

Matematikundervisning för begåvade elever – en forskningsöversikt

ATTILA SZABO

Artikeln redovisar de huvudsakliga pedagogiska och organisatoriska metoder relaterade till begåvade elevers matematikundervisning som fokuseras i forskningslitteraturen – även könsskillnader, motivation och matematiskt begåvade elevers sociala situation i klassrummet diskuteras. Översikten visar att det finns åtgärder – t ex frivillig acceleration i ämnet där undervisningen är anpassad till elevens förkunskaper och kapacitet eller arbete med utmanande uppgifter i prestationshomogena grupper – som antas ha goda effekter på begåvade elevers kunskapsutveckling i matematik. Analysen visar också att det kan uppfattas som problematiskt att vara begåvad i matematik samt att begåvade flickor upplever vissa aspekter av matematikundervisningen annorlunda jämfört med motsvarande grupp pojkar.

Undervisning av matematiskt begåvade elever innebär särskilda utmaningar för skolsystemet (t ex Rogers, 2007; Pettersson, 2011) och den relativt stora mängden pedagogiska och organisatoriska metoder vars syfte är att stimulera dessa elevers kunskapsutveckling medför att lärarna är osäkra på vilka metoder som bäst lämpar sig för den egna praktiken (t ex Leikin, 2010; Lester & Schroeder, 1983; Reed, 2004; Rogers, 2007; Rotiger & Fello, 2005). Studier har också visat att brist på anpassad undervisning leder till att en betydande andel begåvade elever presterar långt under sina förmågor, men om undervisningen anpassas till dessa elevers behov, så kommer de att prestera i nivå med sin potential (t ex Webb et al., 2004).

Trots ett både internationellt och nationellt ökat intresse för begåvade elever (t ex Leikin, Paz-Baruch & Leikin, 2013; Skolverket, 2015) har den övervägande delen av forskningen om elevers matematiska prestationer hittills fokuserat lågpresterande elever (t ex Swanson & Jerman, 2006) och det är endast en liten andel studier som har observerat matematiskt begåvade elevers lärande (Leikin, 2010; Sowell, 1993) eller deras studiesituation och förmågor (Mattsson, 2013; Pettersson, 2011).

Attila Szabo

Stockholms Universitet

En konsekvens av detta är att i skrivande stund (sommaren 2015) finns det ingen aktuell forskningsöversikt om begåvade elevers situation i matematikklassrummet.

Teoretisk bakgrund

Allmän begåvning

De flesta begrepp som förklarar utomordentliga prestationer härrör ur vardagsspråket och är intimt förknippade med termerna *begåvning*, *förmåga* och *talang* (tex Bloom, 1985; Mönks & Ypenburg, 2009; Stoeger, 2009; Ziegler, 2005).

Försöken att definiera allmän begåvning har inledningsvis, och under större delen av 1900-talet, dominerats av psykometriska modeller som grundar sig i antagandet att begåvning är medfödd och förhållandevist statisk under individens livstid (tex Mönks & Ypenburg, 2009; Stoeger, 2009). Inom psykometrin fastställs begåvning med hjälp av intelligens-tester som resulterar i individens intelligenskvot (IQ). Kritiken mot psykometriska modeller, så kallade *färdighetsmodeller*, blev omfattande mot 1900-talets slut (tex Mönks & Ypenburg, 2009; Stoeger, 2009). En del av kritiken grundar sig i observationen att individen uppvisar tydliga svängningar i IQ mellan 6 och 18 års ålder (Weinert, 1998) vilket strider mot uppfattningen att IQ ändras endast marginellt under individens livstid. Ytterligare kritik mot dessa modeller framfördes när det har visat sig att socioekonomisk bakgrund är minst lika betydelsefull för framtida topprestationer som IQ är (tex Mönks & Ypenburg, 2009; Stoeger, 2009; Ziegler, 2005).

Moderna definitioner av begåvning, s.k. *flerfaktorsmodeller*, bygger på Renzullis (1978) "three-ring concept" och grundar sig i antagandet att begåvning är utvecklingsbar, dvs den beror inte endast på medfödda förmågor. Byggstenarna i Renzullis modell är *intellektuella förmågor*, *kreativitet* och *uthållighet*. Modellen utvecklades sedan av Sternberg (1998) som ytterligare differentierade förmågor genom att kategorisera dem som *analytiska*, *kreativa* och *praktiska*.

