Videreutdanningsstudenters undervisningskunnskap relatert til likhetstegnets betydning i algebra

ALEKSANDRA HARA FADUM OG HELGA KUFAAS TELLEFSEN

Vi ser på videreutdanningsstudentenes forståelse av algebraiske uttrykk og likhetstegnets betydning og hvilke didaktiske konsekvenser det kan få. Vi presenterer resultatene fra en algebraisk oppgave besvart av 82 norske lærere på videreutdanningskurs i matematikk, 5–10 (aldersgruppe 10–16 år). Vi har sett etter en forståelse av lærernes egne matematiske kunnskap, deres analyse av elevens løsning og tilbakemeldingen de ville gitt eleven. En tematisk analyse av lærernes skriftlige arbeid viste at lærerne sjelden identifiserte misoppfatning om likhetstegnet som et hinder for å løse en oppgave. Resultatene av denne studien kan forhåpentligvis fungere som et framstøt til å forbedre videreutdanning for matematikklærere i algebra.

> *Helhetsinntrykket er at eleven har en uklar formening/oppfatning av hva likhetstegnet betyr i denne sammenhengen. Å forenkle et uttrykk blandes sammen med å løse likninger.*
>
> (sitat fra en av besvarelsene)

Pedagogisk og fagdidaktisk forskning viser at én av de viktigste faktorene for elevers læringsutbytte er kvaliteten på lærerens undervisning (Nordenbo et al., 2008; Tchoshanov et al., 2017; Klette, 2020). Flere studier antyder at kunnskapen som lærere trenger for å undervise i matematikk ikke bare handler om å selv kunne matematikk. Det er like viktig å forstå hvordan elever tenker og lærer. Mens elevene skal tilegne seg en allmenn matematisk kunnskap, er læreres undervisningskunnskap i matematikk mer sammensatt (Ball et al., 2008; Mosvold, 2017). Derfor vil det være hensiktsmessig å bidra til at undervisningskunnskap i matematikk styrkes i den norske skolen. I denne artikkelen vil vi beskrive noen aspekter ved lærernes undervisningskunnskap i algebra siden elevers utfordringer med algebra er viden kjent (Bush & Karp, 2013).

Aleksandra Hara Fadum, *Oslo Metropolitan University*
Helga Kufaas Tellefsen, *Oslo Metropolitan University*

Fadum A. H. & Tellefsen, H. K. (2022). Videreutdanningsstudenters undervisningskunnskap relatert til likhetstegnets betydning i algebra. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 27 (2), 43–61.

Forskningen relatert til elevenes forståelse av algebra inkluderer blant annet studier som utforsker elevers forståelse av begrepet ekvivalens og likhetstegnets betydning (Falkner et al., 1999; Knuth et al., 2006). Det viser seg at noen elever mangler en forståelse av likhetstegnets betydning, som gjør at de få problemer med å skille mellom ukjente og variabler, samt tolke likninger og algebraiske uttrykk. Til tross for det fant vi et begrenset antall studier, særlig i norsk kontekst, som har undersøkt lærernes forståelse av algebraiske begreper og hvordan dette kan påvirke elevenes læring. Tirosh et al. (1998) forsket på lærernes kunnskap av elevers tenkemåter når det gjelder forenkling av algebraiske uttrykk. De oppdaget blant annet at lærerne i deres studie ikke var opptatt av å finne en forklaring på elevenes misoppfatninger i algebra ved å koble det til tidligere erfaringer i aritmetikk eller spenningen mellom ulike tolkninger av matematiske begreper (Tirosh et al., 1998). Attorps (2003) analyserte hvilke forestillinger svenske lærere hadde om likninger. Denne studien viste at lærere kan ha problemer med å identifisere likninger fordi de er usikre på matematiske symboler som for eksempel = og ≤, og at de kan oppfatte algebraiske uttrykk som likninger. Vermeulen og Meyer (2017) forsket på sør-afrikanske læreres matematiske kunnskap om likhetstegnet og hvordan den kan påvirke elevers misoppfatninger av likhetstegnet. De konkluderte med at et lavt nivå av undervsiningskunnskap om likhetstegnet begrenset lærernes evne til å identifisere, korrigere, forhindre eller redusere elevers misoppfatninger.

Siden algebra er et hovedtema i den nye norske læreplanen i matematikk 1–10 og flere internasjonale studier poengterer at det kan være en sammenheng mellom lærernes og elevenes oppfatning av algebraiske begreper, mener vi at det er viktig å undersøke hvordan norske lærere oppfatter viktige algebraiske begreper og hvordan de responderer på elevers løsninger.

Med bakgrunn i tidligere forskning om elevers misoppfatninger i algebra og læreres undervisningskunnskap samt den nye norske læreplanen i matematikk 1.–10. trinn (2020), vil vi se på hvilken undervisningskunnskap norske lærere bør ha for å støtte elever i utfordringer med algebra. Vårt forskningsspørsmål er derfor: Hvilke aspekter ved undervisningskunnskap om algebraiske uttrykk og likhetstegnets betydning framkommer i videreutdanningsstudentenes (videre lærernes) skriftlig arbeid? Hva kan det ha å si for deres skriftlige refleksjoner og tilbakemeldinger til eleven?

Teoretiske perspektiver

Her vil vi se på læreres undervisningskunnskap i algebra knyttet opp mot algebraiske uttrykk og likhetstegnets betydning som er relevant for vårt forskningsspørsmål, analyse og drøfting av resultatene.

Læreres undervisnings kunnskap i matematikk

Internasjonal forskning viser at det er en klar sammenheng mellom lærerens undervisningskunnskap i matematikk og elevens læring (Mosvold, 2017). For å støtte elevenes læring må lærere forstå hva og hvordan elevene har lært, og lærerutdanningen skal lære sine studenter hvordan man gjør dette (Jenset et al., 2018; Valenta & Enge, 2015).

I vår studie vil vi bruke modellen av undervisningskunnskap i matematikk (Ball et al. 2008) for å identifisere og drøfte lærernes algebraiske kunnskap og måten de vil veilede en elev på. Ifølge Ball et al. (2008) er det viktig å se på undervisningskunnskap som en helhet av to store domener: fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap. Vi brukte innholdet i disse domenene som et utgangspunkt for å lage oppgaver i videreutdanningskurs for matematikklærere.

