

”Det är riktat till mig, det borde gå att lösa”: Elevgenererade ledtrådar som stödstruktur vid självständig problemlösning

OSKAR HAGVALL SVENSSON, SAMUEL MARANDER OCH DANIEL LARSSON

Elevgenererade ledtrådar är en potentiellt användbar stödstruktur vid självständig problemlösning, men det är fortfarande oklart hur elever använder och uppfattar sådana ledtrådar. Genom två interventioner med uppföljande enkät och intervjuer undersökte vi därför användande av elevgenererade ledtrådar i sex gymnasieklasser. Vi fann att eleverna använde ledtrådarna för att 1) starta upp lösningsförsök, 2) hantera svårigheter och motgångar, samt 3) utvärdera lösningsförsök. Utöver ledtrådarnas innehåll var relationen mellan avsändare och mottagare avgörande för hur användbara ledtrådarna upplevdes. Att ledtrådarna var skrivna av jämlikar snarare än lärare eller läroboksförfattare verkade för eleverna kommunicera både att de borde kunna förstå ledtrådarna och att uppgiften de arbetade med var överkomlig för en person på deras ungefärliga kunskapsnivå. Resultatet belyser affektiva och relationella dimensioner av ledtrådar och elevers mottagande av dessa som förbisett i tidigare ledtrådsforskning.

Syftet med artikeln är att undersöka hur gymnasieelever använder och uppfattar användbarheten hos elevgenererade ledtrådar vid självständig problemlösning. Problemlösning avser här elevers arbete med att söka svar på matematiska problem, till exempel i arbete med matematikuppgifter som är öppnare än rutinuppgifter och som kräver tolkning och strategi (Intaros et al., 2014). Problemlösningsförmåga är en uttrycklig målsättning för matematikundervisning på alla skolnivåer i Sverige (Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, 2022; Läroplan för gymnasieskolan, 2011). Arbete med problemlösning utan ordentlig vägledning kan dock leda till både frustration och

Oskar Hagvall Svensson, Göteborgs universitet, Institutionen för didaktik och pedagogisk profession

Samuel Marander, Mölndals stad, Franklins gymnasium

Daniel Larsson, Mölndals stad, Franklins gymnasium

Hagvall Svensson, O., Marander, S. & Larsson, D. (2025). ”Det är riktat till mig, det borde gå att lösa”: Elevgenererade ledtrådar som stödstruktur vid självständig problemlösning. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 30 (3), 75–101.

bristande kunskapsutveckling (Kirschner et al., 2006). Hur lärare bör stötta elever när de arbetar med problemlösning är därför en central frågeställning för matematikdidaktiker (Pfister et al., 2015).

Tidigare studier har visat att förproducerade ledtrådar kan hjälpa elever förstå och lösa matematiska problem (Perrenet & Groen, 1993; Razzaq & Heffernan, 2010). Fördelen med förproducerade ledtrådar i relation till andra typer av stöttning är att elever kan ha tillgång till dessa när läraren inte har möjlighet att ge direkt återkoppling, till exempel när lärartiden inte räcker till i en klassrumssituation, när elever arbetar med läxor mellan undervisningstillfällen, eller när elever studerar matematik inom ramen för webbaserade kurser (Engelbrecht & Harding, 2005; Spitzer & Musslick, 2021). Ledtrådars utformning påverkar dock deras konsekvenser för elevers problemlösning och lärande. Tidigare forskning har till exempel visat att ledtrådar som pekar mot konkreta procedurer är mer effektiva än ledtrådar som varnar för vanliga misstag, och att ledtrådar som avslöjar nästan hela lösningar kan leda till att problem löses utan att ordentlig förståelse har uppnåtts (Perrenet & Groen, 1993).

Innevarande studie adresserar två kunskapsluckor kring ledtrådar i relation till matematisk problemlösning. Den första kunskapsluckan handlar om att tidigare studier främst fokuserat på ledtrådar som formulerats av lärare eller forskare, snarare än elever. I andra ämnen, framför allt i en högskolekontext, har ledtrådar skrivna av studiekamrater lyfts fram som en potentiellt resurseffektiv stödstruktur vid problemlösning (Glassman et al., 2016; Khosravi et al., 2023). Förvisso har elevgenererade ledtrådar visats hålla varierande kvalitet, men kvaliteten har också kunnat förbättras genom strukturerade processer för ledtrådsformulering (Singh et al., 2024). Utöver att kräva relativt liten arbetsinsats för tidspressade lärare kan arbetet med att formulera ledtrådar utgöra en värdefull lärandeaktivitet i sig (Khosravi et al., 2023).

Den andra kunskapsluckan gäller hur elever tar emot, upplever och använder förproducerade ledtrådar. Det finns få beskrivningar av stödsituationen som uppstår när elever tar del av ledtrådar, eftersom fokus i stället legat på att mäta effekter (Perrenet & Groen, 1993; Razzaq & Heffernan, 2010). Att undersöka hur elever uppfattar och använder olika typer av ledtrådar är centralt för att förstå varför dessa ledtrådar får särskilda konsekvenser för elever problemlösning och lärande.

I denna studie undersöker vi därför hur gymnasieelever använder och uppfattar användbarheten hos elevgenererade ledtrådar vid självständig problemlösning. Studien genomfördes genom två interventioner där sex gymnasieklasser fick skriva och ta del av ledtrådar vid problemlösning. Interventionerna följdes upp med enkäter och intervjuer. Studien undersöker följande forskningsfrågor:

1. Hur använder eleverna de elevgenererade ledtrådarna i sitt arbete med problemlösning?
2. Vad fokuserar eleverna på när de bedömer användbarheten hos de elevgenererade ledtrådarna?

Bakgrund

I detta avsnitt presenteras och problematiseras tidigare forskning kring ledtrådar vid problemlösning i större detalj. Först ramas dock studien in med hjälp av litteratur kring stödstrukturer (scaffolding) och elevsamarbete (peer learning).

Scaffolding och peer learning: Stödstrukturer vid matematisk problemlösning

Scaffolding är en benämning på de temporära stödstrukturer som lärare upprättar för att hjälpa elever genomföra uppgifter som de ännu inte kan lösa helt på egen hand, exempelvis i form av vägledning från lärare (Wood et al., 1976). Forskning har visat att erfarna lärare använder en bredd av scaffoldingstrategier, med intentionen att svara mot kognitiva, meta-kognitiva och affektiva behov hos eleverna (Van de Pol et al., 2010). Utöver att ge ledtrådar kan stödstrategier innefatta till exempel att ge återkoppling på elevers prestationer, förevisa lämpliga problemlösningsmetoder och hjälpa studenter hantera frustration (Roehler & Cantlon, 1997; Van de Pol et al., 2010). Oavsett syfte och funktion är en övergripande princip att stödsatser idealt bör skräddarsys efter varje elevs individuella stödbehov, samt att stödet bör fasas ut när eleven inte längre behöver det (Van de Pol et al., 2010).

En typ av stödstruktur som tar ett mindre lärarcentrerat format är peer learning, alltså medvetet planerade tillfällen för elever att lära av och med varandra (Crouch & Mazur, 2001). I praktiken kan peer learning införlivas på varierande sätt och på olika skalor, exempelvis genom att en föreläsning återkommande bryts av med att elever får förklara begrepp för varandra, genom tänka-högt problemlösning i par (Kani & Shahrill, 2015), eller genom inslag där elever coachar varandra eller utvärderar varandras lösningar (Alegre et al., 2019; Jones & Alcock, 2014). En bred litteratur från flera utbildningsvetenskapliga fält har visat att peer learning kan vara kraftfullt för att stödja inläring och att bygga elevers motivation att lära sig (Tenenbaum et al., 2020).