Vidareutvecklingar av Renzullis och Sternbergs idéer representeras framför allt av den triadiska interdependensmodellen (Mönks & Ypenburg, 2009) och av aktiotop-modellen (Ziegler, 2005). Gemensamt för dessa modeller är att de tillägnar stor betydelse åt miljöbetingelser och betraktar prestationsförmåga som ett samspel mellan en mångfald av komponenter. Ziegler (2005) betonar att vägen till excellent prestationsförmåga är lång och mödosam samt föreslår att IQ-tester som prognostiserande verktyg ersätts av individens tidiga prestationer.

Forskningslitteraturen indikerar dels att det varken finns enhetliga eller tillfredsställande definitioner av begreppen förmåga, talang, begåvning och särbegåvning, dels att dessa begrepp ofta används som synonymer (tex Csikszentmihalyi & Robinson, 1986; Mönks & Ypenburg, 2009; Stoeger, 2009). Problematiken beror framför allt på att tillhörande definitioner är teoretiska konstruktioner som endast gäller under angivna förutsättningar.

I denna artikel kommer jag att huvudsakligen använda begreppet *begåvad*, som i det här fallet inkluderar även begreppen *sär-begåvad* (Persson, 1997) och *särskilt begåvad* (Skolverket, 2015) som är vedertagna svenska benämningar av individer med utomordentlig prestationsförmåga.

Matematisk förmåga

Vår medfödda förmåga att uppskatta storheter är ytterst begränsad (Dehaene, 1997) men en aktiv kontakt med matematiken kan, under gynnsamma förhållanden, leda till strukturerade och välutvecklade matematiska förmågor (tex Krutetskii, 1976). Och eftersom matematiken inte är ett ämne som kan avgränsas med avseende på tillräckliga och nödvändiga komponenter, så finns det ingen enhetlig terminologi för de förmågor som betraktas som matematiska (tex Csikos & Dobi, 2001).

Trots denna uppenbara begränsning, har forskare länge försökt att definiera matematiska förmågor. En historisk tillbakablick visar att redan 1894 konstaterade Calkins – baserat på intervjuer med Harvard-studenter – att matematiker formar konkreta minnen, att det inte finns skillnader i förmågan att memorera information mellan matematiker och övriga studenter och att, när det gäller matematiska aktiviteter, så finns det inga signifikanta skillnader mellan män och kvinnor. Vidare noterade hon att identifiering och jämförelse av information samt logiskt resonemang är nödvändiga mentala operationer i matematiska sammanhang (Calkins, 1894). I början av 1900-talet – beroende framför allt på tidsperiodens dominerande psykometriska angreppssätt – var forskarsamfundets ansträngningar i att definiera matematiska förmågor inte helt lyckade (Krutetskii, 1976). Senare, i takt med att psykometriska metoder ersattes av sociokulturella ansatser, började även medfödda förmågor betraktas som utvecklingsbara egenskaper – detta ledde till modernare definitioner av matematisk förmåga.

Den hittills mest betydande studien inom området genomfördes av Krutetskii (1976) som mellan 1955 och 1966 observerade cirka 200 elever. Krutetskii's analys av elevernas matematiska aktiviteter leder till en komplex och dynamisk modell av matematisk förmåga, med

följande komponenter: a) förmågan att insamla och formalisera matematisk information, b) förmågan att bearbeta matematisk information och c) förmågan att minnas matematisk information – dessa komponenter resulterar i en mer allmän och sammansatt förmåga, som manifesteras i ett matematiskt sinnelag (Krutetskii, 1976, s 350–351, min översättning). Nyare modeller av matematiska förmågor påminner i deras byggstenar om Krutetskii's modell men är mer detaljerade med avseende på ingående komponenter (tex Juter & Sriraman, 2011; Sheffield, 2003).

Matematiskt begåvade elever

Begåvade elevers matematiska förmåga (oavsett vilken modell man utgår ifrån) utgör inte en statisk uppsättning med avseende på dess komponenter, dvs mindre välutvecklade förmågor kompenseras i stor utsträckning av förmågor som är mer utvecklade (tex Krutetskii, 1976; Sheffield, 2003). Detta – i kombination med att god matematisk förmåga framförallt bör betraktas som en potential för höga prestationer (tex Brandl, 2011, Leikin, 2010) – leder till slutsatsen att matematiskt begåvade elever utgör en divergent grupp som inte kan identifieras med enkla metoder (tex Mattsson, 2013; Pettersson, 2011).