Fagkunnskap i modellen består av allmenn og spesialisert fagkunnskap, samt matematisk horisontkunnskap. I den artikkelen vil vi fokusere på de to første. Det å kunne løse et matematisk problem og analysere elevenes løsninger kan defineres som *allmenn matematikkunnskap*. Den *spesialiserte fagkunnskapen* handler om å tilrettelegge for ulike måter å fremstille en matematisk operasjon eller idé på, samt vise til ulike representasjoner og forklaringer. Blant annet innebærer det å kunne identifisere viktige matematiske ideer og muligheter som en oppgave kan inneholde. Ifølge Kilhamn (2014) handler læreres spesialiserte kunnskap i algebra også om ulike roller som symboler kan spille i algebraiske uttrykk, likninger eller formler, samt hvordan et strategisk valg av eksemplene kan hjelpe elever å skille mellom ukjente og variabler.

Læreres fagdidaktiske kunnskap ifølge Ball et al. (2008) kan avsløres ved hvordan lærere velger eksempler som kan brukes for å få elevene dypere inn i innholdet, samt tolker elevenes innspill og løsningsforslag. I denne domenen inngår også kunnskap om vanlige forestillinger og misoppfatninger innenfor et gitt matematisk tema. For eksempel i algebra bør lærere kjenne til elevenes forestillinger og mulige misoppfatninger om likhetstegnet, variabler, algebraiske uttrykk og likninger.

Prediger (2010) peker også på at diagnostisk kompetanse er viktig for lærere og knytter den opp mot fagdidaktisk kunnskap om faglig innhold og elever, beskrevet hos Ball et al. (2008). I en diagnostisk undervisning vil læreren ta tak i en misoppfatning eleven har, og legge til rette for at eleven får en erfaring som gjør at han ser at virkeligheten ikke stemmer overens med den oppfatningen han eller hun hadde. Ifølge Black og Wiliam (2009) bør tilbakemeldinger fokusere på hva elevene mestrer og hvordan de kan forbedre sitt arbeid. Derfor vil læreres fagdidaktiske kunnskap være avgjørende for i hvilken grad tilbakemeldingen står i forhold til informasjon og forståelse av elevens forkunnskaper eller kompetanse.

Jakobsen et al. (2014) anser at lærernes matematiske kunnskap involvert i å tolke elevenes løsninger og gi konstruktive tilbakemeldinger til elevene ("interpretative knowledge") trenger et spesielt fokus i lærerutdanningen. Tilbakemeldingene som elevene får, og kvaliteten på disse, er avgjørende for elevers læring. Samtidig har en rekke studier knyttet til lærerstudenters og matematikklæreres undervisningskunnskap vist at lærerstudenter og lærere kan ha generelt begrensede oppfatninger av algebraiske begreper og vise en tendens til å bruke regelbaserte forklaringer og tilbakemeldinger (Even, 1993; Cankoy, 2010, Vermeulen & Meyer, 2017).

Basert på denne litteraturgjennomgangen er det klart at lærere trenger mer enn bare *allmenn matematikkunnskap* (dvs. kunnskap om algebra og andre matematiske temaer). Identifisering av viktige matematiske ideer og refleksjon rundt matematiske sammenhenger i oppgaver, krever en umiddelbar bevissthet og fleksibel tenkning. Dette er *spesialisert matematikkunnskap*. Det å vite om og kjenne til misoppfatninger som elever gjør, og bestemme hvilke av disse som er mest sannsynlig at elever gjør, samt hvilke tilbakemeldinger elever bør få, kategoriseres som *fagdidaktisk* kunnskap.

Likhetstegnet og algebra

"Algebra is about form and about transformation. [...] It is also about equivalence: something is preserved despite apparent change." (Pimm, 1995, s. 88). I algebra brukes likhetstegnet for å uttrykke ekvivalens (likhet eller identitet). Falkner, et al. (1999) mener at det å forstå betydningen av likhetstegnet er grunnleggende for å forstå algebra. Samme ideer finner vi i den nye norske læreplanen i matematikk 1.–10. trinn (2020)[1] der det nevnes eksplisitt "likskap og ulikskap i samanlikning av storleikar, mengder, uttrykk og tal og bruke likskaps- og ulikskapsteikn" som et av kompetansemålene allerede etter 3. trinn. Samtidig peker Kongelf (2015) på at norske lærebøker i liten grad benyttet mulighetene til å bygge videre på og dra sammenhenger fra aritmetikk til algebra. Algebra framstår ofte som et nytt isolert tema. I norske lærebøker var innholdet i hovedsak algebramanipulasjon, hvor en i liten grad la opp til begrunnelser og utforsking av de ulike notasjonene. Konteksten og progresjonen i eksemplene gjør at likhetstegnets betydninger i ulike kontekster blir lite tydelig.

Prediger (2010) skiller mellom tre forskjellige betydninger av likhetstegnet: operasjonell betydning, relasjonell betydning og spesifikasjon. Her vil vi fokusere på de to første kategoriene. Spesifikasjon er ikke aktuell i vår studie da den handler om formler og funksjoner som angir en sammenheng mellom størrelser. En *operasjonell betydning* vil være en asymmetrisk bruk, der vi i aritmetikk ofte har en beregning for å utføre det som står på venstre side til et svar på høyre side, altså ”regn ut”. En *relasjonell betydning* innebærer symmetrisk bruk av likhetstegnet i identiteter og likninger. Dette kan også forklares som ”kan byttes ut med”-tolkning (Jones & Pratt, 2012, s. 3) og er nyttig både i løsninger av likninger og arbeidet med algebraiske uttrykk. I vår studie vil en relasjonell forståelse for likhetstegnets betydning i ulike kontekster være viktig både for å forenkle algebraisk utrykk og for å kunne forstå elevers forestillinger om algebraiske uttrykk, likninger og likhetstegnets betydning i oppgaven.

Som Bush og Karp (2013) viser, sliter elevene med å forstå de forskjellige betydningene av nye begreper (uttrykk, likning og identitet). Elevene kan etablere en operasjonell forståelse av likhetstegnet og overgeneralisere sine forkunnskaper for å skape meninger i ukjente kontekster. Det kan indikere at elevene kun er vant til en asymmetrisk bruk av likhetstegnet og at det mangler metaperspektiv på likhetstegnets betydning i undervisningen.

