

Studier av undervisningskunnskap i matematikk: internasjonale trender og nordiske bidrag

REIDAR MOSVOLD

De siste tiårene har forskere vist stadig mer interesse for den matematiske kunnskapen som er spesifikt knyttet til matematikkundervisningen. I denne artikkelen diskuteres nordiske bidrag til forskningen på dette feltet i lys av internasjonale trender. Diskusjonene bygger på resultater fra en litteraturstudie av 190 empiriske artikler som ble publisert i perioden 2006–2013. I tillegg trekkes her inn nordiske artikler etter 2013. Noen av disse studiene fokuserte på kunnskapens innhold og natur, andre fokuserte på hvordan denne kunnskapen kan utvikles, mens en tredje gruppe studier undersøkte hvordan lærerkunnskapen påvirker elevenes resultater og kvaliteten på undervisningen. Videre nordisk forskning på feltet kan blant annet bidra til styrking av teori og praksistilknytning.

Denne artikkelen rapporterer fra en litteraturstudie av tidligere forskning på den matematiske kunnskapen som er knyttet til det undervisningsrelaterte arbeidet i matematikk – her kalt undervisningskunnskap i matematikk (jf. Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010). I en nylig publisert oversiktsartikkel, presenterer Hoover, Mosvold, Ball og Lai (2016) noen internasjonale trender fra denne litteraturstudien, og her diskuteres den nordiske forskningen på feltet i lys av de internasjonale trendene.

Da Shulman (1986) rettet blikket mot den profesjonelle kunnskapen lærere trenger for å utøve lærerarbeidet, markerte dette noe nytt i forskningen. Fram til da hadde forskerne fokusert på andre indikatorer når de studerte lærerkvalitet. I lys av dette hevdet Shulman at fagkunnskap var et manglende paradigme i forskningslitteraturen, og han beskrev lærernes faglige kunnskap som unik for lærerprofesjonen. I årene som fulgte har forskere jobbet videre ut fra Shulmans teorier, og det er særlig ideen om en type kunnskap som kombinerer faglig og pedagogisk

Reidar Mosvold

Universitetet i Stavanger

kunnskap som har slått an (jf. Depaepe, Verschaffel & Kelchtermans, 2013). Shulman kalte denne typen kunnskap "pedagogical content knowledge" (PCK), men på norsk blir den ofte referert til som fagdidaktisk kunnskap (e.g. Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010).

I matematikkdiridaktikk har forskere utviklet ulike rammeverk, hvor de særlig er opptatt av den matematiske kunnskapen som er spesifikt knyttet til det undervisningsrelaterte arbeidet i matematikk. Ball og kollegaer ved University of Michigan har utviklet en praksisbasert teori for læreres undervisningskunnskap i matematikk (Ball, Thames & Phelps, 2008), og de fokuserer særlig på den spesialiserte matematiske kunnskapen lærere trenger. Andre har bygd videre på disse ideene og undersøkt hvordan læreres kunnskap påvirker undervisningskvaliteten og elevenes prestasjoner (e.g. Hill, Rowan & Ball, 2005; Hill, Umland, Litke & Kapitula, 2012). Rowland og kollegaer fokuserer særlig på hvordan kunnskapen anvendes i klasserommet i sitt rammeverk – på norsk omtalt som "Kunnskapskvartetten" (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005). I det tyske COACTIV-prosjektet (COgnitive ACTIVation in mathematics) fokuserer forskerne særlig på skillet mellom fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap (Baumert et al., 2010), men disse forskerne ser ut til å tolke Shulmans opprinnelige kunnskapskategorier på en annen måte enn for eksempel Ball og kollegaer. I sin sammenligning av rammeverkene til COACTIV, TEDS-M (Teacher Education and Development Study in Mathematics) og LMT-prosjektet (Learning Mathematics for Teaching), viser Kaarstein (2014) at konkrete oppgaver som er utviklet for å måle fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap kategoriseres ulikt på tvers av de tre rammeverkene. Selv om de forskjellige rammeverkene har ulike fokus og ulike operasjonaliseringer av Shulmans ideer, uttrykker de et felles ønske om å utforske en type matematisk kunnskap som er spesifikk for matematikklærerprofesjonen. I denne artikkelen er dette for enkelhets skyld omtalt som undervisningskunnskap i matematikk, men dette brukes her som en åpen og inkluderende betegnelse på en eller annen type kunnskap som er spesifikt knyttet til matematikkundervisningen.

I sine diskusjoner av den internasjonale forskningen på kunnskap som er spesifikt knyttet til matematikkundervisning, løfter Hoover et al. (2016) særlig fram behovet for å utvikle et felles teoretisk utgangspunkt og metoder for å studere denne kunnskapen. I denne artikkelen er fokuset spesielt på de nordiske bidragene, og det blir diskutert hvilke muligheter den nordiske forskningen har til å bidra til videre utvikling av forskningen på dette området. Selv om det er forholdsvis få nordiske studier av undervisningskunnskap i matematikk, utgjør de nordiske bidragene en betydelig andel av den europeiske forskningen på dette feltet. Samtidig ser det ut til at til at interessen for matematikklæreres

kunnskap er i sterk vekst i de nordiske forskningsmiljøene, og i 2014 ble det publisert et dobbeltnummer i *Nordic Studies in Mathematics Education* (NOMAD) med fokus på læreres undervisningskunnskap i matematikk. Fra et slikt ståsted er det derfor relevant å undersøke nærmere de nordiske bidragene i lys av internasjonale trender på feltet. I denne artikkelen diskuteres særlig den nordiske forskningen som var inkludert i en større internasjonal litteraturstudie, men nordiske studier som har blitt publisert etter at litteraturstudien ble avsluttet trekkes også inn. Artikkelen vil løfte fram muligheter og begrensninger ved de nordiske studiene av læreres undervisningskunnskap i matematikk, og forslag til hvordan nordiske forskere i fremtidige studier kan komme med betydningsfulle bidrag til den internasjonale forskningen knyttet til undervisningskunnskap i matematikk blir presentert.