Att identifiera matematiskt begåvade elever är ett nödvändigt steg inför de insatser som ska riktas mot dem, men identifieringen är beroende av de metoder som används i detta syfte (tex Gyarmathy, 2013; Rotiger & Fello, 2005). Alltså är risken uppenbar att en del av de begåvade eleverna förblir oidentifierade och därmed går miste om möjligheten att utvecklas (Rotiger & Fello, 2005). Därför föreslår Rotiger och Fello att man inte endast tittar på elevens betyg i ämnet eller resultat på diverse tester – även om eleven är bland de absolut högst presterande, så behövs det ytterligare utredning för att avgöra om eleven är matematiskt begåvad. Vidare anser de att i en optimal identifieringsprocess bör man rådgöra med elevens lärare samt även ta hänsyn till elevens sociala och känslomässiga utveckling. I sammanhanget bör det också nämnas att i ett längre tidsperspektiv inte finns entydiga samband mellan matematisk begåvning och prestationer i ämnet, dvs elevens tidiga resultat i matematik behöver inte vara avgörande för dennes senare prestationer (Juter & Sriraman, 2011).

Slutligen bör det noteras att terminologin för matematisk begåvning, i likhet med terminologin för allmän begåvning, består av ett antal begrepp som används likvärdigt inom fältet, tex i den engelskspråkiga litteraturen används ofta begreppen *mathematically gifted*, *mathematically talented* och *high-ability students* som synonymer (tex Sowell, 1993; Stoeger, 2009).

Studiens syfte

Inledningsvis nämndes det att trots ett ökat intresse för begåvade elevers lärande, så finns det förhållandevis lite information om dessa elevers situation i matematikklassrummet. Dessutom indikerar den presenterade teoretiska bakgrunden att lärare finner det problematiskt att undervisa matematiskt begåvade elever. Följaktligen är syftet med denna artikel att undersöka följande frågeställning:

Vilka pedagogiska och organisatoriska metoder rekommenderas i samband med begåvade elevers kunskapsutveckling i matematik i forskningslitteraturen och vad finns det för empiriska belägg för dessa metoder?

Metod

För att besvara frågeställningen, har jag med hjälp av kvalitativ innehållsanalys, inspirerad av Graneheim och Lundman (2004) samt van Leeuwen (2005), analyserat innehållet i vetenskapliga artiklar som behandlar begåvade elevers kunskapsutveckling i matematik eller redovisar pedagogiska och organisatoriska metoder i samband med dessa elevers kunskapsutveckling i matematik.¹

För att hitta lämpliga texter, men även för att reducera risken att missa relevanta artiklar, har jag använt följande metod:

- Med hjälp av den internetbaserade söktjänsten EBSCO Discovery Services (EDS) har jag sökt artiklar om matematikundervisning för begåvade elever i de mest refererade vetenskapliga tidskrifterna som fokuserar på begåvning i skolkontext. Dessa är *Gifted Child Quarterly*, *Gifted Education International*, *High Ability Studies*, *Journal for the Education of the Gifted*, *Roeper Review* och *The Journal of Secondary Gifted Education*. I dessa tidskrifter sökte jag efter artiklar som innehåller någon av termerna "mathematics", "mathematics education", "math education" och "mathematical problem solving". Sökningen genererade ca 3 000 artiklar publicerade mellan 1953 och 2014.
- Med hjälp av EDS har jag sökt artiklar om matematiskt begåvade elever i undervisningssammanhang, som publicerats mellan 1966 och 2014, i *alla vetenskapliga tidskrifter* sökbara via EDS. I denna sökning användes sökorden "mathematically gifted" och "mathematically talented". Sökningens resultat har begränsats till artiklar som är vetenskapligt granskade, dvs "peer reviewed". Sökningen genererade ca 1 100 artiklar.

- Jag har även sökt artiklar om begåvade elevers matematikundervisning och sociala situation i matematikklassrummet i de mest refererade antologierna inom forskningsfältet mellan 2005 och 2014 (tex Johnsen & Kendrick, 2005; Sriraman & Lee, 2011). Denna sökning resulterade i 28 artiklar.

Analys

I analysens första fas har jag läst igenom alla abstracts till ovannämnda artiklar och valt ut de texter som fokuserar begåvade elevers kunskapsutveckling i matematik eller redovisar pedagogiska och organisatoriska metoder i samband med dessa elevers kunskapsutveckling.

Artiklar som gallrats bort i den första fasen behandlar bl.a. följande teman: föräldrars eller kursplanens betydelse, barn i förskoleålder, vuxna individer som är matematiskt begåvade, studenter i eftergymnasial utbildning, utvecklingsprogram och andra åtgärder som är riktade mot lärare eller lärarstudenter samt elevers utveckling och prestationer i andra ämnen än matematik. Efter denna granskning reducerades antalet artiklar till ca 180, den äldsta från 1953 och den mest aktuella från augusti 2014.