De positiva effekter av peer learning som påvisats i tidigare forskning indikerar att elevgenererade ledtrådar skulle kunna utgöra en användbar stödstruktur vid matematisk problemlösning. Det varierar dock hur intresserade elever i matematik är att lära av och med varandra (Othman et al., 2012). Det finns också indikationer på att elevsamarbete är ovanligt i matematikundervisning och att undervisningen i stället domineras av individuell räkning och ett interaktionsmönster där lärarledd dialog står i centrum (Franke et al., 2007; Kaya et al., 2014). Detta skulle å ena sidan kunna innebära att elever upplever elevgenererade ledtrådar som en välkommen förändring, eller tvärtom som något ovanligt som de är obenäga att ta till sig.

Ledtrådar som stödstruktur vid problemlösning

Ledtrådar vid matematisk problemlösning kan dels ges spontant, dels skapas proaktivt. Forskning på scaffolding i matematikundervisningen visar att spontana ledtrådar är ett vanligt inslag i klassrumsdialog och att lärare både själva ger ledtrådar och ibland bjuder in elever att ge ledtrådar till varandra (Bikmaz et al., 2010; Mahharrini et al., 2020; Pfister et al., 2015; Roehler & Cantlon, 1997). När det gäller förproducerade ledtrådar i matematikundervisning kan exempel på dessa ses i ett mer begränsat antal studier som planerat och genomfört ledtrådsinterventioner (Perrenet & Groen, 1993; Razzaq & Heffernan, 2010). Förutsättningarna för formulering, förmedling och emottagande av ledtrådar skiljer sig markant mellan spontana och förproducerade ledtrådar. Ledtrådar som ges i dialog kan formuleras med hänsyn tagen till en situerad analys av vad eleven behöver hjälp med, eleven kan ställa frågor kring innebörden och läraren kan undersöka om eleven förstått. När det gäller förproducerade ledtrådar måste eleven tolka och försöka använda ledtrådarna mer självständigt, och fokus i forskningen har därför ofta legat på hur ledtrådar bör utformas. Utöver att undersöka vilka konsekvenser ledtrådsinnehållet får har dessa studier visat till exempel att ledtrådar har mer tillförlitligt positiva effekter på elevers lärande om ledtrådarna inte ges proaktivt utan i stället på elevers begäran, när de känner att de behöver hjälp (Razzaq & Heffernan, 2010). Tidigare studier har dock inte i någon större utsträckning undersökt hur elever sen processar, använder och upplever förproducerade ledtrådar.

I ett antal studier, framför allt inom ämnet programmering, har också förproducerade ledtrådar skrivna av medstudenter undersökts i relation till problemlösning. Glassman et al. (2016) visar till exempel att programmeringsledtrådar skrivna av studenter kan upplevas som användbara och kan hjälpa andra studenter förbättra sina lösningar. I en

annan studie fann Singh et al. (2024) indikationer på att högpresterande programmeringsstudenter skapade mer användbara ledtrådar än lågpresterande studenter. Vidare visade studien att studenter som fick utgå ifrån och revidera ett ledtrådsförslag genererat med ChatGPT-4 i regel skapade något mer användbara ledtrådar än studenter som fick skriva ledtrådar utan hjälpmedel. I båda studierna rapporteras dock också att vissa studenter bidrog med svårtolkade ledtrådar eller helt irrelevant text.

Dessa resultat indikerar att matematikelever skulle kunna bli behjälpta av förproducerade ledtrådar av andra elever och uppskatta denna vägledning, även om inte alla ledtrådar de får nödvändigtvis är bra. Det är dock oklart i vilken mån resultaten är överförbara från programmeringsundervisning på högskolenivå till matematikundervisning på gymnasienivå, exempelvis eftersom studiekamrater på högskoleprogram i högre grad delar ett specialintresse och kan tänkas ha mer kompetens inom ämnesområdet.

Metod

För att undersöka hur gymnasieelever använder och uppfattar användbarheten hos elevgenererade ledtrådar vid självständig problemlösning genomförde vi en deltagande interventionsstudie med två interventionsomgångar, inom ramen för två av författarnas matematikundervisning. Fördelar med praktisknära interventionsstudier innefattar en förtrogenhet med undervisningskontexten samt att interventionens komponenter kan skräddarsys för att inte riskera störa eller försämra den pågående undervisningen (Penuel & Fishman, 2012). I vårt fall var dessutom genomförandet av just interventionen en förutsättning för studien, eftersom vi inte var medvetna om någon undervisningskontext där elevgenererade ledtrådar redan användes som stöd vid problemlösning.

Eftersom vi var intresserade av att undersöka på vilka olika sätt eleverna använde och uppfattade ledtrådarna använde vi ett kvalitativt angreppssätt i datainsamling och analys. Fokus i kvalitativa metoder är främst att hitta olika kvalitéer eller dimensioner hos ett fenomen snarare än att mäta frekvenser eller effekter (Bowen, 2006). I vårt fall innebar det att vi fokuserade på att förstå på vilka kvalitativt olika sätt eleverna använde och uppfattade de elevgenererade ledtrådarna, snarare än att främst utreda hur vanliga specifika sätt att använda eller uppfatta ledtrådarna var. Vi bedömde ett sådant utforskande angreppssätt som extra lämpligt i ljuset av bristen på tidigare studier kring användande och uppfattningar om elevgenererade ledtrådar som stödstruktur vid självständig problemlösning.

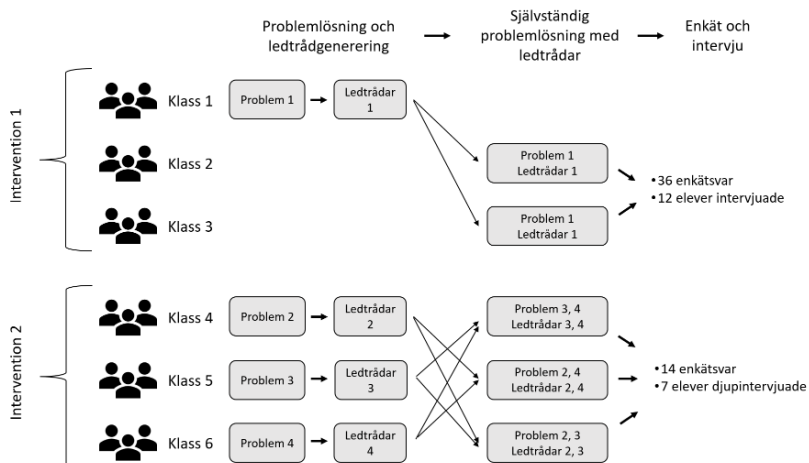
Empirisk kontext, deltagare och samtycke

Studien genomfördes på en liten kommunal gymnasieskola med inriktning mot program inom teknik och naturvetenskap. I en regional jämförelse hade programmen på skolan vid studiens genomförande relativt höga intagningspoäng, med många elever från studievana hem. Studien genomfördes inom ramen för matematikundervisning för tre klasser i årskurs 1 (intervention somgång 1) och tre klasser i årskurs 2 (intervention somgång 2).