Lærerens undervisningskunnskap påvirker valg av innhold og undervisningsmetoder (Kleve, 2007) og det kan være avgjørende for elevenes læring av algebra. Attorps (2003) og Attorps og Tossavainen (2009) som studerte læreres og lærerstudenters oppfatninger om likninger, viser at de også kan tolke likhetstegnet som en kommando for å utføre en aritmetisk operasjon.

I denne artikkelen analyserer vi lærernes skriftlige arbeid med tanke på hvordan lærerne forenklet et algebraisk uttrykk selv sammenlignet med deres refleksjoner rundt elevens løsning.

Metode for datainnsamling og analyse

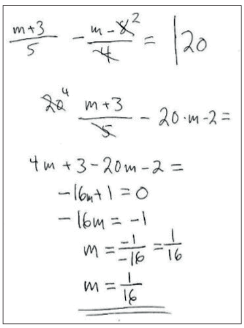
Våre data er hentet fra eksamensbesvarelser fra 82 lærere som tok videreutdanningsstudiet i Matematikk 1 for 5.–10. trinn (30 studiepoeng). Videreutdanningen er primært for matematikklærere uten formell utdanning i matematikk/matematikkdidaktikk. Det er lærere med varierende erfaringer fra ulike trinn i grunnskolen. Ett av målene for kurset var at lærerne skulle reflektere omkring samspillet mellom matematisk kunnskap og fagdidaktiske problemstillinger. Emnet *Tall og algebra* (del av videreutdanningsstudiet) ble avsluttet med en individuell, skriftlig eksamen. Da vi sensurerte eksamensoppgavene stusset vi over at så mange videreutdaningsstudenter (15 av 82) hadde løst et algebraisk uttrykk i en av oppgavene som likning. Vi fikk derfor lyst til å studere dette nærmere.

I starten av studiet spurte vi alle videreutdanningsstudentene om vi kunne bruke innleveringer eller oppgaver som de leverte til forskning. Etter endt eksamen og da eksamensresultatene forelå, spurte vi om vi også kunne bruke besvarelsene til forskning. Vi informerte deltakerne kort om studien og alle hadde mulighet til å reservere seg, noe som ingen gjorde. Besvarelsene ble anonymisert, og ingen navn er benyttet i teksten.

Oppgaven nedenfor er en av fem eksamensoppgaver ved avslutningen av kurset.

Regn ut følgende uttrykk: $\frac{m+3}{5} - \frac{m-8}{4} =$

a) Her er et eksempel på en løsning fra en elev på 10. trinn (figur 1). Finn ut hvordan eleven har regnet og hvilke misoppfatninger som kan være til stede.



Figur 1. *Elevens løsning*

b) Hvordan kan du skape en kognitiv konflikt hos eleven slik at han/hun selv oppdager hva som må være rett svar?

Denne oppgaven ble valgt for å teste videreutdanningsstudentene faglige og fakdidaktiske kunnskaper i algebra ved at de fikk en identisk besvarelse fra en elev på 10.trinn.

Datamaterialet vi har analysert, består av alle løsningsforslag til oppgaven gjengitt over. For å skape orden i dataene og identifisere mulige sammenhenger, gjennomførte vi en tematisk analyse av eksamensbesvarelsene. Bruken av tematisk analyse ble valgt ettersom det er en velegnet metode for å identifisere, analysere og finne mønstre av data. Vi tok utgangspunkt i Braun og Clarke (2006) seks faser innen tematisk analyse. Den første fasen handlet om at vi gjorde oss kjent med datamaterialet. Vi leste gjennom besvarelsene hver for oss og sikret at vi hadde samme forståelse for hva vi skulle se etter. Her la vi begge to merke til at det var mange lærerne som løste oppgave a) som likning, og at det var en variasjon i misoppfatninger som lærerne beskrev i sine besvarelser. I fase to startet vi med å utarbeide koder. For å kode dataene benyttet vi åpen koding, og ga stikkordsbetegnelser til alle de ulike tilfellene vi oppdaget i dataene våre. Dette gjorde vi for å kunne organisere datamaterialet i meningsfulle grupper, slik prosessen er beskrevet i Johannessen et al. (2018). Vi var to forskere som uavhengig av hverandre kodet lærernes besvarelser. Kodene samsvarte i stor grad. I de tilfellene hvor det var uenighet, diskuterte vi oss frem til enighet med problemstillingen i tankene. Denne fasen hjalp oss til å oppdage mønstre i dataene og tilrettelegge dataene for den påfølgende kategoriseringsfasen.

Etter å ha kodet datamaterialet, begynte arbeidet med å vurdere hvordan ulike koder kunne slås sammen til å danne overordnede kategorier (fase 3). Det første vi gjorde var å sortere svarene på oppgave a) i to kategorier: Riktig løsning og ikke riktig løsning. Deretter gikk vi grundigere til verks og leste hver for oss gjennom alle løsningsforslagene som ikke var riktige på nytt med tanke på hvilke feil og misoppfatninger som gikk igjen hos lærerne. Vi laget en tabell som hjalp oss å få oversikten over alle kodene. Under "ikke riktige løsninger" utkrystalliserte det seg flere ulike delkategorier for hvordan de hadde løst oppgaven feil. Etter flere diskusjonsrunder sorterte vi løsningene i oppgave a) i tre ulike kategorier: A1) det algebraiske uttrykket forenkles riktig; A2) oppgaven løses som likning med svaret $m = 52$; A3) andre løsningsforslag som ikke passer i kategoriene over (feil i brøkregning, parentesregning, regning med negative tall). Eksemplene fra alle kategorier kommer under drøftingen.

Svarene på oppgave b) kategoriserte vi med tanke på lærernes refleksjon over misoppfatninger og mulige årsaker til dem. Det var interessant å undersøke mer åpent hvilke misoppfatninger i algebra lærerne la vekt på. Vi gikk gjennom kodene for å få fram detaljer og forstå hvilke oppfatninger om algebraiske uttrykk og likhetstegnets betydning i oppgaven som ble synliggjort i lærernes skriftlige arbeid. Her ble besvarelsene plassert i to kategorier: B1) identifiserer misoppfatning av begrepene "uttrykk"/"likning" og manglende forståelse for likhetstegnets betydning; B2) beskriver misoppfatninger kun som misbruk av regler og prosedyrer.