I analysarbetets andra fas har jag, med hjälp av kvalitativ innehållsanalys (tex Graneheim & Lundman, 2004; van Leeuwen, 2005) analyserat innehållet i de ca 180 artiklarna. Kvalitativ innehållsanalys handlar om att *identifiera, koda* och *kategorisera* grundläggande mönster i det empiriska innehållet och kan genomföras på olika abstraktionsnivåer. Syftet med analysen var att identifiera de innehållsliga områden som texterna kunde delas in i med avseende på begåvade elevers kunskapsutveckling i matematik samt pedagogiska och organisatoriska metoder kopplade till detta. Efter i genomsnitt tre noggranna genomläsningar av varje artikel kunde innehållet delas in i relativt distinkta innehållsliga områden – detta kan betraktas som en grövre indelning av texternas innehåll.

I analysen tredje fas, efter en mer djupgående innehållsanalys av texterna i de relativt distinkta innehållsliga områdena, identifierades ett antal mer välvgränsade pedagogiska och organisatoriska områden i materialet. Resultatet av analysprocessen återges i nästa avsnitt.

Resultat

I analysens andra fas kunde innehållet i de ca 180 texterna, delas in i följande relativt distinkta innehållsliga områden:

- Begåvade elevers *prestationer* i matematik.²
- Begåvade elevers *sociala situation* i skolan samt *könskillnader* mellan dem.³

- *Lärarnas uppfattning* om begåvade elever i matematikklassrummet.⁴
- *Definition* och *identifiering* av matematisk begåvning samt nationella program för matematiskt begåvade elever.⁵
- Begåvade elevers *motivation* och *kognitiva förmågor*.^{6,7}

Under denna fas av analysen bestämde jag mig för att inte fördjupa mig i definition och identifiering av matematisk begåvning, eftersom den problematiken inte överensstämde med syftet för denna studie – artiklar som hörde till dessa områden valdes bort inför det fortsatta analysarbetet.

Det var också under denna fas av innehållsanalysen som det blev tydligt att innehållet i flertalet artiklar som hörde till de fyra övriga innehållsliga områdena – dvs begåvade elevers *prestationer* i matematik, deras *sociala situation* i skolan och *könskillnader* mellan dem, *lärarnas uppfattning* om begåvade elever samt begåvade elevers *motivation och kognitiva förmågor* – kunde delas in i mer välvägränsade pedagogiska och organisatoriska områden. Till exempel, en övrig del av artiklarna som behandlar elevers prestationer kunde placeras i mer välvägränsade pedagogiska och organisatoriska områden, som t ex begåvade elever i det *heterogena* matematikklassrummet (t ex Dimitriadis, 2012; Leikin, 2010, 2014; Reed, 2004; Rogers, 2007; Rotiger & Fello, 2005; Tucker, 1982), *acceleration* av begåvade elever (t ex Sowell, 1993; Threlfall & Hargreaves, 2008), *nivågrupperingar* av begåvade elever (t ex Dimitriadis, 2012; George, 1976; Preckel et al., 2010; Sowell, 1993) och begåvade elevers *attityder till olika arbetssätt* (t ex Hunt, 1996; Li & Adamson, 1992; Preckel et al., 2010; Robinson, 1990; Sowell, 1993). På liknande sätt kunde även innehållet i övriga, relativt distinkta områden kopplas till nya välvägränsade områden, t ex kunde artiklarna som handlar om könskillnader mellan begåvade elever knytas både till området som behandlar elever i det heterogena matematikklassrummet (t ex Hong & Aquí, 2004; Li & Adamson, 1992; Schober et al., 2004) samt till området som omfattar begåvade elevers attityder till olika arbetssätt (t ex Freeman, 2004; Stutler, 2005).

Slutligen, i innehållsanalysens tredje fas, strukturerades forskningsfältets syn på pedagogiska och organisatoriska metoder kopplade till begåvade elevers kunskapsutveckling ytterligare genom att identifiera följande välvägränsade områden:

- Begåvade elever i det *heterogena* matematikklassrummet
- *Acceleration* av begåvade elever
- *Nivågrupperingar* av begåvade elever
- Begåvade elevers *attityder till olika arbetssätt*

I referenslistan till denna artikel har jag, av utrymmesskäl, valt att ange endast ett urval av artiklar som hör till dessa fyra områden – således innehåller listan 47 av de ca 180 artiklarna från den första fasen.