Metode

Denne artikkelens diskusjon av de nordiske bidragene til forskningen om læreres undervisningskunnskap i matematikk tar utgangspunkt i resultater fra en omfattende litteraturstudie av internasjonale studier på feltet. Denne litteraturstudien ble gjennomført av en gruppe forskere knyttet til forskningsmiljøet ved University of Michigan – samt to norske forskere (deriblant artikkelforfatteren). Vi tok utgangspunkt i empiriske studier som var publisert på engelsk i fagfelleurderte tidsskrifter i perioden 2006–2013. Fram mot 2006 var det allerede publisert en del artikler som bygde videre på Shulmans ideer om en spesifikk matematisk kunnskap som var knyttet til undervisningen (e.g. Ball & Bass, 2003; Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005), men det var særlig i årene etter 2006 at forskningen på dette feltet skjøt fart. Derfor fant vi det naturlig å fokusere på artikler som var publisert i dette tidsrommet (se også Hoover et al., 2016).

Vi gjorde et strukturert søk etter empiriske tidsskriftartikler i seks ulike databaser:

- PsycInfo
- Eric
- Francis
- ZentralBlatt
- Web of Science
- Dissertation Abstracts

Utover databasenes egne algoritmer for hva som gjelder som empiriske tidsskriftartikler, ble det ikke gjort noen ytterligere avgrensninger i forhold til hvilke tidsskrifter som ble tatt med. I et forsøk på å ha et åpent og inkluderende perspektiv på den matematiske kunnskapen som er spesifikt knyttet til matematikkundervisning, ble følgende nøkkelord inkludert i søket – sortert i tre kategorier: 1) Matematikk: math* (asteriksen indikerer at alle ord som starter med "math" inkluderes, f.eks. "mathematics" og "mathematical"); 2) Fagkunnskap: know* AND (content OR special* OR pedagog* OR didact* OR math* OR teach* OR professional OR disciplin* OR domain) OR "math for teaching" OR "mathematics for teaching" OR "math-for-teaching" OR "mathematics-for-teaching"; 3) Undervisning: teaching OR pedagog* OR didact* OR instruction*.

Strukturerte søk i de seks databasene ga over 3000 treff. Etter en gjennomlesing av sammendragene til disse artiklene, ble 349 artikler plukket ut som potensielle artikler å inkludere i litteraturstudien. Kriteriet som ble brukt i denne første screeningen var at det skulle være empiriske artikler – slik dette er beskrevet av American Educational Research Association (2006) – og at en eller annen forståelse for en matematisk kunnskap knyttet til undervisning måtte danne utgangspunkt for formuleringen av forskningsspørsmål eller analyse. De 349 artiklene ble kodet ved hjelp av et sett med forhåndsdefinerte koder knyttet til følgende kategorier:

- Inkludering
- Type studie
- Variabler som ble undersøkt
- Kausalt design
- Studiens overordnede problem
- Størrelsen på utvalg
- Måleinstrument
- Nivå/trinn lærerne underviste på
- Lærernes erfaring
- Land studien ble gjennomført i
- Matematisk emne som ble studert
- Sentrale funn

Det første punktet her dreide seg om hvorvidt artikkelen skulle inkluderes i det endelige utvalget av artikler i litteraturstudien. Som eksempel på

koder i øvrige kategorier, ble "type studie" kodet som enten *nat* (fokus på kunnskap som begrep eller kunnskapens natur), *tch* (hvis fokuset primært var på lærere/teachers, for eksempel nivået på deres kunnskap), *lrn* (hvis fokuset primært var på læring eller utvikling av kunnskap), *int* (hvis det var en intervensjonsstudie), *mod* (hvis det primært var en studie av modererende variabler som påvirker kunnskapen), *eff* (hvis det primært var en effekt av grupper eller individers kunnskap på noe annet), *pol* (hvis det primært var et empirisk basert "policy argument"). I kodingsprosessen ble hver enkelt av disse artiklene kodet uavhengig av to forskere, og disse to forskerne ble så enige om et endelig sett med koder for hver artikkel. Ulike par av forskere fra gruppen kodet hver sine sett med artikler for å styrke reliabiliteten. Etter at kodingen var gjennomført, ble vi til slutt stående igjen med 190 artikler som ble inkludert i litteraturstudien. Studier ble ekskludert enten fordi det viste seg at det ikke var empiriske studier, eller fordi studiene ikke hadde spesifikt fokus på undervisningskunnskap i matematikk. Blant de ekskluderte studiene var det bare én nordisk studie, og den ble ekskludert fra reviewet fordi fokuset ikke hovedsakelig var på læreres undervisningskunnskap i matematikk.

Blant artiklene i litteraturstudien var 22 artikler fra Europa og fem av disse studiene ble gjennomført i Norden (Bäckman & Attorps, 2012; Drageset, 2010; Kellner et al., 2011; Nilssen, 2010; Ryve, Nilsson & Mason, 2012). I det følgende diskuteres disse nordiske bidragene i lys av de internasjonale trendene, og deretter trekkes nyere nordiske bidrag til feltet inn – her med særlig fokus på studier som er publisert i NOMAD etter 2013.