Kodene i svarene på oppgave c) sorterte vi etter hvordan lærerne ville skape en kognitiv konflikt hos eleven. Tilbakemeldingene i oppgave c) ble derfor fordelt i to kategorier: C1) eleven veiledes til å oppdage feil i regler og prosedyrer; C2) eleven veiledes til å oppdage likhetstegnets betydning og forskjellen på et algebraisk uttrykk og en likning. Kategoriseringen ble kvalitetssikret gjennom flere gjennomlesninger av materialet og forskertriangulering der begge forfatterne i felleskap diskuterte kategoriene (fase 4).

I fase 5 vurderte vi om kategoriene samsvarte med forskningsspørsmålet vårt. Vi fant at kategoriene kan knyttes direkte til både allmenn og spesialisert matematikkunnskap (forenkle algebraisk uttrykk, identifisere og beskrive årsaker til elevens misoppfatning) og fagdidaktisk kunnskap (veilede eleven videre). Derfor kan kategoriene til sammen hjelpe oss å svare på forskningsspørsmålet vårt om aspekter ved undervisningskunnskap om algebraiske uttrykk og likhetstegnets betydning hos våre lærere og hvordan det påvirker deres skriftlige refleksjoner og tilbakemeldinger til eleven.

Vår rolle som forskere krever stor bevissthet om egen subjektivitet i analysen og tolkning av datamaterialet. Fauskanger og Mosvold (2015, s. 85) peker på at "læreres konstruerte kunnskap imidlertid aldri vil kunne studeres i sin helhet av utenforstående forskere, da en ikke uten videre kan anta at læreres kunnskap kan uttrykkes skriftlig eller muntlig". I vår studie legger vi en premiss om at lærernes undervisningskunnskap kan studeres slik den uttrykkes skriftlig. Analysen av lærernes skriftlige arbeid kan gi et mulig svar på forskningsspørsmålet vårt om aspekter ved undervisningskunnskap om algebraiske uttrykk og likhetstegnets betydning som oppgaven gir innsikt i. Vi presenterer våre funn som mulige tendenser uten å trekke generelle slutninger.

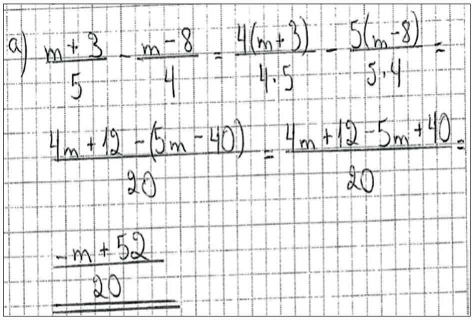
Resultater og drøfting

Vi presenterer og kommenterer lærernes løsningsforslag fra hver kategori i oppgave a). Under hver av kategoriene A1–A3 identifiserer vi kategoriene i oppgave b) og c). Vi bruker rammeverket om undervisningskunnskap (Ball et al., 2008) for å drøfte hvordan lærerne løste oppgaven selv og deres identifisering av og årsak til misoppfatninger hos eleven, samt hvordan de valgte å gi tilbakemelding til eleven.

Kategori A1. Det algebraiske uttrykket forenkles riktig

Det var 50 lærere som løste deloppgave a) riktig. Den typiske løsningen ser vi i figur 2. Videre vil vi se på løsningsforslagene i lys av kategoriene fra oppgave b) og c) for å beskrive lærernes spesialiserte og fagdidaktiske kunnskap. De fleste lærerne identifiserte at elevene ikke skiller mellom et uttrykk og en likning (kategori B1). Her er to ulike eksempler. Den ene viser til misoppfatninger og poengterer manglende forståelse for likhetstegnet. I det første utsnittet beskriver læreren tydelig at eleven ikke skiller mellom likning og algebraisk uttrykk og viser samtidig til at eleven har en uklar forståelse for likhetstegnet og foreslår hvordan han/hun har villet jobbe med eleven.

> Helhetsinntrykket er at eleven har en uklar formening/oppfatning av hva likhetstegnet betyr i denne sammenhengen. Å forenkle



Figur 2. *Eksempel på løsning i kategori A1*

> et uttrykk blandes sammen med å løse likninger. For den eleven ville jeg ha begynt med å ha noen eksempler med enkle algebraiske uttrykk som skal forenkles og sammenligne med enkle likninger og diskutere hva eleven mener er forskjellen på disse: Hva er likhetstegnets betydning?

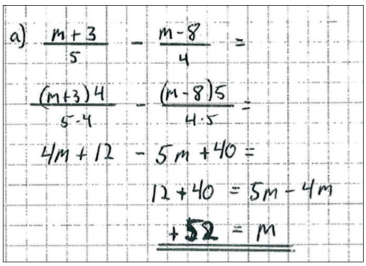
Læreren klarte å identifisere de viktige matematiske ideene og de mulighetene som oppgaven inneholder. I besvarelsen foreslo læreren å sammenligne algebraiske uttrykk og likninger. Dette kan hjelpe eleven til å framheve fellestrekk og samtidig avsløre forskjeller (kategori C2). Tilbakemeldingen viser at læreren har både spesialisert og fagdidaktisk matematikkunnskap som ifølge Kilhamn (2014) handler om ulike roller som symboler kan spille i algebraiske uttrykk og likninger, samt hvordan et strategisk valg av eksemplene kan hjelpe elever å skille mellom ukjente og variabler.

Den andre læreren i denne kategorien skriver også at eleven ikke skiller mellom likning og algebraisk uttrykk, men kobler ikke dette til likhetstegnets betydning i oppgaven: "Eleven regner korrekt ut bokstavuttrykk og talluttrykk ut ifra prosessen sin (flytter over til andre siden). Han har plutselig laget en likning med verdier på hver side av likhetstegnet som det ikke var i utgangspunktet". Samtidig legger læreren vekt på regler og prosedyre i tilbakemeldingen (kategori C1): "Læreren må her poengtere regelen om at det du gjør med alle ledd må gjøres med alle ledd for så å gjøre/legge til rette for å oppdage feil".