Begåvade elever i det heterogena matematikklassrummet

Uttrycket "heterogent klassrum" beskriver den vanligast förekommande indelningen av elever i skolan, dvs klasser där flickor och pojkar i samma åldersgrupp presterar på olika nivåer. De studerade texterna visar att det oavsett skolsystem är en stor utmaning för den enskilde läraren att ta hand om begåvade elever i det heterogena matematikklassrummet (tex Reed, 2004; Rotiger & Fello, 2005). Detta beror på att undervisningen bör differentieras för att kunna utmana och bemöta dessa elever, oberoende av lärarens undervisningsmetod och gruppens prestationsnivå (tex Dimitriadis, 2012; Leikin, 2010, 2014; Reed, 2004; Rogers, 2007; Rotiger & Fello, 2005; Tucker, 1982).

När det gäller det allmänna bemötandet i klassrummet, så värdesätter begåvade elever om läraren:

- positivt *uppmärksammar* dem,
- *förväntar sig* att eleverna *arbetar hårt*,
- *älskar matematiken*,
- *uppmuntrar* eleverna att använda sin *fantasi*,
- uppmunar till *strukturerat och kritiskt tänkande* och
- är *fördomsfri* samt *gläds sig* åt elevernas framgångar (tex Leikin, 2010, 2014).

I sammanhanget bör det också nämnas att Leikin (2010) rekommenderar att alla matematiklärare anpassar sin undervisning till ovanstående riktlinjer, oavsett vilka elever de undervisar. När det gäller undervisningens utformning i det heterogena klassrummet, rekommenderas följande åtgärder:

- *differentierade instruktioner*, som även kan inkludera *snabbare arbetstempo*,
- *flexibla grupperingar i klassrummet* beroende på uppgifternas svårighetsgrad eller elevers prestationsnivå,
- tillgång till *mentor*er för begåvade elever och

- *teknologi* som erbjuder möjligheter att utforska komplexa matematiska frågeställningar (Rotiger & Fello, 2005).

Och med avseende på differentierade instruktioner, föreslås det att läraren:

- *modifierar* de uppgifter som presenteras, dvs anpassar dem till elevernas behov,
- använder *öppna matematiska problem* som eleverna kan lösa på sin egen prestationsnivå och
- utmanar eleverna genom *fördjupning i ett matematiskt område* som de är intresserade av (Reed, 2004).

Vidare bör det nämnas att trots att lärare upplever att det är meningsfullt att arbeta med differentierade instruktioner (Hootstein, 1998), och att matematiklärare anser att de har tillräckligt hög kompetens för att använda differentierade instruktioner i det heterogena klassrummet (Shayshon et al., 2014), så är det ovanligt att lärare använder sådana instruktioner i sin undervisning (Schumm & Vaughn, 1991).

Noteras bör också att effekterna av de flesta av ovanstående rekommendationer inte är empiriskt undersökta i klassrummet, dvs Leikin (2010), Rogers (2007) likväl som Rotiger och Fello (2005) baserar sina rekommendationer på en översikt av forskningslitteraturen, Shayshon et al. (2014) har genom enkätundersökningar tagit reda på lärares upplevelser, medan Tucker (1982) bygger sin artikel på erfarenheten av att ha arbetat med lärare som undervisar begåvade elever. Reed (2004) undersöker de rekommenderade metodernas effekt empiriskt på en enda elev, som hon själv undervisar, och noterar att eleven arbetar exemplariskt men förblir omotiverad efter att ha arbetat enligt rekommendationerna. Reed antar att detta beror på att eleven – som gick i nionde klass – har fått dessa utmaningar i för liten omfattning och alldeles för sent under sin skoltid. Och i sammanhanget bör det understrykas att Dimitriadis (2012) finner empiriska belägg för att differentierad undervisning för matematiskt begåvade elever i heterogena klassrum har färre positiva effekter på dessa elevers kunskapsutveckling än undervisning för homogena grupper av begåvade elever utanför klassrummet, s.k. "pull-out grouping".

När det gäller *könsskillnader* i heterogena klassrum, visar Li och Adamsons (1992) studie att begåvade pojkar föredrar individuellt och tävlingsinriktat arbete istället för arbete i heterogena grupper, medan flickor föredrar individuellt arbete framför arbete i heterogena grupper eller tävlingsinriktade arbetssätt. Vidare noterar både Hong och Aqui (2004), samt Schober, Reimann och Wagner (2004) att matematiskt begåvade flickor på gymnasiet anstränger sig mer än motsvarande grupp pojkar.