I planeringsstadiet gjordes bedömningen att forskningsprojektet inte skulle behöva hantera några känsliga personuppgifter. Med tanke på att de flesta delar av interventionerna genomfördes på ordinarie undervisningstid planerades aktiviteterna så att de skulle bidra till elevernas lärande inom pågående arbetsområden. Eleverna fick dock själva välja om de ville delta i datainsamling genom enkäter och intervjuer. För att eleverna skulle kunna lämna informerat samtycke om deltagande träffade artikelns försteförfattare (som deltog i projektet som huvudsaklig forskare och inte som lärare) alla klasser för att berätta om studiens syfte och upplägg, samt hur data och avidentifiering av denna skulle hanteras. Vid detta tillfälle delades också samtyckesblanketter ut, som sedan samlades in vid ett senare tillfälle. För att eleverna inte skulle känna sig pressade att delta i enkäter och intervjuer hanterades datainsamling, avidentifiering och datalagring av artikelns försteförfattare (innefattande enkätsvar samt ljudinspelningar och avskrifter från intervjuer). På så vis hade elevernas lärare inte direkt tillgång till information om vilka som hade deltagit och vilka åsikter de uttryckt. Enkäterna genomfördes anonymt.

Interventioner och datainsamling

Två liknande interventioner genomfördes, där den andra byggde på lärdomar från den första. Upplägget illustreras i figur 1. I båda interventionerna fick eleverna självständigt lösa avancerade matematikuppgifter med tillgång till ledtrådar skrivna av andra elever i samma årskurs, vilket följdes upp med enkät och intervjuer. Uppgifterna som användes i studien presenteras i Bilaga 1. Uppgifterna hämtades främst från tidigare nationella prov och valdes eftersom de var öppnare än rutinuppgifter och därför krävde olika typer av problemlösningsförmågor. Tre av fyra uppgifter bedömdes enligt bedömningsanvisningarna kunna testa elevers problemlösningsförmåga upp till A-nivå.



Figur 1. En illustration av de två interventionsomgångarna och datainsamling kopplad till dessa

Första interventionen genomfördes med totalt 87 elever fördelade på tre klasser (Klass 1, 2 och 3) som läste matematik 1c på natur- eller teknikprogrammet. I interventionen fick Klass 1 lösa en avancerad matematikuppgift med fokus på sannolikhetslära (Problem 1). Efter arbetet med uppgiften fick eleverna diskutera uppgiften för att sedan individuellt skriva ledtrådar. Vid tillfället genererades 78 ledtrådar, exempel redovisas i Tabell 1. Ledtrådarna kontrollerades av artikelns författare för att säkerställa att de inte innehöll något direkt stötande eller opassande, vilket inte var fallet. Vid ett senare tillfälle fick Klass 2 och 3 lösa samma uppgift men med tillgång till ledtrådarna, som hade skrivits ut och lagts i en slumpvis ordnad hög hos varje elev. Efter arbetet med uppgiften kunde eleverna svara på en enkät ($n=36$). Enkäten innehöll öppna och slutna frågor kring 1) hur de hade upplevt problemlösningen, 2) hur många ledtrådar de tog del av, 3) om och i så fall hur de upplevde att ledtrådarna hade hjälpt dem med sin problemlösning, 4) hur de upplevde att få ledtrådar av andra elever. På efterföljande lektioner genomfördes också korta intervjuer med 12 elever som anmälde sig frivilliga. Intervjuerna var semi-strukturerade med fokus på hur eleverna upplevt problemlösningen och ledtrådarna.

Tabell 1. Exempel på elevgenererade ledtrådar till de olika uppgifterna som användes i studien.

	Intervention 1		Intervention 2	
	<i>Sannolikhet julgranskulor</i>	<i>Derivata sluss</i>	<i>Derivata dagsljus</i>	<i>Derivata funktion</i>
Exempelledtrådar	"Hur många möjliga kombinationer finns det?"	"Luckans höjd är en funktion av tiden. Arealen för vattenflödet är en funktion av luckans höjd. Vattenflödet är en funktion av arean"	"När vi använde oss av cosinus invers så kom vi på att det då fanns två möjliga svar. /Alfons, Anders, Allvar, Ann"	"En sak som är viktigt att inse är att då $h'(x) = 0$ innebär det att den är en rak linje som består av ett x som konstant. /Anki"
	"Rita ett träd-diagram"	"Triangeln slussluckan bildar är likbent. Kan hjälpa med beräkning av area."	"Det hjälper att använda sig av enhetscirkeln för att visualisera svaren."	"Börja med att ta fram ett generellt uttryck för $h'(x)$ genom att använda kedjeregeln ;) LYCKA TILL!!! - piff och puff"
	"ÖVERTÄNK INTE!!!!"	"Proportionalitet betyder en rät linje."	"Sätt in ett värde på M. Förenkla. Finns det mer än en lösning på problemet?"	"Om lutningen är noll, hur ser grafen ut?"

Andra interventionen genomfördes några månader senare med totalt 85 elever fördelade på tre klasser (Klass 4, 5 och 6) som läste kursen matematik 4 på natur- eller teknikprogrammet. För att undersöka användningen av och uppfattningar om elevgenererade ledtrådar i relation till en större bredd av matematikuppgifter användes tre olika uppgifter i andra interventionen. Interventionen påbörjades med ett ledtrådsgenereringstillfälle där de tre klasserna löste en vardera av tre avancerade matematikuppgifter med fokus på funktioner och derivata (Problem 2, 3 och 4) och sedan skrev ledtrådar till uppgifterna. För att uppmuntra eleverna att skriva längre och tydligare ledtrådar erbjöds eleverna exempelledtrådar skapade av artikelns författare när de arbetar med uppgifterna. Eleverna fick först själva försöka lösa uppgiften, sedan diskutera sina lösningar i mindre grupper. Läraren ledde sedan en diskussion och gjorde en genomgång av uppgiften. Eleverna skrev till sist ledtrådar till uppgiften i smågrupper, med valet att antingen skriva dem anonymt eller underteckna med sitt namn. Vid tillfället genererades 44 ledtrådar kopplade till de tre olika uppgifterna. Ledtrådarna kontrollerades för att undvika för mycket repetition och 14 ledtrådar valdes ut för att användas i interventionens nästa steg.

För att bättre komma åt förutsättningarna och kraven som ställs på elever vid självständigt arbete genomfördes det andra steget i andra interventionsomgången utanför klassrumstid några veckor efter ledtrådsskrivandet. De tre uppgifterna (Problem 2, 3 och 4) med tillhörande elevgenererade ledtrådar integrerades i ett övningsprov som delades ut till eleverna inför ett kommande områdesprov. Eleverna förväntades arbeta med övningsprovet på egen hand. Övningsprovet distribuerades digitalt och i provet infogades länkar till webbsidor där eleverna på egen begäran kunde ta del av ledtrådar kopplade till de olika uppgifterna. Ledtrådarna erhöles en i taget, i en slumpad ordning.

Efter att de arbetat med uppgifterna på övningsprovet ombads eleverna svara på en enkät ($n=14$)¹ med hjälp av en länk som också bifogats övningsprovet. Enkäten innehöll öppna och slutna frågor kring 1) under vilka omständigheter de arbetat med uppgifterna och hur de bedömde sitt utfall, 2) hur många ledtrådar de tog del av och när under processen, 3) varför de tog del av ledtrådar, 4) på vilket sätt och i vilken utsträckning ledtrådarna hade hjälpt, 5) hur de upplevde att få ledtrådar av andra elever. Vidare kontaktades de elever som i sin samtyckesblankett indikerat att de ville delta i en intervju med en intervjufrågan, med villkoret att de faktiskt hade arbetat med uppgifterna. Sju elever accepterade och djupintervjuades på skoltid men utanför lektionstid. Intervjuerna var semi-strukturerade med frågor fokuserade på att gå djupare kring liknande frågor som undersökts i enkäten. Dessutom undersöktes specifika tillfällen då eleverna tittat på ledtrådar, vad det var som föranledde detta, huruvida ledtrådarna de tog del av hjälpte och på vilket sätt, samt vad som hände sen. I slutet av intervjun presenterades också återkommande erfarenheter som andra elever rapporterat i tidigare enkäter och intervjuer, vilka eleverna ombads reflektera över.