Internasjonale trender og nordiske bidrag

Det er mange måter å kategorisere studiene på dette feltet, men her er det tatt utgangspunkt i det overordnede forskningsproblemet som studiene retter seg mot. Fokuset i studiene kan da beskrives gjennom følgende tre hovedkategorier:

- Studier som undersøkte kunnskapens innhold og natur
- Studier som undersøkte hvilke faktorer som påvirker (utviklingen av) undervisningskunnskap i matematikk
- Studier som undersøkte hvilke faktorer som påvirkes av undervisningskunnskap i matematikk

Tabell 1 gir en oversikt over antallet studier som kan plasseres innenfor disse tre hovedkategoriene, og hvilke mer konkrete forskningsproblem de ulike studiene innenfor disse kategoriene rettet seg mot.

Tabell 1. *Overordnede forskningsproblem i studiene*

Overordnet problem	<i>n</i>	Nordiske studier
Kunnskapens innhold og natur	57	
Hva er UKM?	36	Bäckmann & Attorps (2012)
Hvilke forhold er det mellom UKM og/eller andre variabler?	21	Drageset (2010); Ryve, Nilsson & Mason (2012)
Faktorer som påvirker UKM	80	
Etter- og videreutdanning?	27	
Lærerutdanning?	28	Kellner et al. (2011); Nilssen (2010)
Læreplan, materiell og oppgaver?	10	
Undervisningspraksis?	0	
Hvordan utvikles UKM?	15	
Hvordan stimulere utviklingen av UKM?	0	
Faktorer som påvirkes av UKM	32	
Påvirker UKM praksis?	6	
Hvordan påvirker UKM praksis?	11	
Påvirker UKM elevens læring?	15	
Hvordan påvirker UKM elevens læring?	0	
Andre	21	
Totalt	190	

Flere artikler fokuserer på hvilke faktorer som påvirker lærernes undervisningskunnskap i matematikk, men det er også mange studier som fokuserer på denne kunnskapens innhold og natur. Selv om mange studier har fokus på dette, ser det stadig ut til at forskerne er uenige om hvordan denne kunnskapen ser ut og hva den inneholder. En rekke studier fokuserer også på hvordan læreres undervisningskunnskap i matematikk kan utvikles – for eksempel gjennom utdanning – men forholdsvis få studier har undersøkt hvordan lærerkunnskapen påvirker lærernes praksis og elevenes læring. I det følgende presenteres noen sentrale resultater fra disse tre hovedkategoriene av studier. I tillegg til disse tre områdene var det også en del studier som hadde andre fokus. Mange av disse hadde problemstillinger knyttet til hva matematikklærere kan. Siden det ikke var noen nordiske bidrag blant disse studiene, kommenteres ikke denne gruppen av studier eksplisitt her. Når resultatene fra noen enkeltstudier her blir presentert og diskutert, så er målet dels å identifisere noen av de mest sentrale studiene på feltet; samtidig ligger det også et ønske om å løfte fram mindre kjente studier som presenterer interessante funn flere kan ha nytte av å vite om.

Kunnskapens innhold og natur

Blant studiene av kunnskapens innhold og natur kan vi skille ut noen sentrale tematikker. Noen studerer de ulike aspektene eller kategoriene av matematikklæreres kunnskap og undersøker hvordan disse henger

sammen (e.g. McCray & Chen, 2012). Kategoriseringen av læreres undervisningskunnskap i matematikk bygger i stor grad på Shulmans (1986) kategorisering av lærerkunnskap. Da Shulman skilte mellom fagkunnskap ("content knowledge") og fagdidaktisk kunnskap ("pedagogical content knowledge", PCK), var det et teoretisk skille. Senere har forskere utviklet ulike instrumenter for å forsøke å påvise dette skillet empirisk. I COACTIV-prosjektet har for eksempel forskerne undersøkt tyske matematikklærere på ungdomstrinn og videregående skole, og resultatene indikerer et empirisk skille mellom fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap (Krauss et al., 2008). Kvaliteten på resultatene fra disse studiene er tett knyttet til kvaliteten på instrumentene som anvendes for å måle og undersøke lærernes kunnskap.

Som et av de nordiske bidragene innenfor denne gruppen finner vi Bäckman og Attorps (2012) sin studie av hvilken kunnskapsbase førskolelærere trenger for å kunne jobbe målrettet med matematikk i barnehagen. Variasjonsteori blir brukt som teoretisk og analytisk rammeverk i denne studien av kunnskapens innhold og natur (e.g. Runesson, 2006). I studien utforsker de fire svenske førskolelæreres kunnskap ved hjelp av observasjon og intervjuer – uten noe standardisert instrument for å måle kunnskap. Gjennom analyser av to episoder, konkluderer forfatterne med at førskolelærerne trenger matematisk kunnskap om geometriske mønstre, og de løfter også fram betydningen av teoretisk kunnskap om variasjonsteori. Samtidig peker de på at førskolelærerne ikke ser ut til å ha omfattende kunnskap på noen av disse områdene. Studien har noen klare begrensninger, men i og med at det har vært svært få studier av førskolelæreres undervisningskunnskap i matematikk representerer den et viktig bidrag til feltet. Bäckman og Attorps konkluderer med at førskolelærere trenger både matematisk og fagdidaktisk kunnskap, og dette stemmer overens med konklusjonene i McCray og Chen (2012) sin studie fra USA. Til forskjell fra Bäckman og Attorps (2012), gjennomførte McCray og Chen (2012) systematiske testinger av 22 barnehagelærere og 113 barn. De baserte sine konklusjoner på analyser av strukturerte intervjuer med barnehagelærerne, observasjon av undervisningen og testing av barnas læringsutbytte.

