantera just denna fas av självreglering. Det positiva utfallet av den strukturerade lärarledda undervisningen i mindre grupper antyder vikten av att samtliga elever blir delaktiga i strukturerad matematisk kommunikation och därigenom deltar aktivt i planering och aktivering av matematiska processer. Matematikundervisningen måste enligt vår mening organiseras så att varje elev tar eget ansvar särskilt för planering och aktivering av strategier för problemlösning. Även enkla räkneuppgifter kan formuleras och struktureras så att de bjuder in till problemlösning. I stället för att ensidigt lösa rutinuppgifter enligt en viss procedur, kan det ibland vara mer gynnsamt att arbeta med uppgifter som kräver att man tänker igenom vilken strategi som ska användas. Det kan till exempel vara tillräckligt att, som i vår studie, kontrastera strategierna ”störst först” och ”nära” för att aktivera elevernas matematiska tankeprocesser.

Komplexiteten i elevers lärande kräver forskning med olika ansatser. Learning study är en värdefull ansats som bland annat bidrar till förståelse av transponeringen från undervisningsobjekt till lärandeobjekt. Samtidigt finns det många andra faktorer som lärare måste ta hänsyn till vid planering och genomförande av matematikundervisning. Specifika matematikdidaktiska teorier måste kombineras med generella teorier, särskilt från psykologi, pedagogik och sociologi, inte bara i lärares dagliga arbete utan också i den utbildningsvetenskapliga forskningen. Det ligger enligt vår mening ett stort värde i att lärare arbetar tillsammans med forskare och då inte enbart med enstaka förbestämda teorier, utan också engagerar sig i att värdera, integrera och tillämpa ett bricolage av olika teorier och metoder i relation till de behov som finns i den egna verksamheten.

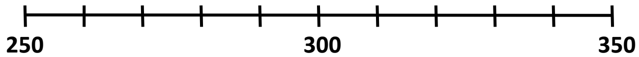
Bilaga 1: Identiska förtest och eftertest

1. Sätt ut talen **78** och **82** på tallinjen.



2. 82 – 78 = ____

3. Sätt ut talen **298** och **304** på tallinjen.



4. 304 – 298 = ____
5. 50 – 47 = ____
6. 500 – 497 = ____
7. 502 – 497 = ____
8. 703 – 696 = ____
9. 804 – 798 = ____
10. 69 – 43 = ____
11. 435 – 121 = ____
12. 106 – 99 = ____
13. 35 – 17 = ____
14. 597 – 402 = ____
15. 603 – 598 = ____
16. 63 – 59 = ____
17. 48 – 14 = ____

Bilaga 2: Resultat från förtest och eftertest

	Förtest 1	Eftertest 1	Eftertest 2	Eftertest 3
A1	16	17	16	
A2	-	11	14	
A3	3	5	-	12
A4	12	14	14	
A5	5	10	11	13
A6	8	14	15	
A7	6	5	6	17
A8	7	14	11	
A9	3	8	6	14
A10	13	13	15	
A11	8	16	16	
A12	5	10	2	16
A13	3	-	6	4
A14	5	16	17	
A15	14	15	13	
A16	14	17	16	
A17	14	16	16	
B1	6	15	13	
B2	14	17	15	
B3	5	8	2	13
B4	12	13	11	
B5	6	6	4	14
B6	-	-	-	
B7	14	17	14	
B8	2	0	11	13
B9	15	17	16	
B10	16	14	16	
B11	16	15	15	
B12	12	15	-	17
B13	7	6	8	16
B14	-	-	6	7
B15	3	4	6	15
B16	16	15	15	
B17	5	4	6	16