Analysarbete

Materialet analyserades genom öppen kodning och induktiv tematisk analys (se Braun & Clarke, 2006, för en generell beskrivning av analysmetoden), med fokus på att identifiera olika sätt att använda ledtrådarna samt vilka aspekter eleverna fokuserade på när de utvärderade ledtrådarnas användbarhet. Analysarbetet påbörjades efter första interventionsomgången genom analysmöten i författargruppen med utgångspunkt i materialet som hade samlats in ditintills. Analysarbetet slutfördes sedan främst av försteförfattaren i dialog med de andra projektdeltagarna efter datainsamling i andra interventionsomgången.

Först identifierades från båda interventionsomgångarna allt material från enkäter ($n = 50$) och intervjuer ($n = 19$) som innehöll 1) beskrivningar av hur eleverna använde ledtrådarna eller 2) utsagor om ledtrådarnas användbarhet. Materialet delades i detta stadie upp i dessa två delmängder, där vissa citat som talade till både användning och upplevd användbarhet kodades att tillhöra båda delmängderna. För att identifiera preliminära teman granskades sedan utdragen var för sig för att analysera vilken eller vilka typer av användande eller uppfattning om användbarhet de verkade beskriva. Utdragen och de preliminära temana jämfördes sedan sida vid sida för att testa vilka formuleringar och vilken struktur av teman som mest rättvisande och med minst överlapp fångade komplexiteten i det insamlade materialet. Genom detta arbete identifierades tre typer av användande (starta upp lösningsförsök, hantera svårigheter och motgångar, samt utvärdera lösningsförsök) och två typer av bedömningar av användbarhet (innehållets relevans och avsändarens relevans).

Resultat

Resultaten presenteras i två avsnitt, med fokus på 1) hur eleverna använde de elevgenererade ledtrådarna, och 2) hur eleverna uppfattade användbarheten i ledtrådarna.

Hur använder elever elevgenererade ledtrådar?

Eleverna gav uttryck för tre primära sätt att använda ledtrådarna, fokuserade på 1) att starta upp lösningsförsök, 2) hantera svårigheter och motgångar, och 3) utvärdera lösningsförsök. I figur 2 illustreras detta som användande av ledtrådar i relation till tre faser i elevernas problemlösning. Det varierade mellan elever och mellan uppgifter i vilka faser de använde ledtrådarna. Problemlösningsprocessen illustreras som iterativ eftersom eleverna beskrev hur de ibland behövde göra flera olika



Figur 2. Tre sätt att använda de elevgenererade ledtrådarna, i olika faser av elevernas problemlösningsprocess

försök för att lösa samma problem. Eleverna gick alltså ibland vidare från att utvärdera sina lösningsförsök till att starta upp nya försök om de fått indikationer i ledtrådarna att de inte löst problemet helt korrekt.

Starta upp lösningsförsök

Flera elever uttryckte att de hade använt ledtrådarna för att överhuvudtaget "komma igång" med sitt arbete med avancerade uppgifter. För vissa var det inte alls en självklarhet att börja försöka, dels på grund av bristande motivation och dels på grund av en bristande tro på att de kunde lösa svåra uppgifter. Axel², till exempel, uttryckte att de elevgenererade ledtrådarna var extra effektfulla vid just självständiga studier hemma, för att sänka tröskeln till att komma igång:

När man sitter i skolan då får man ett annat fokus. När man sitter hemma så lallar man igenom det mer, i skolan måste man göra det. Hemma blir det mer "ja, det här ska jag nog göra idag". [...] Får man lite ledtrådar är det lättare att komma igång och faktiskt göra det, då kan man känna sig mer motiverad. (Axel, intervju)

Vidare menade eleverna att de elevgenererade ledtrådarna hjälpte dem med att både tolka uppgiften och identifiera relevanta procedurer. Alessandro beskrev exempelvis hur en av ledtrådarna fick honom att komma på att han behövde ställa upp och derivera ett uttryck för att lösa uppgiften:

Det tipset som hjälpte mig mest var det om att luckans höjd är en funktion av tiden, arean för vattenflödet är en funktion av luckans höjd, vattenflödet är en funktion av arean. För vi har ju gått genom det här med dv/dt och sånt och jag var fräsch inom det, det hjälpte mig att tänka på det sättet som jag kunde något om. (Alessandro, intervju)

Hantera svårigheter och motgångar

På direkta enkätfrågor om varför eleverna valde att använda sig av ledtrådarna och vad de använde dem till, var det vanligaste skälet att eleverna någon gång under sitt arbete med uppgifterna "fastnade" och behövde hjälp med att komma vidare. Alessandro beskrev till exempel följande situation, som illustrerar att ledtrådarna här kunde användas för att se uppgiften på nya sätt och få syn på ytterligare information som kan ha förbisetts:

Jag fastnade på båda uppgifterna. Jag provade ledtrådarna, de gav mig information. Det var inga direkta svar, och det tyckte jag var

bra. Men det gav mig nya tankar och påminde mig om information som jag missat. Till exempel en hastighet som jag behövde. (Alessandro intervju)

För elever som fastnat verkade dock de elevgenererade ledtrådarna fylla ytterligare viktiga funktioner när det gällde att bibehålla en känsla av att uppgiften är genomförbar och att inte "ge upp" och "gå vidare". Astrid, till exempel, uttryckte att till och med i de fall ledtrådarna inte gav precis rätt information hon behövde för att komma vidare så ingav de ändå en känsla av att uppgiften borde gå att lösa eftersom andra elever har lyckats lösa dem:

Jag tyckte ändå de [ledtrådarna] hjälpte, i att jag inte gav upp. Att jag fortsatte. Det var som en slags motivation. Även om de inte hjälpte så tänkte jag att "det går ändå att lösa". [...] Det gjorde att jag kände, "jag ger inte upp, jag fortsätter". (Astrid, intervju)

En dynamik som enligt eleverna annars bidrog till att de tenderade att ge upp och gå vidare var att de kämpade med tilltron till den egna förmågan och känslan av att vara ensamma med sina svårigheter. Alma, till exempel, uttryckte att ledtrådarna kunde motverka negativa känslor av hopplöshet som matematikundervisningen kan inbegripa:

Ibland så känns det ju som att "gud, jag är helt dum i huvudet, jag fattar ingenting". Till exempel på lektionerna när läraren bara "hänger alla med?", och alla bara sitter tysta. Och så säger någon "ja" och sen går de vidare, men själv så vågar man inte riktigt säga att man fattar ingenting. [...] När man pratar med andra senare så hör man att de fattade inte heller. Så det blir lite samma sak med det här [ledtrådarna], att man känner att man inte är ensam med att tycka det är svårt. (Alma, intervju)

Utvärdera lösningsförsök

Till sist gav många elever uttryck för att de använt ledtrådarna för att utvärdera sina lösningsförsök. Här uttryckte till exempel Astrid att hon hade använt ledtrådarna efter en stunds arbete med uppgifterna, för att kolla om hon överhuvudtaget hade tolkat uppgiften på ett rimligt sätt och var "på rätt spår":

Jag läste genom uppgiften först, försökte förstå vad jag skulle göra. Försökte lösa, och sen gick jag till ledtrådarna för att se om jag var på rätt spår eller om jag fattat helt fel. (Astrid, intervju)

På liknande sätt beskrev Amalia att hon efter att ha tittat på ledtrådarna förstod att det lösningsförsök hon påbörjat förmodligen inte skulle leda till lösning, och att det fanns betydligt enklare sätt att ta sig an uppgiften:

Jag löste frågan på fel sätt. Jag började med att komma fram till funktion som stämde överens med de här två punkterna som funktionen behövde stämma överens med. Och sen började jag derivera. Men jag kom inte vidare sen för det blev jättekraångligt. Och då kollade jag på ledtrådarna och förstod att det inte alls var så man skulle tackla problemet. Man skulle först bara skriva allmänt ett uttryck för derivatan. Så då började jag göra det. (Amalia, intervju)

Hur uppfattar elever användbarheten hos elevgenererade ledtrådar?