En annen gruppe studier fokuserer på sammenhengene mellom læreres undervisningskunnskap i matematikk og oppfatninger om undervisning og læring i matematikk (e.g. Beswick, Callingham & Watson, 2012). I sin studie av 365 norske grunnskolelærere måler Drageset (2010) lærernes kunnskap ved hjelp av en norsk oversettelse av en test utviklet av forskere ved University of Michigan i LMT-prosjektet. Lærernes oppfatninger blir målt ved hjelp av en spørreundersøkelse hvor lærerne skal krysse av for graden av enighet med ulike sett av påstander om matematiske forståelse,

undervisning og læring av matematikk. Gjennom kvantitative analyser av resultatene finner Drageset en sammenheng mellom lærernes fokus på resonnering og deres spesialiserte fagkunnskap i matematikk. Han hevder at lærernes oppfatninger ikke bare henger sammen med kunnskapen deres, men kunnskaper og oppfatninger ser ut til å være faktorer som gjensidig påvirker hverandre. Dette siste funnet stemmer godt overens med resultatene fra Swars et al. (2007) sin studie av 24 amerikanske grunnskolelærerstudenter. I denne longitudinelle studien finner forskerne en positiv sammenheng mellom lærernes undervisningskunnskap i matematikk og deres oppfatninger om undervisning og læring i matematikk. Disse resultatene får Swars og kollegaer ved å bruke samme instrument som Drageset for å måle lærernes undervisningskunnskap i matematikk – i kombinasjon med en rekke standardiserte instrumenter for å måle blant annet oppfatninger om undervisning og læring av matematikk. Newton et al. (2012) ser også en sammenheng mellom lærerstudenters oppfatninger om kvaliteten på egen undervisning og deres undervisningskunnskap i matematikk, men en slik sammenheng finner ikke Swars et al. (2007) i sin studie. En mulig forklaring på disse forskjellene kan være at Newton et al. (2012) bruker et annet instrument for å måle læreres undervisningskunnskap i matematikk enn for eksempel Drageset (2010) og Swars et al. (2007). En annen mulig forklaring kan ligge i regionale og/eller kulturelle forskjeller i læreres og lærerstudenters oppfatninger. Noen studier peker i en slik retning. For eksempel hevder Kim et al. (2011) at lærerutdanningsprogrammer i Sør-Korea ser ut til å være bygd opp fra en underliggende antakelse om at lærerstudentenes matematiske fagkunnskap er anvendbar i praksis, mens tilsvarende programmer i USA i større grad fokuserer på betydningen av praksisbasert kunnskap.

Ofte pekes det på at undervisningskunnskap i matematikk utvikles gjennom erfaring, men noen studier indikerer at det ikke nødvendigvis er noen sammenheng her. For eksempel finner Ng (2011) i en studie av indonesiske matematikklærere at lærerne som har lengst erfaring har lavere undervisningskunnskap i matematikk enn de mer uerfarne lærerne. Han forklarer dette med at mange indonesiske lærere ofte underviser på samme trinn gjennom hele sitt yrkesaktive liv, og han hevder at denne begrensede erfaringen ser ut til å kunne påvirke utviklingen av undervisningskunnskap i matematikk negativt.

Mens Ng (2011) ser på forholdet mellom kunnskap og erfaring, fokuserer Ryve, Nilsson og Mason (2012) på hvordan lærerutdannere synliggjør undervisningskunnskap i matematikk i sine kurs i lærerutdanningen. I likhet med Bäckman og Attorps (2012), bruker også Ryve et al. variasjonsteori som teoretisk rammeverk i sin studie. Når de undersøker

hvordan to lærerutdannere løfter fram undervisningskunnskap i matematikk gjennom variasjon, fokuserer de blant annet på begrepsbruken i kursene. Fokuset på lærerutdannernes rolle er et viktig bidrag, og dette er et bakenforliggende tema av betydning for mange av de studiene som er knyttet til utviklingen av undervisningskunnskap i matematikk.

Utvikling av undervisningskunnskap i matematikk

De studiene som fokuserer på utviklingen av undervisningskunnskap i matematikk kan deles inn i ulike undergrupper. En stor gruppe studier undersøker hva slags lærerutdanning som påvirker utviklingen av slik kunnskap (e.g. Kleickmann et al., 2013) – og her finner vi de to nordiske bidragene. En annen gruppe studier undersøker hva slags etter- og videreutdanning som bidrar til å utvikle denne kunnskapen (e.g. Hill, 2011). Det er også en del studier som undersøker hvordan denne kunnskapen som er spesifikt knyttet til matematikkundervisning utvikles (e.g. Bair & Rich, 2011), og hvilke læremidler eller oppgaver som kan påvirke utviklingen (e.g. Davis, 2009; Karp, 2007).

Blant undersøkelsene av hva slags lærerutdanning som påvirker utviklingen av undervisningskunnskap i matematikk, finner vi artikler fra store prosjekter som TEDS-M, COACTIV og LMT. I en av de sentrale studiene på dette område finner Kleickmann og kollegaer (2013) at tyske lærerstudenter først og fremst utvikler sin fagdidaktiske kunnskap (PCK) i den perioden av studiene hvor de studerer fag på universitetet, og ikke i løpet av praksisperioden. I sin studie av kinesiske lærerstudenter finner Youngs og Qian (2013) indikasjoner på at kurs i tallteori og matematisk resonnering har særlig stor påvirkning på utviklingen av den spesifikke kunnskapen som trengs for å undervise i tall og tallregning. Basert på slike funn kan det være fristende å hevde at lærerutdanningen bør inneholde flere rene matematiske kurs, men svaret ser ut til å være noe mer sammensatt. Youngs og Qian finner nemlig også at erfaring med å lede undervisning i praksis også har positiv innflytelse. I en amerikansk studie forsøker Smith og kollegaer (2012) å bytte ut et metodekurs med et matematisk kurs (i USA skiller en mellom kurs i "content" og "methods"), og dette viser seg ikke å ha noen signifikant effekt på lærerstudentenes utvikling av undervisningskunnskap i matematikk. Her ser det altså ut til at både metodekurs og matematiske kurs er viktige; i enkelte situasjoner kan matematiske kurs ha større betydning enn metodekurs og i andre sammenhenger ser det ut til å være motsatt.