Avslutningsvis bör det nämnas två studier som empiriskt har undersökt begåvade elevers *sociala situation* i det heterogena klassrummet. En studie (Händel et al., 2013) som fokuserade gymnasieelever, visar att matematiskt begåvade elever uppfattas som mer intelligenta och samvetsgranna men mindre socialt orienterade, dvs mindre sällskapliga, än elever som är begåvade i språk eller idrott – detta ses som en delförklaring till att elevers drivkraft för att uppnå goda resultat i matematik är relativt liten. Även Coleman och Cross (2014) bekräftar den sociala stigmatiseringen genom att betona att eleverna själva upplever att det är ett socialt handikapp att vara begåvad i matematik eller naturvetenskap. För att balansera den upplevelsen, försöker dessa elever att minimalisera effekterna av deras begåvning i interaktionen med deras kamrater. Som en följd av detta, för att undvika den negativa påverkan av de stereotypiska drag som matematisk begåvning är förknippad med, rekommenderas det att matematiskt begåvade elever undervisas i prestationshomogena grupper (Coleman & Cross, 2014).

Acceleration

Acceleration inom ämnet, dvs att eleven läser avancerade kurser för sin ålder, är en metod som ofta diskuteras i samband med begåvade elever. Det som kännetecknar acceleration i matematik är att eleven deltar i den ordinarie undervisningen i det heterogena klassrummet men, utöver det, studerar matematikkurser som är avsedda för äldre elever.

I en forskningsöversikt redovisar Sowell (1993) resultat från 14 empiriska studier som fokuserar acceleration i matematik för begåvade elever. I 13 av dessa studier har eleverna både lärt sig ämnet mycket snabbare och höjt sina resultat efter att ha deltagit i acceleration. De refererade studierna inkluderar elever från årskurs 7 till årskurs 12 och belyser acceleration både inom och utanför det vanliga skolsystemet, som t ex sommarskolor eller insatser som koordineras av högskolor. Sowell antyder också att dessa accelerationsprogram inte var längre än ett läsår eller ett sommarlov och omfattade enstaka matematikkurser. Och i sammanhanget är det viktigt att nämna att eleverna som deltog i de refererade programmen var utvalda med hjälp av diagnostiska tester samt att både innehåll och undervisning var anpassade till deltagarnas förkunskaper. Den enda studien bland dessa som inte kunde påvisa att acceleration leder till förbättrade resultat, observerade elever som deltog i en sommarkurs för begåvade sjundeklassare.

Men det bör också poängteras att Sowell använder uttrycket "mathematically gifted" när hon beskriver deltagarna i dessa studier och nämner att de kan betraktas som "those who are precocious or those who engage in qualitatively different mathematical thinking" (Sowell, 1993, s124).

Med den differentieringen konstaterar Sowell att acceleration av elever som är "precocious", dvs tidigt utvecklade, har nästan uteslutande positiva effekter. I analysen nämns det dock att det inte är säkert att acceleration passar för alla begåvade elever – Sowell (1993) poängterar att det inte finns empiriska belägg för att acceleration är en effektiv metod när det gäller elever som uppvisar kvalitativa skillnader i sitt tänkande, dvs "those who engage in qualitatively different thinking" (Sowell, 1993, s 128) dock utan att precisera närmare vilket sorts tänkande beskrivningen syftar på. Sowell påpekar också att när acceleration kombineras med fördjupande studier i ämnet, så kan det leda till synergieffekter: elever från årskurs 7 och 8 som var identifierade som matematiskt begåvade och deltog i ett sådant kombinationsprogram lärde sig gymnasiematematiken snabbt, blev bättre på att organisera sina studier, samt fick bättre självkänsla och självförtroende.

Antagandet att begåvade elever bör betraktas som "precocious", dvs tidigt utvecklade, stöds i hög grad av Threlfall och Hargreaves (2008) som undersökte elevers matematiska problemlösning. I studien jämfördes 475 begåvade 9-åringar med 230 genomsnittligt presterande 13-åringar – problemen som eleverna löste var speciellt framtagna för matematiskt begåvade 9-åringar. Analysen visar att det inte fanns nämnvärda kvalitativa skillnader mellan de två elevgruppernas problemlösningsmetoder eller mellan gruppernas "rätt svar" frekvenser. Därmed antyder studien att yngre begåvade elever framför allt bör betraktas som tidigt utvecklade och i det perspektivet kan acceleration vara lämplig för deras utveckling (Threlfall & Hargreaves, 2008).

I sammanhanget bör det också lyftas att både Leikin (2010) och Rogers (2007) betonar att matematiskt begåvade elever bör möta någon form av acceleration under sin skolgång för att till fullo kunna utveckla sin potential. Och George (1976) redovisar två empiriska studier där matematiskt begåvade niondeklassare i USA har deltagit i accelerationsprogram som har lett till att eleverna i ett avsevärt snabbare tempo har fördjupat sina kunskaper i matematik. George påpekar dock att framgången berodde till stor del på att deltagande elever var noggrant utvalda med hjälp av matematiska tester, deltog frivilligt i accelerationen och genomförde sina arbetsuppgifter samvetsgrant.