När eleverna beskrev sina uppfattningar om användbarheten hos de elevgenererade ledtrådarna framträdde två huvudsakliga dimensioner som centrala: ledtrådarnas innehåll och avsändare.

Innehålllets relevans

När det gäller innehållet beskrev eleverna dels att det var viktigt vilken information som ledtrådarna innehöll, men också hur ledtrådarna hade formulerats.

När det gäller ledtrådarnas innehåll framhölls att det var viktigt att ledtrådarnas innehåll skulle vara korrekt, att de skulle innehålla information som eleverna inte redan hade tillgång till i uppgiftstexten, och att de inte skulle innehålla ovidkommande information. En annan vanlig tanke var att ledtrådarna varken fick innehålla "för mycket" eller "för lite" information, för att eleverna skulle bli lagom mycket hjälpta av innehållet. En ytterligare aspekt som lyftes var hur information i olika ledtrådar stod i relation till varandra. En elev i ett enkätsvar lyfte fram att för likartad information i olika ledtrådar kan begränsa användbarheten:

De [ledtrådarna] alla sa i princip samma saker, och jag visste redan det själv. (Enkätsvar)

Flera elever uttryckte att den lösningsinformation som ledtrådarna innehöll blev ett komplement till facit till uppgiften, den information som eleverna annars i regel har tillgång. När de reflekterade över hur de hade använt ledtrådarna i sin problemlösning jämförde många elever just med hur de annars använder facit som verktyg i sin problemlösningprocess, och belyste skillnader i den information som ledtrådar och facit erbjöd. Albin betonade till exempel att:

Ibland när man får svaret så vet man ju ändå inte hur man ska lösa uppgiften. (Albin, intervju)

När det gällde hur ledtrådarna formulerats framhöll flera eleverna att ledtrådar i bästa fall skulle vara "pedagogiska" och "tydliga", och att ledtrådarna de hade fått ta del av uppvisade varierande grad av dessa kvalitéer. En elev belyste i ett enkätsvar till exempel vikten av att rätt typ vilka ord och förklaring användes i ledtrådarna:

[Ledtrådarna] kan använda andra ord som man kanske inte förstår och inte anpassar till den som ska få ledtråden. (Enkätsvar)

Avsändarens relevans

Utöver att bedöma själva ledtrådsinnehållet visade studien vidare hur eleverna också gjorde bedömningar och antaganden gällande ledtrådarnas avsändare när de utvärderade användbarheten hos ledtrådarna. Den upplevda relationen mellan avsändare och mottagare stod här i fokus, framförallt i termer av likheter eller skillnader i nivå på matematikkunskaper. Flera elever uttryckte att de upplevde ledtrådarna som särskilt relevanta för en person på deras egen kunskapsnivå, eftersom avsändaren av ledtråden var en annan elev, snarare än till exempel en lärare, provkonstruktör eller läroboksförfattare. Följande enkätsvar exemplifierar en vanlig tankefigur hos eleverna, att lärare på grund av sina goda matematikkunskaper inte förstår vad som faktiskt är svårt med en uppgift och att andra elever därför kanske kan ge bättre vägledning:

Tycker att det var bra då man kanske kan ha lite samma tankesätt samt vara lika mycket förvirrade om man inte fattar uppgiften. Hade det varit från en lärare hade det funnits chans att det hade varit ledtrådar man inte fattar eller som inte gav någon större hjälp. (Enkätsvar)

Värt att notera här är att det i denna och flera andra utsagor från eleverna bedömdes vara positivt snarare än negativt för användbarheten om avsändaren är lika "förvirrad" som eleven som vid tillfället jobbar med uppgiften. Detta eftersom avsändarens egna utmaningar förväntas ge tillgång till insikt i vad någon som kämpar med uppgiften behöver hjälp med.

I intervjuerna blev det ännu tydligare att eleverna ibland kände en viss frustration över den hjälp de fick när de arbetade med matematikuppgifter, eftersom vägledningen i sig kändes för avancerad för att ta sig an. Astrid, till exempel, uttryckte att vägledning från andra elever kändes mer lättillgänglig och värd att försöka omsätta i handling, eftersom hon kunde vara mer säker på att procedurer som föreslogs var genomförbara:

Det kommer ju från andra elever. Hade det varit en professor så hade jag tänkt [sarkastiskt] "Absolut, du kanske kan det här! Men jag är ingen professor". Men det här är ju liksom elever, jag känner dem. Visst, jag kanske inte ser mig själv som den bästa på matte, och vissa är bättre på matte än mig. Men ändå, det är ju inte en professor. Det är riktat till mig, och det borde gå att lösa. Då måste jag också kunna lösa det. (Astrid, intervju)

Astrid uttrycker här att även om hon inte kan vara säker på att avsändaren har precis samma nivå av matematikkunskaper som hon själv borde nivån vara åtminstone ungefär samma, vilket i sin tur gör att vägledningen känns både relevant och motiverande. Astrids utsaga illustrerar också att elevernas tankar om avsändarens kunskaper också till stor del inbegreper bedömningar av de egna matematikkunskaperna och tilltron till sin egen förmåga.

Det framställdes dock inte bara som positivt att det var just elever som var avsändare av ledtrådarna. Flera elever pekade på att vetskapen om att det var elever som skrivit ledtrådarna gjorde dem mindre säkra på att ledtrådarna var tillförlitliga. En särskild aspekt som lyftes var att eleverna inte kände sig säkra på att elever skulle ta ledtrådsskrivandet "seriöst", som exemplifieras i följande enkätsvar från en elev:

Det positiva är att andra elever kan ge ledtrådar som de själva hade behövt. Däremot så tvingad[es] man lita på att de andra eleverna tog uppgiften seriöst. (Enkätsvar)

Flera elever pekade i linje med detta på att det var viktigt att ledtrådarna "kontrollerades" av en lärare innan de användes.

Diskussion

Syftet med studien var att undersöka hur gymnasieelever använder och uppfattar användbarheten hos elevgenererade ledtrådar vid självständig problemlösning. Resultaten visar att elever kan använda elevgenererade ledtrådar på flera olika sätt i sin problemlösning, och att deras bild av ledtrådarnas användbarhet inte bara beror på ledtrådsinnehållet i sig utan också på elevernas uppfattningar om ledtrådarnas avsändare. Våra resultat ligger på flera sätt i linje med tidigare forskning. De erfarenheter eleverna gav uttryck för, exempelvis av att känna sig "helt dum i huvudet", bekräftar att det behövs användbara stödstrukturer för att elever ska få positiva snarare än negativa erfarenheter av självständig problemlösning (Kirschner et al., 2006; Van de Pol et al., 2010). Att eleverna kunde använda ledtrådarna för att starta upp och komma vidare i sin problemlösning indikerar också att elevgenererade ledtrådar kan vara

en användbar stödstruktur när direkt återkoppling från lärare eller elever inte är möjlig (Glassman et al., 2016; Khosravi et al., 2023; Singh et al., 2024).