Etter- og videreutdanningskurs ser ikke alltid ut til å ha noen positiv effekt på utviklingen av læreres kunnskap (Hill, 2011). Det fins derimot enkeltstudier som indikerer at bestemte etter- og videreutdanningskurs

kan ha positiv effekt. For eksempel kan Kramarski og Revach (2009) vise til lovende resultater fra kurs som fokuserer på metakognitive ferdigheter. Utfordringen er at disse kursene og etterutdanningstilbudene i liten eller ingen grad er testet ut ved andre utdanningsinstitusjoner eller i andre kontekster. Dermed har en lite grunnlag for å slå fast om det er selve kursene eller andre faktorer som spiller inn. Den samme kritikken kan rettes mot de to nordiske studiene på dette området. Begge disse studiene fokuserer på utviklingen av fagdidaktisk kunnskap. Mens Kleickmann et al. (2013) konkluderer med at fagdidaktisk kunnskap først og fremst utvikler seg gjennom fagstudier i utdanningen og ikke i praksis, fokuserer Nilssen (2010) på hvordan lærerstudenter utvikler fagdidaktisk kunnskap i praksisopplæringen. I sin kvalitative studie av en praksislærers veiledning av fem lærerstudenter, argumenterer Nilssen særlig for at praksislæreren har en sentral rolle som mentor. Hun diskuterer praksislærerenes rolle ut fra begrepet "cognitive apprenticeship". Her vektlegges både det at lærerstudentene lærer hvordan de skal gjennomføre lærerarbeidet av en erfaren ekspertlærer, og samtidig fokuseres det på kognitive og metakognitive prosesser. I den andre nordiske studien på dette området, undersøker Kellner et al. (2011) lærerstudentenes oppfatninger om elevenes kunnskaper, oppfatninger og vansker. De hevder at lærerutdannere må vite om og ta hensyn til lærerstudentenes oppfatninger for å kunne bidra til utvikling av fagdidaktisk kunnskap i utdanningen. Begge disse studiene tar utgangspunkt i Shulmans (1986) begrep "pedagogical content knowledge" når de diskuterer fagdidaktisk kunnskap. I likhet med andre studier på feltet, peker disse to studiene på noen momenter som kan påvirke utviklingen av undervisningskunnskap i matematikk i positiv retning, men mer forskning er nødvendig for å undersøke dette på tvers av lærerutdanningskontekster.

Både når det gjelder grunnutdanning og etter- og videreutdanning av lærere ser det altså ikke ut til at en økning i antallet kurs med standard matematisk innhold er nok (Youngs & Qian, 2013). Derimot ser det ut til å ha betydning for utviklingen av undervisningskunnskap i matematikk at kursene legger til rette for å lære mer matematikk i tett tilknytning til praksis (e.g. Koellner et al., 2007). Studien til Elliot et al. (2009) knytter sammen fokuset på det matematiske innholdet med didaktiske perspektiver på en interessant måte. De kombinerer et rammeverk for sosiale og sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996) med et rammeverk for hvordan lærere kan lede produktive matematiske diskusjoner (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008), og de hevder at forståelse for disse rammeverkene har betydning for utviklingen av den spesialiserte matematiske kunnskapen lærere trenger for å undervise i matematikk.

Faktorer som påvirkes av undervisningskunnskap i matematikk

Blant studiene av hvorvidt/hvordan læreres undervisningskunnskap i matematikk påvirker elevenes resultater og kvaliteten på lærerens praksis finner vi ingen nordiske bidrag i litteraturstudien. Internasjonalt er dette også et område hvor det stadig er mange ubesvarte spørsmål.

Mange hevder at lærernes kunnskap påvirker elevenes prestasjoner, og studien til Hill, Rowan og Ball (2005) blir ofte referert til i denne sammenhengen – selv om studien har noen klare begrensninger som forfatterne selv peker på. Senere studier indikerer imidlertid også på at læreres kunnskap påvirker elevenes resultater (e.g. Shechtman, Roschelle, Haertel & Knudsen, 2010). I sin studie av tyske 10. klassinger og deres lærere, viser Baumert og kollegaer (2010) at det er klare sammenhenger mellom lærernes PCK og elevenes resultater. Overraskende nok er det ikke noen like tydelig sammenheng mellom lærernes matematiske kunnskap ("content knowledge") og elevenes prestasjoner. I en oppfølging av denne studien, viser Kunter et al. (2013) at lærernes PCK ikke bare påvirker elevenes resultater men også deres motivasjon og innstilling til matematikkfaget. Dette funnet kan se ut til å stå i kontrast til andre studiers indikasjoner på sammenhenger mellom lærernes matematiske kunnskap og elevenes resultater (e.g. Hill et al., 2005; Marshall et al., 2009).

Slike tilsynelatende sprikende funn kan ha ulike forklaringer. For eksempel kan det være at den typen kunnskap som kreves for å undervise på lavere trinn skiller seg fra høyere trinn. Videre kan det tenkes at det er viktigere å utvikle den matematiske kunnskapen enn den fagdidaktiske i land der kvaliteten på matematikklærerne generelt er lav. Kaarstein (2014) peker også på at slike forskjeller kan komme av ulike operasjonaliseringer av Shulmans kunnskapskategorier på tvers av studier. På bakgrunn av dette bør en dermed være varsom når en tolker slike funn; det som betegnes som PCK i én studie, kan betegnes som spesialisert matematisk kunnskap i en annen studie.