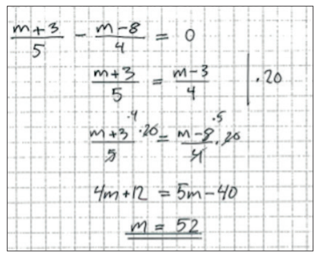
Seks av 50 lærere trekker fram den relasjonelle betydningen av likhetstegnet som viktig i tilbakemeldingene. Resten av lærerne i kategori A1 viser at selv om de har allmenn fagkunnskap, overser de betydningen av likhetstegnet i oppgaven og ser ikke etter matematiske sammenhenger i løsningen. Ut fra dette kan vi se at identifisering av årsaker til misoppfatninger krever en umiddelbar bevissthet og fleksibel tenkning om likhetstegnets forståelse, altså en spesialisert fagkunnskap. Våre resultater samsvarer med Tirosh et al. (1998) sine funn om at lærere kan være lite opptatt av å finne en forklaring på elevenes misoppfatninger i algebra ved å koble det til tidligere erfaringer i aritmetikk eller spenningen mellom ulike tolkninger av matematiske begreper.

Kategori A2. Oppgaven løses som likning

Det var 15 lærere som løste oppgaven som likning, og fant at $m = 52$. At det står "=" bak uttrykket samtidig som det inneholder en variabel m, kan være en årsak til at de oppfatter at det må være en likning. Figur 3 og 4 viser typiske løsninger.



Figur 3. *Eksempel på løsning i kategori A2*



Figur 4. *Eksempel på løsning i kategori A2*

I det første eksempelet (figur 3) begynner læreren med å finne felles nevner. På linje 3 forsvinner fellesnevner og dette kan tolkes som at læreren multipliserer med 20 på begge sider selv om det ikke står noe på høyre side. På linje 4 omskriver læreren uttrykket som likning og samler tallene på en side og variablene på den andre siden: $12 + 40 = 5m - 4m$. I det andre eksemplet (figur 4) skriver en annen lærer null på høyre side før han eller hun begynner med løsningen av en likning.

Løsningsforslagene kan tolkes ved at lærerne selv har misoppfatning av begrepene "uttrykk" og "likning". I følge Attorps og Tossavainen (2009) kan det å ikke ta hensyn til matematiske symboler og syntaksen i et formelt språk, føre til at likhetstegnet blir forbundet bare med likninger. Begge lærerne i eksemplene viser en operasjonell forståelse av likhetstegnet (Jf. Prediger, 2010) ved at tegnet betyr "regn ut" eller "gi svaret" ($m = 52$) og fokuserer på den ukjente i stedet for variabelen (Jf. Kieran, 2004).

Det er interessant at to av de 15 i kategori A2 som selv løste oppgaven som likning, identifiserte at eleven ikke skiller mellom et uttrykk og en likning (kategori B1). Den ene læreren kommenterer at måten oppgaven var skrevet på, forvirret eleven:

> Dette blir vanskelig siden han ikke har fått oppgitt en verdi på andre siden av likhetstegnet. Til slutt har eleven innført 0 som verdi på den ene siden av likhetstegnet, som før sto tomt. Da gjør han uttrykket om til en likning, og løst den sånn videre.

En operasjonell forståelse av likhetstegnet påvirket tilbakemeldingene i stor grad. Lærerne foreslo å skape en kognitiv konflikt i tilbakemelding til eleven ved å regne ut konkrete verdier og lage identitet for å skape entydighet (kategori C1):

> Jeg ville få eleven til å bytte ut *m* med et tall. Jeg ville også lagd en algebraisk identitet, slik at det var lettere å kontrollere hva som var riktig og galt. I denne oppgaven er det vanskelig å vite hva man egentlig ønsker til svar.

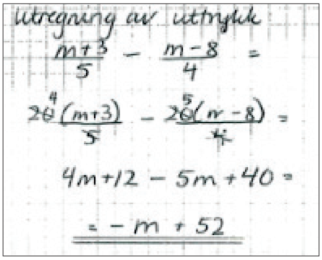
Tilbakemeldingene kan hjelpe eleven til å oppdage feil i regler og prosedyrer, men gjør ikke synlig forskjellen mellom et uttrykk og en likning. Det kan se ut som at lærerne ikke forsto eller oversåLikhetstegnets betydning i oppgaven.

Lærerne i denne kategorien løser selv oppgaven som likning og kommenterer elevsvaret ut fra sitt ståsted. De konkluderer ikke med at oppgaven ble løst feil. Dette synliggjør sammenhengen mellom måten lærerne løser oppgaven selv på og hvilke tilbakemeldinger de gir til eleven. Mangler på både allmenn og spesialisert fagkunnskap gjør det vanskelig å identifisere misoppfatningene og veilede eleven. Dette støttes også av forskningsfunn i andre studier om læreres oppfatninger av likninger og likhetstegnet (Attorps & Tossavainen, 2009, Vermeulen & Meyer, 2017).

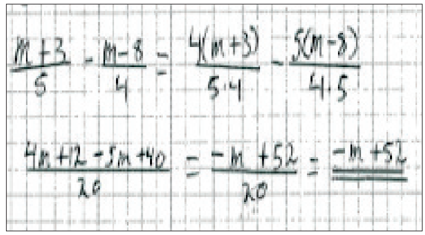
Kategori A3. Løsningsforslag som ikke passer i kategoriene over.

I kategori A3 er det 17 ulike løsningsforslag, som kan deles i to grupper. Ti av 17 lærere kommer til det samme svaret ($-m + 52$). Figur 5 og 6 viser to typiske eksempler. Som vi ser i figur 5 multipliserer denne læreren med 20 for å bli kvitt nevneren. Her kan misoppfatningen være å se på dette som en likning der en multipliserer med 20 på begge sider av likhetstegnet for å finne fellesnevner og forkorte. Dette kan tolkes som en instrumentell forståelse for algebraiske regler og likhetstegnets betydning. Kandidaten i figur 5 bruker regler om ekvivalente transformasjoner, men viser mangel på forståelse for ekvivalens.