Avslutningsvis bör det nämnas två artiklar som framför delade uppfattningar om accelerationens effekt på begåvade elever. Lester och Schroeder (1983) undviker att rekommendera acceleration istället för fördjupande aktiviteter och påpekar att undervisningen bör innehålla både acceleration och ämnesfördjupning. Detta baserar de på Krutetskiis (1976) observation att matematiskt begåvade elever lär sig snabbare än sina klasskamrater och blir snabbt uttråkade av rutinmässiga aktiviteter. Tucker (1982) menar – utan att hänvisa till empiriska data – att

acceleration framför allt används för lärarens skull, dvs för att avlasta läraren genom att flytta begåvade elever utanför det heterogena klassrummet. Hans farhåga är att acceleration inte utvecklar dessa elevers matematikkunnskap och nämner att acceleration passar för en mindre andel begåvade elever, utan att precisera vilken sorts elever det syftas på.

Nivågrupperingar

En organisationsmodell som det diskuteras i det analyserade materialet är nivågruppering av begåvade elever. Nivågrupperingar kan göras enligt olika kriterier, tex kan termen syfta till *allmänna nivågrupperingar* som grundar sig i elevernas allmänna prestationer i skolan eller till *prestationshomogena grupper* för matematiskt begåvade elever, som får särskild undervisning utanför det heterogena klassrummet (tex Dimitriadis, 2012; George, 1976; Preckel, Götz & Frenzel, 2010; Sowell, 1993).

Sowells (1993) forskningsöversikt antyder att matematiskt begåvade grundskoleelever som studerar i prestationshomogena grupper under minst ett års tid presterar avsevärt bättre än motsvarande elever som studerar i heterogena klassrum. Förklaringen till de begåvade elevernas högre prestationer är att eleverna får goda möjligheter till att knyta sociala band och att de utmanas av deras matematiskt begåvade kamrater i den prestationshomogena gruppen. Och när det gäller innehållet i de matematiska problem som dessa elever bör arbeta med, noterar Tretter (2005), att begåvade gymnasieelever i prestationshomogena grupper föredrar problem som:

- har mer fokus på *varför* man gör något istället på *hur* man gör det,
- har *mer djup* och *mindre bredd*, samt
- är *mer utmanande*.

Vidare rekommenderar Dimitriadis (2012), baserad på empiriska resultat, att dessa elevgrupper undervisas av matematiklärare med god ämneskompetens som, om det är möjligt, är utbildade för att undervisa begåvade elever.

I sammanhanget kan det uppfattas som meningsfullt att nämna en studie (Shayshon et al., 2014) som, genom att ta reda på matematiklärares upplevelser i Israel, Sydkorea och USA, visar att lärares önskan att bilda prestationshomogena grupperingar för matematiskt begåvade elever är kulturellt betingat, dvs lärare i Israel och Sydkorea vill i högre grad bilda grupper för dessa elever jämfört med sina kolleger i USA.

I en annan studie (Preckel et al., 2010) undersöktes hur begåvade gymnasieelevers akademiska självkänsla i matematik, dvs den egna upplevelsen om prestationen i ämnet, påverkas av allmänna nivågrupperingar, som tex särskilda gymnasieprogram för begåvade elever. Författarna konstaterar att när begåvade elever börjar studera i högpresterande grupper, så blir de osäkra på sig själva och på sina matematiska kunskaper. Detta beror på att eleverna upplever att de plötsligt måste umgås med elever som är minst lika begåvade som de själva. Den försämrade akademiska självkänslan i matematik var mest påtaglig under de första tio veckorna, men berodde inte på betygen (eftersom de inte fick betyg under den tidsperioden). Det bör också noteras att elevernas akademiska självkänsla förbättrades efter den inledande perioden, därför är författarnas rekommendation att begåvade elever bör få ett tryggt bemötande och positiv uppmärksamhet vid allmänna nivågrupperingar.

Avslutningsvis bör det poängteras att *långvarig allmän nivågruppering* tycks ha negativa effekter på grundskoleelever som hamnar i de högpresterande grupperna, där även matematiskt begåvade elever antas placeras (tex Boaler, Wiliam & Brown, 2000). En studie (Boaler et al., 2000) som följde 943 grundskoleelever vid sex olika skolor i Storbritannien – i fyra av de sex observerade skolorna bildades allmänna nivågrupperingar, dvs "ability groups or 'sets'" (Boaler et al., 2000, s 631) – visar att lärarna använde färre undervisningsmetoder för de högpresterande grupperna jämfört med lärare som undervisade i heterogena klassrum. Författarna poängterar att den mer enformiga undervisningen i kombination med det höga tempot för matematikkursen i de högst presterande grupperna påverkade elevernas förståelse av ämnet negativt. Författarna nämner också att en tredjedel av eleverna – mestadels flickor – i dessa grupper kände sig stressade över att ha blivit klassificerade som högpresterande och hade svårt att leva upp till förväntningarna som klassificeringen förde med sig.