Selv om resultatene spriker noe, indikerer altså en del studier at det ser ut til å være en sammenheng mellom lærernes kunnskap og elevenes resultater. Så langt har det derimot ikke vært noen studier som gir tydelige svar på hvordan lærernes kunnskap påvirker elevenes resultater, eller hvilke mekanismer som spiller inn i denne prosessen (Hoover et al., 2016).

Forholdet mellom lærerkunnskap og undervisningskvalitet ser også ut til å være sammensatt, og de kvantitative undersøkelsene som er gjennomført gir ikke entydige resultater (e.g. Hill, Umland, Litke & Kapitula, 2012). Enkelte kvalitative studier har derimot avdekket noen interessante sammenhenger som kan være verd å undersøke nærmere. Et eksempel er Charalambous (2010) sin studie av hvordan to lærere velger ut og bruker matematiske oppgaver i undervisningen. Han peker på tre mulige

sammenhenger mellom lærernes kunnskap og kvaliteten på undervisningen. For det første ser det ut til at sterk undervisningskunnskap i matematikk kan hjelpe læreren å bruke representasjoner som støtter elevene i problemløsningsprosessen. Svakere undervisningskunnskap i matematikk kan derimot begrense undervisningen til å fokusere på å huske regler og algoritmer. For det andre hevder Charalambous at sterk undervisningskunnskap i matematikk ser ut til å støtte lærerens evne til å forklare hva som ligger bak bestemte matematiske prosedyrer, regler og algoritmer. For det tredje peker han på at lærerens undervisningskunnskap i matematikk kan hjelpe dem å forstå elevenes tenking og dermed støtte elevenes utvikling av forståelse. Ved siden av å være et godt eksempel på utforsking av hvordan læreres kunnskap påvirker kvaliteten på undervisningspraksis, illustrerer denne studien hvordan læreres undervisningskunnskap i matematikk er knyttet til de matematiske undervisningsoppgavene lærerne møter i matematikkundervisningen (Hoover, Mosvold & Fauskanger, 2014).

Avsluttende diskusjon

De siste årene har stadig flere forskere begynt å interessere seg for læreres undervisningskunnskap i matematikk. I den stadig økende nordiske forskningen på feltet ser vi mange av de samme tendensene som i den internasjonale forskningen. Noen utforsker ulike aspekter ved læreres undervisningskunnskap i matematikk (e.g. Bäckman & Attorps, 2012; Drageset, 2010), mens andre fokuserer mer på hvordan denne kunnskapen utvikles og hvordan lærerutdanning kan bidra til å påvirke denne utviklingen (e.g. Kellner et al., 2011; Nilssen, 2010; Ryve et al., 2012). Stadig er det få studier av hvilken matematisk kunnskap førskolelærere og barnehagelærere trenger for å legge til rette for små barns læring av matematikk, og det er også flere andre aspekter ved denne kunnskapen som må utforskes videre. Kilhamn (2014) sin studie av hvilken matematiske kunnskap lærere trenger for å undervise om variabler i algebra er et eksempel på videreføring av fokuset på de ulike aspektene ved undervisningskunnskap i matematikk i en nordisk kontekst. Et eksempel på videre utforsking av hvordan undervisningskunnskap i matematikk kan utvikles – og undervises – i lærerutdanningen, finner vi i studien til van Bommel (2014). I senere tid har det også vært studier som utforsker hvilken rolle matematikkens historie har i tilknytning til læreres undervisningskunnskap i matematikk (e.g. Smestad, Jankvist & Clark, 2014), og på dette området har nordiske forskere allerede kommet med betydningsfulle bidrag.

Instrumenter for å måle læreres undervisningskunnskap i matematikk har blitt oversatt og tilpasset av ulike norske forskere (e.g. Drageset, 2010; Mosvold, Fauskanger, Jakobsen & Melhus, 2009). Jóhannsdóttir og Gísladóttir (2014) har tatt erfaringene fra slike studier videre når de har oversatt, tilpasset og brukt et tilsvarende instrument blant et stort utvalg av islandske lærerstudenter. I senere tid har også instrumenter for å måle matematisk undervisningskvalitet blitt oversatt og tilpasset i en nordisk kontekst (Opsvik & Skorpen, 2014). Det har også blitt gjennomført studier for å undersøke ulike aspekter ved sammenhengen mellom lærernes kunnskap og hvordan de for eksempel er i stand til å lede matematiske diskusjoner i klasserommet (e.g. Drageset, 2014; Kleve & Solem, 2014). Dette er gode eksempler på hvordan læreres undervisningskunnskap i matematikk har blitt studert i tilknytning til klasseromspraksis. Koblingen mellom lærernes kunnskap og undervisningspraksis har også blitt løftet fram i diskusjoner av de matematiske undervisningsoppgavene lærerne møter og hvordan undervisningskunnskap i matematikk er knyttet til disse undervisningsoppgavene (Hoover et al., 2014). På mange måter ser altså den nordiske forskningen ut til å følge de internasjonale trendene på disse områdene – og i noen tilfeller har nordiske forskere kommet med viktige bidrag – men i likhet med mye av den internasjonale forskningen har også den nordiske forskningen på feltet noen begrensninger.

Flere forskere har oversatt, tilpasset og tatt i bruk instrumenter for å måle læreres undervisningskunnskap i matematikk og den matematiske kvaliteten ved undervisningen i nordiske land (e.g. Mosvold et al., 2009; Opsvik & Skorpen, 2014). Slike studier bygger videre på kunnskap og erfaringer fra andres forskning, og dette er viktig når forskningen skal bygge akkumulert kunnskap på et felt. Med noen få unntak har derimot de fleste anvendelsene av disse instrumentene hatt et lokalt og begrenset preg. Lignende tendenser ser vi også internasjonalt (jf. Hoover et al., 2016), og det ligger et potensiale i å designe mer robuste studier hvor disse instrumentene brukes på større og mer representative utvalg for å studere ulike aspekter ved læreres undervisningskunnskap i matematikk.