I figur 6 starter læreren med å finne fellesnevner for å kunne subtrahere de to brøkuttrykkene. I starten kan det se ut som at læreren tolker likhetstegnet som et "kan byttes ut med"-symbol (Jf. Jones & Pratt, 2012). Men når nevneren 20 blir borte i svaret, kan også her en misoppfatning



Figur 5. *Eksempel på løsning i kategori A3*



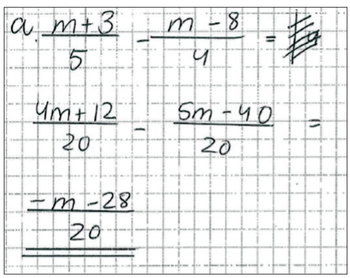
Figur 6. *Eksempel på løsning i kategori A3*

om ekvivalens være til stede. Ut fra løsningsforslagene i figur 5 og 6 ser vi at lærerne gir svaret som et uttrykk $-m + 52$. Det kan bety at ingen av dem aksepterer at svaret kan være en algebraisk brøk $\frac{52-m}{20}$ som også representerer regneprosessen, siden begge fjernet nevnerne før de ga svaret. Lignende hindring for å lære algebra kan vi finne også hos elever ifølge Tall & Thomas (1991) som beskriver blant annet "prosess-resultat"-konflikten som viser til det faktum at ett uttrykk som $2 + 3a$ kan representere regneprosessen og svaret samtidig.

Seks av disse ti lærerne konkluderer med at eleven har mangelfull forståelse for likhetstegnet. Vi vil trekke fram et typisk eksempel: "Når det gjelder feil oppfatning har vi nok å ta av, faktisk så mye at det blir vanskelig å liste opp alt: Bruk av parentes, når nevner skal gjøres lik slik at alle deler blir multiplisert korrekt, forskjell uttrykk og likning, rekkefølge i utregning, betydningen av =". Her bruker læreren sin prosedyrekunnskap og fokuserer på konkrete regler, men viser ikke sammenheng mellom disse (kategori B2). Forskjellen mellom algebraiske uttrykk og likninger og betydningen av likhetstegnet kommer som separate punkter i oppramsingen. Dette kan tolkes som at disse lærerne overser et metaperspektiv på likhetstegnets betydning og ikke ser etter årsaken til misoppfatningene. Ut fra dette kan vi si at disse lærere hadde begrensede oppfatninger av algebraiske begreper og viste en tendens til å bruke regelbaserte forklaringer som også dokumenteres i andre studier (Jf. Even, 1993, Cankoy, 2010, Vermeulen & Meyer, 2017).

Tilbakemeldingene i denne kategorien viser at lærerne prøvde å bruke sin fagdidaktiske kunnskap ved å forstå hvordan eleven hadde tenkt. Samtidig er tilbakemeldingene generelle, siden de ikke klarte å spesifisere hva de ville framheve hos eleven. Her er et eksempel: "Eleven løser denne oppgaven som likning, ikke som et algebraisk uttrykk. Hva som eksakt er en misoppfatning eller feil vil nok bli avdekt best med samtale med eleven". Dette kan indikere at lærerne ikke finner relevant forkunnskap hos eleven som de kan bygge sin veiledning på. Algebraiske uttrykk og likninger framstår som separate temaer i tilbakemeldingene. Dette er et interessant funn som kan stamme fra norske lærebøkers oppbygging gjennom lang tid. Temaet algebra har vært delt i ulike kapitler der generalisert aritmetikk (algebraiske uttrykk) har vært ensbetydende med algebra og vært et eget kapittel skilt fra for eksempel likninger. Innholdet har vært preget av algebramanipulasjon, der sammenhengen mellom de ulike kapitlene blir lite tydelig (Kongelf, 2015). Dette støttes også av Vermeulen og Meyer (2017) som hevder at læreres syn på ulike matematiske temaer og hvordan de kan introduseres til elever, kan bli påvirket av lærebøker.

Kategori A3 inneholder sju besvarelser der lærerne klarte å forenkle det algebraiske uttrykket og angi svaret som brøk, men hvor det samtidig oppsto mange små aritmetiske feil underveis slik at svaret ble feil.



Figur 7. *Eksempel på løsning i kategori A3*

Eksemplet i figur 7 viser at læreren tolket likhetstegnet som ekvivalentstegn og begynner med å forenkle uttrykket ved å finne fellesnevner. Samtidig gjorde han eller hun en feil ved subtraksjon av tellerne i to algebraiske brøker:

$$(4m + 12) - (5m - 40) = -m - 28$$

Fire av de sju lærerne identifiserte at eleven ikke skiller mellom uttrykk og likning (kategori B1). Den typiske kommentaren er: "Dette er en brøk som skal trekkes fra en annen brøk, der *m* representerer en ukjent. Eleven har forsøkt å løse oppgaven som en likning for å finne *m*". Læreren identifiserer elevens misoppfatning, men samtidig blander han/hun "den ukjente" med variabelbegrepet, noe som Kieran (2004) også beskriver hos elever. I følge Kongelf (2015) kan progresjon i norske lærebøker føre til at variabelbegrepet blir lite tydelig for både elever og lærere.

To av disse sju lærerne mener at eleven mangler forståelse for likhetstegnets betydning (kategori B1): "Det er ingen likning fordi i en likning er det et utrykk som er lik noe. Eleven forstår dermed heller ikke likhetstegnets betydning" og "I en likning har man to sider, V.S = H.S".

Bare en lærer i denne gruppen har gitt tilbakemelding til eleven: "Jeg kan be eleven om å sette inn f.eks. $m = 10$ i utregningen. Da vil det være umiddelbart klart at dette ikke skal løses som en likning". Ut fra denne besvarelsen er det vanskelig å si noe om lærerens fagdidaktiske kunnskap.

I kategori A3 viser lærerne instrumentell forståelse for algebraiske regler og mangelfull forståelse for likhetstegnets betydning i oppgaven som igjen påvirker deres tilbakemeldinger. Dette kan indikere at de mangler både allmenn og spesialisert fagkunnskap, og at det begrenser deres kompetanse til å identifisere og korrigere elevens misoppfatninger. Basert på bare en oppgave er det vanskelig å konkludere om lærerne gjorde en tilfeldig feil eller om det er en feil som baserer seg på instrumentell forståelse av algebraiske regler. Det at kun noen lærere svarte på oppgave c), tolker vi som at deres undervisningskunnskap gjør det vanskelig for dem å veilede eleven selv om lærerne identifiserte misoppfatningen. Dette viser at det er et viktig samspill mellom allmenn, spesialisert og fagdidaktisk kunnskap og samsvarer med funn i andre studier om lærernes oppfatning av algebraiske begreper (Jf. Attorps & Tossavainen, 2009, Vermeulen & Meyer, 2017).