Det viktigaste bidraget från studien gäller dock frågan om vad det är som avgör om ledtrådar blir användbara vid problemlösning eller inte. Tidigare studier har främst utforskat hur användbarheten påverkas av ledtråders innehåll och med vilken timing de levereras (Perrenet & Groen, 1993; Razzaq & Heffernan, 2010; Singh et al., 2024). Våra resultat indikerar att elevers uppfattningar om ledtrådarnas avsändare och sin egen relation till avsändaren också utgör en viktig dimension. Att andra elever var avsändare upplevdes till viss del kunna påverka användbarheten negativt, eftersom det introducerade tvivel kring huruvida innehållet gick att "lita på". Främst uttryckte dock eleverna en positiv inställning till att det var just andra elever som formulerat ledtrådarna. Eftersom ledtrådarna hade formulerats av jämlingar som förmodades ha stått inför samma utmaningar och sedan överkommit utmaningarna kändes ledtrådarna tydligt "riktade" till eleverna själva och därför särskilt användbara. Detta trots att ledtrådarna var förproducerade och inte skraddarsydda efter de stödbehov de enskilda eleverna hade i stunden.

I linje med elevernas utsagor finns det stöd i forskning att expertkunskaper ibland kan utgöra ett hinder för att ge god vägledning, genom det som brukar kallas kunskapens förbannelse (Tullis & Feder, 2023). Det är dock också fullt möjligt att eleverna gör en felbedömning när de tänker att personer med jämförbara matematikkunskaper har bättre insikt i vilken vägledning som kan behövas till en viss matematikuppgift i jämförelse med personer som har mer omfattande kunskaper. Tidigare ledtrådsforskning har snarare pekat på att personer med starka ämneskunskaper skriver mer användbara ledtrådar, åtminstone när bedömningen av användbarhet görs av forskare i ämnet (Singh et al., 2024). Våra resultat indikerar i vilket fall att elevernas uppfattningar om avsändarens förmåga att vägleda kan spela roll oavsett om dessa uppfattningar är välgrundade eller inte. Om många elever tror att ledtrådar från en specifik avsändare är potentiellt användbara kommer de sannolikt vara mer benägna att aktivt tolka ledtrådsinnehållet och försöka omsätta detta till handling, snarare än att avfärda vägledningen som för avancerad. Till syvende och sist är det hur eleverna processar ledtrådarna som spelar roll.

Teoretiska implikationer

Utifrån studiens metod är det inte möjligt att fastslå något definitivt om huruvida eleverna presterade bättre eller lärde sig mer än om de inte hade fått tillgång till ledtrådar eller om de hade fått tillgång till ledtrådar som var skrivna av lärare. Det som studerats är elevernas erfarenheter av problemlösning med ledtrådar och studiens resultat talar därför snarare till hur stödsituationen kring ledtrådar bör förstås. I tidigare ledtrådsforskning har elevens möte med ledtrådar inte beskrivits i någon större detalj. Fokus har i stället legat antingen på att mäta effekter eller bedöma kvalitén i innehållet hos olika typer av ledtrådar (Perrenet & Groen, 1993; Razzaq & Heffernan, 2010; Singh et al., 2024). Ledtrådar har därigenom främst förståtts som en neutral informationsbärare, där informationen kan vara mer eller mindre korrekt och välformulerad och på ett bättre eller sämre sätt matcha ett informationsbehov hos eleven. Våra resultat indikerar dock att elever behöver förstås som aktiva snarare än passiva mottagare av förproducerade ledtrådar. Vidare formas stödsituationen kring förproducerade inte bara av elevens upplevda informationsbehov, utan också av affektiva och relationella dimensioner, såsom elevers motivation, tilltro till sin egen förmåga och upplevda relation till avsändaren.

Praktiska implikationer

Studien indikerar att elevgenererade ledtrådar kan vara ett användbart verktyg i matematiklärares verktygslåda. Det är dock viktigt att notera att det förstås också finns stödfunktioner som inte uppnås genom elevgenererade ledtrådar. Ledtrådarna erbjuder inte elever direkt återkoppling på sina egna lösningsförslag och problemlösningsprocess (Van de Pol et al., 2010). Dessutom möjliggör de inte dialog, samarbete och social gemenskap kring problemlösning på det sätt som andra stödstrukturer kan göra. På så sätt kan elevgenererade ledtrådar självklart inte helt ersätta situationell vägledning från lärare eller andra elever. Elevgenererade ledtrådar kan dock utgöra ett värdefullt komplement, med tiden ett tidseffektivt sådant, som kan vara särskilt användbart vid självständigt arbete. Över tid kan lärare bygga upp en bank av elevgenererade ledtrådar som kan utgöra ett ytterligare lärmaterial att erbjuda elever både vid självstudier och klassrumsaktiviteter.

Eftersom två interventioner genomfördes med delvis olika förutsättningar var det i studien möjligt att också dra vissa konkreta praktiska lärdomar kring hur själva producerandet av ledtrådar kan organiseras. Tidigare forskning har visat att när elever bjuds in att bidra med ledtrådar sker det oftast spontant i en pågående dialog, snarare än

som ett planerat inslag i undervisningen (Bikmaz et al., 2010; Mahharrini et al., 2020). Vi fann dock att det inte var helt rättframt för eleverna att bidra med användbara och förståeliga ledtrådar ens med betänketid. För att göra det mesta av elevgenererade ledtrådar kan lärare behöva till exempel avsätta klassrumstid för ledtrådsskrivande, erbjuda några exempelledtrådar, och låta elever formulera ledtrådar i par, åtminstone första gången upplägget provas i en grupp. Vidare kan det överväldiga eleverna att få tillgång till för många ledtrådar när de arbetar med ett problem, och därför kan läraren behöva välja ut ett mindre antal ledtrådar att skicka vidare till framtida elever. På så sätt ökar också elevernas tilltro till att den information som presenteras i ledtrådarna inte är missvisande. Om ledtrådarna implementeras digitalt skulle denna gallring också kunna ske genom att elever själva får bedöma användbarheten och att det efterhand främst blir de ledtrådar som ansetts användbara som eleverna får tillgång till.

Begränsningar

Det finns en risk att erfarenheter från relativt högpresterande elever är bättre representerade i studien än erfarenheter från elever med mindre starka matematikkunskaper eller mindre tilltro till den egna förmågan. För att försäkra oss om att de flesta elever skulle behöva vägledning och därför ta del av ledtrådarna prioriterade vi att använda avancerade matematikuppgifter i studien. I den andra interventionen genomfördes problemlösningen utanför lektionstid, för att bättre likna förutsättningarna vid självstudier hemma. Det finns därför en risk att det främst var relativt högpresterande elever som valde att försöka lösa uppgifterna och som sedan deltog i djupintervjuerna. Till viss del balanseras den risken av enkät- och intervjudata från den första interventionen som genomfördes helt på lektionstid och där elever med matematikkunskaper på olika nivåer deltog. I vilket fall skulle en studie som mer tydligt tog hänsyn till elevernas kunskapsnivå, självförtroende och ämnesidentitet eventuellt kunna komma längre när det gäller att utröna hur den upplevda relationen mellan avsändare och mottagare påverkar användbarheten hos elevgenererade ledtrådar.