Internasjonalt har det blitt gjennomført en rekke studier av hvordan læreres undervisningskunnskap i matematikk kan utvikles gjennom lærerutdanning og etter- og videreutdanning av lærere, men også her har mye av forskningen begrensninger i både design, utvalg og omfang (e.g. Kellner et al., 2011; Nilssen, 2010). Et unntak er store multinasjonale studier som TEDS-M, hvor også nordiske land har vært involvert. Når det gjelder effekten av læreres kunnskap på elevers læring og kvaliteten på undervisningen, så gir den internasjonale forskningen på feltet

forholdsvis klare indikasjoner på at det er en sammenheng (e.g. Hill et al., 2012; Shechtman et al., 2010). Samtidig har det vært mindre fokus på hvordan og hvorfor lærerkunnskapen påvirker elevers læring og kvaliteten på undervisningen (jf. Hoover et al., 2016), og dette er et område hvor de nordiske forskningsmiljøene har muligheter til å komme med betydningsfulle bidrag.

Med sitt tradisjonelt sterke fokus på kvalitativ forskning, teori og kritiske perspektiver – og her er det nok kanskje et skille mellom den amerikanske og europeiske forskningstradisjonen i matematikdidaktikk generelt – har forskere fra de nordiske landene gode forutsetninger for å komme med betydningsfulle bidrag til forskningen på dette feltet. Det er viktig å kunne betrakte forskningen på undervisningskunnskap i matematikk med et kritisk utenfrablakk (e.g. Ng, Mosvold & Fauskanger, 2012), samtidig som en kan gå inn og forsøke å bidra til en positiv videreutvikling av perspektiver innenfra (e.g. Drageset, 2010). Forskere fra de nordiske miljøene har allerede vist vilje og evne til å gjøre begge deler, og da ligger forholdene godt til rette for å kunne utvikle feltet videre på en kritisk og konstruktiv måte.

Acknowledgements

Den strukturerte litteraturstudien som rapporteres fra her ble ledet av Mark Hoover fra University of Michigan og støttet av National Science Foundation, grant DRL-1008317. En stor takk rettes til Mark Hoover og de øvrige deltakerne i dette prosjektet: Arne Jakobsen, Yeon Kim, Minsung Kwon, Lindsey Mann og Rohen Shah.

Referanser

- American Educational Research Association (2006). Standards for reporting on empirical social science research in AERA publications. *Educational Researcher*, 35(6), 33–40.
- Bäckman, K. & Attorps, I. (2012). Teaching mathematics in the pre-school context. *US-China Education Review B*, 1, 1–16.
- Bair, S. & Rich, B. (2011). Characterizing the development of specialized mathematical content knowledge for teaching in algebraic reasoning and number theory. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(4), 292–321.
- Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. I B. Davis & E. Simmt (red.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (s. 3–14). Edmonton: Canadian Mathematics Education Study Group.

- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389–407.
- Baumert, J. et al., (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47 (1), 133–180.
- Beswick, K., Callingham, R. & Watson, J. (2012). The nature and development of middle school mathematics teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 131–157.
- Bommel, J. van (2014). The teaching of mathematical knowledge for teaching – a learning study of primary school teacher education. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19 (3-4), 185–201.
- Charalambous, C. (2010). Mathematical knowledge for teaching and task unfolding: an exploratory study. *The Elementary School Journal*, 110 (3), 247–278.
- Davis, J. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 365–389.
- Depaepe, F., Verschaffel, L. & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: a systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12–25.
- Drageset, O. G. (2010). The interplay between the beliefs and the knowledge of mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, 12 (1), 30–49.
- Drageset, O. G. (2014). Knowledge used when orchestrating mathematical discourses – doing, guiding and requesting. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19 (3-4), 151–168.
- Elliott, R., Kazemi, E., Lesseig, K., Mumme, J. & Kelley-Petersen, M. (2009). Conceptualizing the work of leading mathematical tasks in professional development. *Journal of Teacher Education*, 60 (4), 364–379.
- Fauskanger, J., Bjuland, R. & Mosvold, R. (2010). "Eg kan jo multiplikasjon, men ka ska eg gjørr?" – det utfordrende undervisningsarbeidet i matematikk. I T. Løkensgard Hoel, G. Engvik & B. Hanssen (red.), *Ny som lærer – sjansespill og samspill* (s. 99–114). Trondheim: Tapir Akademisk Forlag.
- Hill, H. C. (2011). The nature and effects of middle school mathematics teacher learning experiences. *Teachers College Record*, 113 (1), 205–234.
- Hill, H.C., Umland, K., Litke, E. & Kapitula, L. (2012). Teacher quality and quality teaching: examining the relationship of a teacher assessment to practice. *American Journal of Education*, 118 (4), 489–519.
- Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42 (2), 371–406.