Litteratur

- Baddeley, A. (2007): *Working memory, thought, and action*. Oxford University Press.
- Booth, J.L. & Siegler, R.S. (2006): ”Developmental and individual differences in pure numerical estimation”. I *Developmental Psychology*, 42, s. 189–201.
- Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascón, J. (2005): ”Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics”. I Bosch, M. (red.): *Proceedings of the 4th Conference of European Research in Mathematics Education*. CERME.
- Brousseau, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Carlgren, I. (2012): ”Vilken forskning behöver skolan? – Forskning om eller i skolan?” I *Skola och samhälle.* http://www.skolaochsamhalle.se/flode/skola/ingrid-carlgren-vilken-forskning-behover-skolan-forskning-om-eller-i-skolan/
- Clarke, D. & Hollingsworth, H. (2002): ”Elaborating a model of teacher professional growth”. I *Teaching and Teacher Education,* 18, s. 947–967.
- *Cobb, P.; Confrey, J.; diSessa, A.; Lehrer, R. & Schauble, L. (2003): ”Design experiments in educational research”. I Educational Researcher, 32(1), s. 9–13.*
- Cobb, P. (2007): ”Putting philosophy to work: Coping with multiple perspectives”. I Lester, F.K. (red.): *Second International Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning*, Vol. 1. Information Age.
- Davis, B. (2010): ”Concept studies: Designing settings for teachers’ disciplinary knowledge”. I Pinto, M.M.F. & Kawasaki, T.F. (red.): *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1, s. 63–78. IGPME.
- Duval, R. (2006): ”A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics”. I *Educational Studies in Mathematics*, 61, s. 103–131.
- Gellert, U. (2010): ”Modalities of a local integration of theories in mathematics education”. I Sriraman, B. & English, L. (red.): *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers.* Springer.
- Kincheloe, J. (2001): ”Describing the bricolage: Conceptualizing a new rigor in qualitative research”. I *Qualitative Inquiry*, 7(6), s. 679–692.
- Klein, A.S.; Beishuizen, M. & Treffers, A. (1998): ”The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design”. I *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(4), s. 443–464.
- Larsson, K. (2011): *Varför ska man ”göra olika”?: En litteraturstudie om beräknings-strategier för subtraktion.* Department of Education in Mathematics and Science, Stockholm University. Master thesis.
- Marton, F. & Booth, S. (2000): *Om lärande*. Studentlitteratur.
- McIntosh, A. (2008): *Förstå och använda tal – en handbok*. Nationellt Centrum för Matematikutbildning.
- Ogden, C.K. & Richards, I.A. (1923): *The meaning of meaning* (första upplagan 1923, tionde upplagan 1956). Routledge & Kegan.
- *Penuel, W.R.; Roschelle, J. & Shechtman, N. (2007): ”Designing formative assessment software with teachers: An analysis of the co-design process”.* I *Research and Practice in Technology Enhanced Learning,* 2(1), s. 51–74.
- Runesson, U. (2010): ”Lärares kunskapsarbete – exemplet learning study”. I *Vetenskapsrådets rapportserie*, 15, s.7–17.
- Schunk, D. (2005): ”Self-regulated learning: The educational legacy of Paul R. Pintrich”. I *Educational Psychologist,* 40, s. 85–94.
- Skolverket (2011a): *Matematiksatsningen 2011.* http://www.skolverket.se/skolutveckling/larande/matematik/matematiksatsningen/matematiksatsningen-2011

- Skolverket (2011b): *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*.
- Sollervall, H. (2009): ”Further education for in-service teachers with focus on special needs in mathematics”. I Guðjónsdóttir, H.; Kristinsdóttir, J.V. & Óskarsdóttir, E. (red.): *Proceedings of the 5th Nordic Conference on Special Needs Education in Mathematics.* NORSMA.
- Sollervall, H. (2011): ”Modeling external representations as mediators of meaning in the mathematics classroom”. I Pytlak, M.; Rowland, T. & Swoboda, E. (red.): *Proceedings of the 7th Conference of European Research in Mathematics Education.* CERME
- Stigler, J. & Hiebert, J. (1999): *The teaching gap. Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. The Free Press.
- Timperley, H. (2008). ”Teacher professional learning and development”. I *The International Academy of Education: The Educational practices series*, 18, s. 32. Http://www.orientation94.org/uploaded/MakalatPdf/Manchurat/EdPractices_18.pdf
- Winsløw, C. (2003). ”Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering”. I *Educational Studies in Mathematics*, 52, s. 271–288.