Vidare forskning

Studien väcker ett antal frågor som kan undersökas i vidare forskning. Eftersom vi inte kunde hitta tidigare studier kring elevgenererade ledtrådar i en grund- eller gymnasieskolekontext fokuserade vi vår studie på utforskande frågor kring hur gymnasieelever använder och upplever

sådana ledtrådar. Våra resultat indikerar att vidare efterforskningar behövs för att förstå hur den upplevda relationen mellan avsändare och mottagare av ledtrådar påverkar elevers användande av ledtrådar och – i förlängningen – elevers lärande. Exempelvis kan jämförande studier göras mellan kontexter där elever har låg kontra hög tilltro till sin lärares och sina klasskamraters förmåga att ge bra vägledning. Sådana studier skulle till exempel kunna undersöka konsekvenser av förekomst eller brist på samarbetskultur i matematikämnet (Moss & Beatty, 2006; Sengupta-Irving & Agarwal, 2017) för hur ledtrådar tas emot och används av elever. För att bättre förstå hur stor eller liten skillnad den upplevda avsändaren gör för elevers problemlösning och lärande kan också experiment med för- och eftertester genomföras där å ena sidan innehållsmässiga kvalitéer och å andra sidan avsändare varierar. Vidare studier kan också undersöka hur elevernas befintliga kunskaps- och självförtroendenivå påverkar hur de upplever och använder vägledning genom ledtrådar. För att undersöka om det är värt elevernas tidsinvestering i att skriva ledtrådar, framför allt om detta görs under klassrumstid, bör effekterna av elevgenererade ledtrådar också jämföras med alternativa stödstrukturer.

Slutsats

Studien visar att elevgenererade ledtrådar kan hjälpa elever med att komma igång, att komma vidare, och att utvärdera sina förslag till lösningar på avancerade matematikuppgifter. Detta stärker hypotesen om att elevgenererade ledtrådar kan utgöra en användbar stödstruktur att erbjuda elever när direkt vägledning från lärare eller andra elever inte är möjlig. Vidare visar studien att den upplevda relationen mellan ledtråders avsändare och mottagare spelar en central roll i hur användbara ledtrådarna är för eleverna. Vilka antaganden elever gör om ledtråders avsändare och om sig själva som mottagare, samt vilka konsekvenser dessa antaganden får, utgör särskilt intressanta frågor för vidare forskning.

English abstract

This article reports on an intervention study of student-generated clues as a support structure for mathematical problem solving in situations where there is limited possibility to get direct guidance from teachers. The findings indicate that students use student-generated clues to: 1) initiate problem-solving attempts, 2) manage difficulties and set-backs, and 3) evaluate proposed solutions. Furthermore, students' perceptions

of the content and the creator of the clues influences their evaluation of their usefulness. While pre-produced clues provided by teachers could offer similar information and hints regarding the task at hand, the findings suggest that student-generated clues have particular positive consequences for students' perseverance, as they communicate that the task is manageable for a person at the approximate knowledge level of the students.

Acknowledgements

Vi vill tacka eleverna som deltog i studien för deras tid och engagemang.

Finansiering

Studien finansierades med praktiktärla forskningsmedel (ULF-medel) administrerade av Chalmers Tekniska Högskola.

Referenser

- Alegre, F., Moliner, L., Maroto, A., & Lorenzo-Valentin, G. (2019). Peer tutoring in mathematics in primary education: A systematic review. *Educational Review*, 71(6), 767–791. <https://doi.org/10.1080/00131911.2018.1474176>
- Bikmaz, F. H., Çeleb, Ö., Aslıhan, A. T. A., Eren, Ö. Z. E. R., Soyak, Ö., & Reçber, H. (2010). Scaffolding strategies applied by student teachers to teach mathematics. *The International Journal of Research in Teacher Education*, 1(3), 25–36.
- Bowen, G. A. (2006). Grounded theory and sensitizing concepts. *International Journal of Qualitative Methods*, 5(3), 12–23. <https://doi.org/10.1177/160940690600500304>
- Crouch, C. H., & Mazur, E. (2001). Peer instruction: Ten years of experience and results. *American Journal of Physics*, 69(9), 970–977. <https://doi.org/10.1119/1.1374249>
- Engelbrecht, J., & Harding, A. (2005). Teaching undergraduate mathematics on the internet. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 253–276. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-6457-2>
- Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225–256). Information age publishing.

- Glassman, E. L., Lin, A., Cai, C. J., & Miller, R. C. (2016). Learnersourcing personalized hints. In *Proceedings of the 19th ACM conference on computer-supported cooperative work & social computing* (pp. 1626–1636). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/2818048.2820011>
- Grothérus, A., Jeppsson, F., & Samuelsson, J. (2019). Formative Scaffolding: how to alter the level and strength of self-efficacy and foster self-regulation in a mathematics test situation. *Educational Action Research*, 27(5), 667–690. <https://doi.org/10.1080/09650792.2018.1538893>
- Intaros, P., Inprasitha, M., & Srisawadi, N. (2014). Students' problem solving strategies in problem solving-mathematics classroom. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 116, 4119–4123. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.901>
- Jones, I., & Alcock, L. (2014). Peer assessment without assessment criteria. *Studies in Higher Education*, 39(10), 1774–1787. <https://doi.org/10.1080/03075079.2013.821974>
- Kani, N. H. A., & Shahriani, M. (2015). Applying the thinking aloud pair problem solving strategy in mathematics lessons. *Asian Journal of Management Sciences and Education*, 4(2), 20–28.
- Kaya, S., Kablan, Z., & Rice, D. (2014). Examining question type and the timing of IRE pattern in elementary science classrooms. *Journal of Human Sciences*, 11(1), 621–641. <https://doi.org/10.14687/ijhs.v11i1.2730>
- Kirschner, P., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why unguided learning does not work: An analysis of the failure of discovery learning, problem-based learning, experiential learning and inquiry-based learning. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1
- Khosravi, H., Denny, P., Moore, S., & Stamper, J. (2023). Learnersourcing in the age of AI: Student, educator and machine partnerships for content creation. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 5, 100151. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2023.100151>
- Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet. (2022). Skolverket.
- Läroplan för gymnasiet. (2011). Skolverket.
- Mahharrini, E. P., Ansari, B. I., & Yani, B. (2020). In-service teachers' scaffolding in teaching and learning mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, 1460(1), 1–9. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1460/1/012039>
- Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 1, 441–465. <https://doi.org/10.1007/s11412-006-9003-z>