Konklusjon

I denne studien har vi sett på norske videreutdanningsstudenters undervisningskunnskap slik den fremsto i deres skriftlige arbeid, knyttet opp mot algebraiske uttrykk og relasjonell og operasjonell forståelse av likhetstegnet. Vi så etter en dypere forståelse av lærernes egne matematiske kunnskap, deres analyse av elevens løsning og tilbakemeldingen de ville gitt eleven.

Ved å klassifisere lærernes skriftlige besvarelser kunne vi identifisere felles trekk ved svarene på en fagdidaktisk oppgave. Dette gjorde oss bedre rustet til å finne ut hva lærerne kunne om algebraiske utrykk og likhetstegnets betydning og hvordan de bruker sin undervisningskunnskap for å veilede eleven.

Kategoriene i oppgave a) hjalp oss til å forstå om lærerne hadde en nødvendig allmenn matematikkunnskap. Studien viser at 50 av de 82 lærerne forenklet det algebraiske uttrykket riktig. De fleste klarte å finne ut hvordan eleven hadde regnet, men det var vanskelig å avgjøre her om de hadde en relasjonell forståelse om ekvivalens og likhetstegnets betydning.

Lærere som løste det algebraiske uttrykket som likning, klarte ikke å skille mellom uttrykk og likninger. For disse lærerne kan det se ut som om de fokuserte på den ukjente i stedet for variabelen i løsningene og så på likhetstegnet som "regn ut" eller "gi svaret" (Jf. Prediger, 2010). Det viser seg at flere videreutdanningsstudenter, altså lærere, kan ha samme hindringer for å lære algebra som ifølge forskere er typiske for elever (Attorps, 2003; Falkner et al., 1999; Prediger, 2010; Tall & Thomas, 1991, Tirosh et al.,1998).

Da vi studerte kategoriene i oppgave b) for å identifisere hvilke misoppfatninger i algebra lærerne la vekt på, fant vi ut at flere av besvarelsene til lærerne som selv løste oppgave a) riktig, bar preg av en instrumentell forståelse av algebraiske regler og prosedyrer. Disse lærerne overså ofte en relasjonell betydning av likhetstegnet i oppgaven. Andre studier indikerer også at lærere kan være lite opptatt av en dyp forklaring på elevenes tenkemåter og ikke kobler elevenes misoppfatninger til tidligere erfaringer i aritmetikk eller til spenningen mellom ulike tolkninger av matematiske begreper (Asquith et al., 2007, Tirosh et al., 1998). Hvis lærere skal være i stand til å identifisere mulige misoppfatninger hos elever i forbindelse med forenkling av algebraiske uttrykk, er det en nødvendig, men ikke tilstrekkelig betingelse å ha allmenn fagkunnskap. Å identifisere årsaker til misoppfatninger krever spesialisert fagkunnskap. Dette støttes også av andre forskningsfunn (Asquith et al., 2007, Kilhamn, 2014, Vermeulen & Meyer, 2017).

Kategoriene i oppgave c) ga oss et innblikk i lærernes fagdidaktiske kunnskap i algebra. Seks av lærerne som løste oppgave a) riktig, identifiserte viktige matematiske ideer om ekvivalens og likhetstegnets betydning i oppgaven. De reflekterte over årsaken til elevens misoppfatninger og hadde forslag til tilbakemeldinger de ville gitt eleven. Disse lærerne viste at de hadde undervisningskunnskap, der både allmenn, spesialisert og fagdidaktisk kunnskap var synlig gjennom deres skriftlige arbeid.

Alle lærerne som løste oppgave a) riktig, har allmenn fagkunnskap, men de fleste mangler spesialisert fagkunnskap som igjen er viktig for hvilken tilbakemelding de gir til eleven. Særlig problematisk viser det seg å være at lærerne ikke kommuniserte tydelig nok ulike betydninger som likhetstegnet kan ha i ulike kontekster i matematikk. Vi antar at det å ta hensyn til ulike betydninger av likhetstegnet er vanskelig å forstå for mange lærere. Attorps (2003) argumenterte for at egen skolegang kan prege læreres oppfatninger av matematiske begreper. I tillegg hevder andre studier at innholdet i lærebøker kan påvirke læreres syn på matematikken (Kongelf, 2015, Vermeulen & Meyer, 2017).

Det er flere studier som påpeker hvor viktig det er for læreres undervisningskunnskap å delta i diskusjoner av elevers arbeid og elevers matematiske tenkning (Asquith et al., 2007, Kilham, 2014, Jakobsen, 2014, Vermeulen & Meyer, 2017, Kilham & Röj-Lindberg, 2019). Vi har gått detaljert inn i lærernes skriftlige arbeid for å finne muligheter og ideer som kan tas opp til diskusjon med videreutdanningsstudentene. Vår studie indentifiserte også utfordringer som lærerne selv hadde med algebra. Resultatene av denne studien kan forhåpentligvis fungere som et framstøt til å forbedre videreutdanning for matematikklærere i algebra. Våre lærere identifiserte sjelden misoppfatning om likhetstegnet som et hinder for å løse en oppgave. Flere andre studier viser at det er viktig å lære elever å skille mellom en operasjonell og rela-sjonell betydning av likhetstegnet i ulike oppgaver. En slik forståelse kan fremme algebraisk tenkning (Falkner et al., 1999; Kieran, 2004; Prediger, 2010). Dette kan brukes som grunnlag for å planlegge videreutdanningskurs i matematikk. Videreutdanningskurs for lærere bør ha tydelig fokus på ulike betydninger av likhetstegnet og bør skille klart mellom algebraiske uttrykk og likninger. Det er spesielt viktig for lærere å kjenne til og være i stand til å identifisere mulige misoppfatninger i algebra. Å utvikle spesialisert matematikkunnskap vil samtidig bidra til å fremme fagdidaktikk kunnskap slik at lærerne utvikler undervisningskunnskap i matematikk i sin helhet.