- Hoover, M., Mosvold, R. & Fauskanger, J. (2014). Common tasks of teaching as a resource for measuring professional content knowledge internationally. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3-4), 7–20.
- Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L. & Lai, Y. (2016). Making progress on mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1-2), 3–34.
- Jóhannsdóttir, B. & Gísladóttir, B. (2014). Exploring the mathematical knowledge of prospective elementary teachers in Iceland using the MKT measures. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3-4), 21–40.
- Kaarstein, H. (2014). A comparison of three frameworks for measuring knowledge for teaching mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(1), 23–52.
- Karp, A. (2007). “Once more about the quadratic trinomial ...”: on the formation of methodological skills. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 405–414.
- Kellner, E., Gullberg, A., Attorps, I., Thoren, I. & Tärneberg, R. (2011). Prospective teachers’ initial conceptions about pupils’ difficulties in science and mathematics: a potential resource in teacher education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 843–866.
- Kilhamn, C. (2014). When does a variable vary? Identifying mathematical content knowledge for teaching variables. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3-4), 83–100.
- Kim, R. Y., Ham, S.-H. & Pain, L. W. (2011). Knowledge expectations in mathematics teacher preparation programs in South Korea and the United States: towards international dialogue. *Journal of Teacher Education*, 62(1), 48–61.
- Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M. et al. (2013). Teachers’ content knowledge and pedagogical content knowledge: the role of structural differences in teacher education. *Journal of Teacher Education*, 64(1), 90–106.
- Kleve, B. & Solem, I. H. (2014). Aspects of a teacher’s mathematical knowledge in his orchestration of a discussion about rational numbers. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19(3-4), 119–134.
- Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Schneider, C., Pittman, M. E. et al., (2007). The problem-solving cycle: a model to support the development of teachers’ professional knowledge. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 273–303.
- Kramarski, B. & Revach, T. (2009). The challenge of self-regulated learning in mathematics teachers’ professional training. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 379–399.
- Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Neubrand, M. et al., (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology*, 100(3), 716–725.

- Kunter, M., Klusmann, U., Baumert, J., Voss, T. & Haeckel, A. (2013). Professional competence of teachers: effects on instructional quality and student development. *Journal of Educational Psychology*, 105 (3), 805–820.
- Marshall, J., Chinna, U., Nessay, P., Hok, U. N., Savoeun, V. et al. (2009). Student achievement and education policy in a period of rapid expansion: assessment data evidence from Cambodia. *International Review of Education*, 55, 393–413.
- McCray, J. S. & Chen, J.-Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, 26, 291–307.
- Mosvold, R., Fauskanger, J., Jakobsen, A. & Melhus, K. (2009). Translating test items into Norwegian – without getting lost in translation? *Nordic Studies in Mathematics Education*, 14 (4), 101–123.
- Newton, J. N., Brian, R. E., Leonard, J. & Eastburn, J. A. (2012). Preservice teachers' mathematics content knowledge and teacher efficacy. *School Science and Mathematics*, 112 (5), 289–299.
- Ng, D. (2011). Indonesian primary teachers' mathematical knowledge for teaching geometry: implications for education policy and teacher preparation programs. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, 39 (2), 151–164.
- Ng, D., Mosvold, R. & Fauskanger, J. (2012). Translating and adapting the mathematical knowledge for teaching (MKT) measures: the cases of Indonesia and Norway. *The Mathematics Enthusiast*, 9 (1&2), 149–178.
- Nilssen, V. (2010). Guided planning in first-year student teachers' teaching. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 54 (5), 431–449.
- Opsvik, F. & Skorpen, L. B. (2014). Matematisk kvalitet i undervisning. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19 (3-4), 101–117.
- Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8 (3), 255–281.
- Runesson, U. (2006). What is possible to learn? On variation as a necessary condition for learning. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 50 (4), 397–410.
- Ryve, A., Nilsson, P. & Mason, J. (2012). Establishing mathematics for teaching within classroom interactions in teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 81 (1), 1–14.
- Shechtman, N., Roschelle, J., Haertel, G. & Knudsen, J. (2010). Investigating links from teacher knowledge, to classroom practice, to student learning in the instructional system of the middle-school mathematics classroom. *Cognition and Instruction*, 28 (3), 317–359.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4–14.

- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1–23.
- Smestad, B., Jankvist, U. T. & Clark, K. (2014). Teachers' mathematical knowledge for teaching in relation to the inclusion of history of mathematics in teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19 (3-4), 169–183.
- Smith, M. E., Swars, S. L., Smith, S. Z., Hart, L. C. & Haardörfer, R. (2012). Effects of an additional mathematics content course on elementary teachers' mathematical beliefs and knowledge for teaching. *Action in Teacher Education*, 34 (4), 336–348.
- Speer, N. M. & Wagner, J. F. (2009). Knowledge needed by a teacher to provide analytic scaffolding during undergraduate mathematics classroom discussions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (5), 530–562.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, P. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematics Teaching and Learning*, 10 (4), 313–340.
- Swars, S., Hart, L.C., Smith, S.Z., Smith, M.E. & Tolar, T. (2007). A longitudinal study of elementary pre-service teachers' mathematics beliefs and content knowledge. *School Science and Mathematics*, 107 (8), 325–335.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458–477.
- Youngs, P. & Qian, H. (2013). The influence of university courses and field experiences on Chinese elementary candidates' mathematical knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 64 (3), 244–261.

Reidar Mosvold

Reidar Mosvold er professor i matematikdidaktikk ved Universitetet i Stavanger, Norge. Hans forskningsinteresser omfatter læreres undervisningskunnskap i matematikk, læreres oppfatninger, læreridentitet og diskursive perspektiver, samt bruk av matematikkens historie i undervisningen.

reidar.mosvold@uis.no

Abstract

In recent decades, researchers have shown an increasing interest in the mathematical knowledge that is specific to the work of teaching mathematics. In this article, Nordic contributions to this field are discussed in light of international research trends. The discussions draw upon results from a literature review of 190 empirical articles that were published in 2006–2013. In addition, Nordic studies that have been published after this are included in the discussion. Some of the studies focus on the nature and composition of this knowledge, other studies focus on the development of this knowledge, whereas a third group of studies focus on how teachers' knowledge contributes to student learning and the quality of instruction. Further Nordic research in this field might contribute to strengthening theoretical perspectives and connections to practice.