- Othman, H., Asshaari, I., Bahaludin, H., Tawil, N. M., & Ismail, N. A. (2012). Student's perceptions on benefits gained from cooperative learning experiences in engineering mathematics courses. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 60, 500–506.
<https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.414>
- Penuel, W. R., & Fishman, B. J. (2012). Large-scale science education intervention research we can use. *Journal of Research in Science Teaching*, 49(3), 281–304. <https://doi.org/10.1002/tea.21001>
- Perrenet, J., & Groen, W. (1993). A hint is not always a help. *Educational Studies in Mathematics*, 25(4), 307–329. <https://doi.org/10.1007/BF01273904>
- Pfister, M., Moser Opitz, E., & Pauli, C. (2015). Scaffolding for mathematics teaching in inclusive primary classrooms: A video study. *ZDM – Mathematics Education*, 47, 1079–1092.
<https://doi.org/10.1007/s11858-015-0713-4>
- Razzaq, L., & Heffernan, N. T. (2010). Hints: is it better to give or wait to be asked?. In Aleven, V., Kay, J & Mostow, J. (Eds) *Proceedings of the 10th international conference on intelligent tutoring systems (ITS2010) Part 1* (pp. 349–358). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-13388-6_39
- Roehler, R. L. & Cantlon, D. C. (1997). Scaffolding: A powerful tool in social constructivist classrooms. In K. Hogan, & M. Pressley (Eds.), *Scaffolding Student Learning: Instructional Approaches and Issues* (pp. 6–42). Brookline Books.
- Sengupta-Irving, T., & Agarwal, P. (2017). Conceptualizing perseverance in problem solving as collective enterprise. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(2), 115–138. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1295417>
- Singh, A., Brooks, C., Wang, X., Li, W., Kim, J., & Wilson, D. (2024). Bridging Learnersourcing and AI: Exploring the Dynamics of Student-AI Collaborative Feedback Generation. In *Proceedings of the 14th Learning Analytics and Knowledge Conference* (pp. 742–748). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3636555.3636853>
- Spitzer, M. W. H., & Musslick, S. (2021). Academic performance of K-12 students in an online-learning environment for mathematics increased during the shutdown of schools in wake of the COVID-19 pandemic. *PloS one*, 16(8), 1–16. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0255629>
- Tenenbaum, H. R., Winstone, N. E., Leman, P. J., & Avery, R. E. (2020). How effective is peer interaction in facilitating learning? A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology*, 112(7), 1303–1319.
<https://doi.org/10.1037/edu0000436>
- Tullis, J. G., & Feder, B. (2023). The "curse of knowledge" when predicting others' knowledge. *Memory & Cognition*, 51(5), 1214–1234.
<https://doi.org/10.3758/s13421-022-01382-3>

- Van de Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. *Educational Psychology Review*, 22, 271–296. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9127-6>
- Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89–100. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>

Noter

1. Den betydligt lägre svarsfrekvensen i den andra interventionen kan förklaras av att eleverna ombads att genomföra problemlösning och svara på enkäten utanför skoltid. Alltså genomförde inte nödvändigtvis alla elever problemlösningen, och färre tog sig tid att svara på frågor om deras erfarenhet.
2. Alla namn som används är pseudonymer.

Bilaga 1 Interventionsuppgifter

I bilagan presenteras de fyra matematikuppgifter som användes i studien. Här gäller att den första uppgiften användes i studiens första intervention och de tre övriga användes i studiens andra intervention. Uppgifterna är hämtade dels från nationella prov i matematik, dels från Kunskapsmatrisen (<https://km.se/>). Varje uppgiftsbeskrivning inleds med en beskrivning av var uppgiften är hämtad från. Uppgifterna återges här med godkännande från Skolverket och Kunskapsmatrisen.

Uppgift: Sannolikhet julgranskulor

Uppgiften är hämtad från Kunskapsmatrisen.

I en julgran hänger det kulor i tre olika färger, 7 st blå, 9 st gula och 11 st röda kulor. Strömmen har gått och det är släckt i rummet.

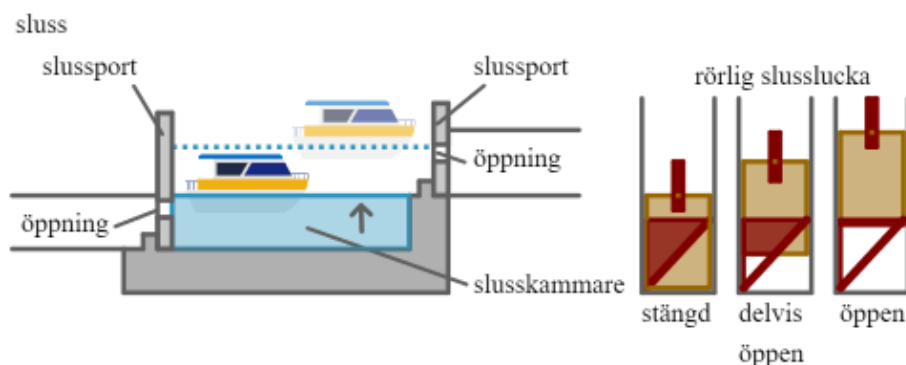


Hur stor är sannolikheten att du får en kula i varje färg om du slumpmässigt plockar tre kulor från granen?

Uppgift: Derivata sluss

Uppgiften är hämtad från NP Matematik E vt2004. Grafiken är vidareutvecklad av Kunskapsmatrisen.

För att en båt ska kunna färdas uppför en kanal använder man slussar. När båten kommer fram till en sluss så styrs den in i en slusskammare och slussporten bakom båten stängs. Vattennivån i slusskammaren höjs genom att vatten släpps in genom en öppning i den främre slussporten. Öppningens storlek regleras med hjälp av en lucka. När vattennivån inuti slusskammaren är densamma som vattennivån utanför porten kan porten öppnas och båten åka vidare.



I den här slussen är öppningen i slussporten triangulär, 6,0 dm bred och 6,0 dm hög. Själva luckan är rektangulär (se bild). Vattnet släpps in i slusskammaren genom att luckan höjs med en konstant hastighet på 0,30 dm/s.

Vattenflödet, F dm³/s, är proportionellt mot öppningens area, A dm². När luckan är helt uppdragen forsar vattnet in i slusskammaren med 180 dm³/s genom den triangulära öppningen.

- Bestäm sambandet mellan vattenflödet och öppningens area.
- Hur snabbt (dm³/s?) ökar vattenflödet genom öppningen då luckan har höjts 4,0 dm?

Uppgift: Derivata dagsljus

Uppgiften är hämtad från NP Matematik D vt1997.

För att programmera en automatisk strömbrytare har en elingenjör satt upp en matematisk modell som anger den tidpunkt M på dygnet vid vilken det börjar bli mörkt på en viss ort:

$$M = 19 - 4 \cos(\pi(360 - t)/180)$$

där M är tiden i timmar ($M = 12,5$ motsvarar klockan 12.30) och t är tiden i dagar ($t = 1$ motsvarar första januari). I modellen förutsätts alla månader vara 30 dagar.

Beräkna enligt modellen;

- a) i vilka månader de dagar ligger då det börjar bli mörkt klockan 18.00.
- b) när under året tidpunkten för mörkrets inbrott ändras snabbast.

Uppgift: Derivata uttryck

Uppgiften är hämtad från NP Matematik D vt1999.

Funktionerna f och g är deriverbara. Du bildar en ny funktion:

$$h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$$

För funktionerna f och g gäller:

- $f(0) = 2$
- $g(0) = 1$
- $f'(x) = g(x)$
- $g'(x) = -f(x)$

Bestäm $h'(x)$ och använd resultatet för att bestämma $h(x)$.

Oskar Hagvall Svensson

Oskar Hagvall Svensson är biträdande universitetslektor vid Institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Göteborgs universitet. Hans primära forskningsintressen innefattar ämnesdidaktik inom teknisk och naturvetenskaplig utbildning, miljö- och hållbarhetsutbildning, samt högre utbildning.

oskar.hagvall.svensson@gu.se

Samuel Marander

Samuel Marander är gymnasielärare i matematik och samhällskunskap samt biträdande rektor vid Franklins gymnasium.

samuel.marander@molndal.se

Daniel Larsson

Daniel Larsson är gymnasielärare i matematik och teknik vid Franklins gymnasium samt central förstalärare inom digitalisering vid Mölndals stads utbildningsförvaltning

daniel.larsson@molndal.se