Koblingen mellom teori og praksis er et aspekt flere undersøkelser framhever som viktig for utvikling av lærernes undervisningskunnskap i matematikk (Klette, 2020). Matematikkdidaktisk forskning som studerer læreres utvikling av undervisningskunnskap, er et stadig voksende felt. Vår studie vil kunne ha betydning for lærerutdanneres arbeid med videreutdanningsstudenter. Lærerutdanningene bør finne systematiske måter for å kunne tilrettelegge for utvikling av lærerutdannedes kompetanse slik at de kan hjelpe studenter og lærere til å utvikle den nødvendige undervisningskunnskapen (Valenta & Enge, 2015). Som Kilhamn (2014) påpeker bør spesialisert fagkunnskap få større oppmerksomhet både i lærerutdanningen og i læreplanutviklingen.

Litteraturliste

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J. & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9 (3), 249–271.

Attorps, I. (2003). Teachers' images of the "equation" concept. *European Research in Mathematics Education*, 3, 1–8.

Attorps, I. & Tossavainen, T. (2009). Is there always truth in equation? In C. Winsløw (ed.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08 in Copenhagen* (pp. 143–150). Sense.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389–407.

Black, P. & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation, and Accountability*, 21 (1), 5–31. doi: 10.1007/s11092-008-9068-5

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology,* 3 (2), 77–101.

Bush, S. B. & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: a review. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32 (3), 613–632.

Cankoy, O. (2010). Mathematics teachers' topic-specific pedagogical content knowledge in the context of teaching a^0, 0! and a ÷ 0. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 10, 749–769.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 94–116.

Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6 (4), 232–236.

Fauskanger, J. & Mosvold, R. (2015). En metodisk studie av innholdsanalyse – med analyser av matematikklæreres undervisningskunnskap som eksempel. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (2), 79–96.

Jakobsen, A. Ribeiro, M. & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19 (3-4), 135–150.

Jenset, I. S., Canrinus, E. T., Klette, K. & Hammerness, K. (2018). Opportunities to analyse pupils' learning within coursework on campus: a remaining challenge in teacher education. *European Journal of Teacher Education*, 41 (3), 360–376. doi: 10.1080/02619768.2018.1448783

Johannessen, L. E. F., Rafoss, T. W. & Rasmussen, E. B. (2018). *Hvordan bruke teori? Nyttige verktøy i kvalitativ analyse*. Universitetsforlaget.

Jones, I. & Pratt, D. (2012). A substituting meaning for the equals sign in arithmetic notating tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43 (1), 2–33. http://www.nctm.org/publications/article.aspx?id=31742

Kieran, C. (2004). The core of algebra: reflections on its main activities. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI study* (s. 21–33). Kluwer Academic.

Kilhamn, C. (2014). When does a variable vary? Identifying mathematical content knowledge for teaching variables. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19 (3-4), 83–100.

Kilhamn, C. & Röj-Lindberg, A.-S. (2019). Algebra teachers' questions and quandaries – Swedish and Finnish algebra teachers discussing practice. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 24 (3-4), 153–171.

Klette, K. (2020). Hva vet vi om god undervisning? Rapport fra klasseromsforskningen. I R. J. Krumsvik & R. Säljö (Red.), *Praktisk-pedagogisk utdanning – en antologi* (2. utg., s. 183–214). Fagbokforlaget.

Kleve, B. (2007). *Mathematics teachers' interpretation of the curriculum reform, L97, in Norway* (Upuplisert ph.d.-avhandling). Høgskolen i Agder.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (4), 297–312.

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3-4), 83–109.

Mosvold, R. (2017). Studier av undervisningskunnskap i matematikk: internasjonale trender og nordiske bidrag. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 22 (2), 51–69.

Nordenbo, S. E., Søgaard Larsen, M., Tiftikci, N., Wendt, R. E. & Østergaard, S. (2008). *Lærerkompetanser og elevers læring i førskole og skole. Et systematisk review utført for Kunnskapsdepartementet*, Oslo. Dansk Clearinghouse for Uddannelsesforskning, Aarhus Universitet. http://edu.au.dk/forskning/danskclearinghouseforuddannelsesforskning/udgivelser/laererkompetencerogeleverslaeringifoerskoleogskole/

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. Routledge.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13 (1), 73–93. doi: 10.1007/s10857-009-9119-y

Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (2), 125–147.

Tchoshanov, M., Cruz, M. D., Huereca, K., Shakirova, K., Shakirova, L. & Ibragimova, E. N. (2017). Examination of lower secondary mathematics teachers' content knowledge and its connection to students' performance. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15 (4), 683–702. doi: 10.1007/s10763-015-9703-9

Tirosh, D., Even, R. & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: teacher awareness and teaching approaches. *Educational studies in mathematics*, 35 (1), 51–64.

Valenta, A. & Enge, O. (2015). Profesjonskunnskap for matematikk-lærerutdannere. *Bedre Skole*, 4, 74–78.

Vermeulen, C & Meyer, B. (2017) The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 21 (2), 136–147.

Fotnote

1 https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Aleksandra Hara Fadum

Aleksandra Hara Fadum is an associate professor at the Faculty of Education and International Studies at Oslo Metropolitan University, Norway. Some of her current research interests include teacher professional development and collaborative learning in mathematics.

aleksandra.hara.fadum@oslomet.no

Helga Kufaas Tellefsen

Helga Kufaas Tellefsen is an associate professor at the Centre for Senior Citizen Staff at Oslo Metropolitan University, Norway. She works as a lecturer and teacher educator at the Faculty of Education and International Studies at Oslo Metropolitan University. Her research interests concern formative assessment and teacher professional development.

helgakufaas.tellefsen@oslomet.no

Abstract

Mathematical knowledge for teaching related to the concept of the equal sign in algebra

This article addresses teachers' understanding of algebraic expressions and the meanings of the equal sign, and probable didactic consequences of this understanding. We present the results of an algebraic task answered by teachers enrolled in an in-service mathematics teacher-education course for grades 5–10 (ages 10–16). The teachers' solutions where they should solve the task themselves was analysed and compared with their own comments on the pupils' solutions and misconceptions, their feedback to the pupils and the teachers' understanding of meanings of the equal sign and the pupils' misconception. The thematic analysis shows that teachers rarely identified misconceptions about the equal sign as an obstacle to solving mathematical problems. Implications for teacher professional development are discussed.