Begåvade elevers attityder till olika arbetssätt

Flera studier visar att matematiskt begåvade elever presterar väl i prestationshomogena grupper och samarbetar gärna med elever som är på samma kunskapsnivå som de själva är (tex Coleman & Cross, 2014; George, 1976; Hunt, 1996; Preckel et al., 2010; Sowell, 1993). Följdfrågan blir naturligtvis om det finns några organiserade arbetssätt som dessa elever föredrar. Det är framför allt två arbetssätt som har undersökts empiriskt i det analyserade materialet: *det kooperativa*, som oftast kallas för grupparbete och *det individuella*, där varje elev arbetar i sin egen takt (tex Hunt, 1996; Li & Adamson, 1992; Robinson, 1990).

För att ta reda på elevers prestationer i samband med och attityder till olika arbetssätt, undersökte Hunt (1996) effekterna av olika grupperingar bland 208 elever i årskurs 6. Under studien bildade en del av eleverna som identifierades som begåvade respektive högpresterande homogena grupper, medan övriga begåvade och högpresterande elever ingick i heterogena grupper. I det perspektivet finner Hunt (1996) att det kooperativa arbetet i prestationshomogena grupper leder till att begåvade elever får bättre resultat i ämnet. De har även andra fördelar, eftersom eleverna uppskattar:

- att de får *samarbeta* med och blir *utmanade* av elever som *presterar på samma nivå* och
- att grupperna *arbetar i högt tempo*, dvs eleverna utför uppgifterna *i sin egen takt*.

Om liknande positiva upplevelser i samband med kooperativt arbete i prestationshomogena grupper vittnar även matematiskt begåvade niondeklassare och gymnasieelever (Coleman & Cross, 2014; George, 1976). I sammanhanget är det viktigt att notera att det även finns empiriskt material som visar att begåvade elever föredrar arbete i homogena grupper endast om uppgifterna är tillräckligt utmanande (Diezmann & Waters, 2001; Tretter, 2005).

Gällande det kooperativa arbetet i heterogena grupper, är såväl Li och Adamson (1992) som Robinson (1990) och Hunt (1996) överens om att det inte finns några resultat som visar att begåvade elever presterar bättre i dessa grupperingar – övriga nackdelar listas enligt följande:

- Begåvade elever *föredrar att arbeta individuellt* i heterogena grupper (Hunt, 1996; Li & Adamson, 1992)
- Begåvade elever *kan inte få differentierade instruktioner* under grupparbetet (Li & Adamson, 1992; Robinson, 1990)
- Arbetssättet *möter inte de begåvade elevernas utvecklingsbehov* eftersom arbetstempot inte är anpassat till dessa elever (Hunt, 1996; Robinson, 1990)
- Begåvade elever upplever att de får *sämre kunskapsutveckling* jämfört med i homogena grupperingar (Hunt, 1996; Li & Adamson, 1992)
- Begåvade elever upplever att det blir ofta *obalans* i arbetet, vilket leder till *frustration* (Hunt, 1996)

I sammanhanget bör det också lyftas fram att det är endast Hunt (1996) som undersöker kooperativa arbetssätt i både prestationshomogena och heterogena grupper medan Li och Adamson (1992) samt Robinson (1990) redovisar observationer endast från heterogena grupperingar.

När det gäller begåvade elevers *motivation* för ämnet, så finns det fyra empiriska studier i det analyserade materialet som behandlar problematiken (Hong & Aquí 2004; Schober et al., 2004; Stutler, 2005; Vlahovic-Stetic et al., 1999). I det avseendet har Vlahovic-Stetic et al. (1999) jämfört motivation hos matematiskt begåvade högpresterande, matematiskt begåvade underpresterande, respektive genomsnittligt presterande elever. Studien, som inkluderar 147 elever i 9–10-års ålder, visar att matematiskt begåvade elever:

- har en *högre nivå av inre motivation* när det gäller matematiska aktiviteter,
- är *mindre ängsliga* inför matematiken, samt
- anser att den egna *ansträngningen* endast i *mindre omfattning* påverkar deras *resultat* i ämnet.

I en annan studie (Hong & Aquí, 2004) betonas det att matematiskt kreativa elever använder fler kognitiva strategier än begåvade elever – studien visar också att elever som tillhör dessa två kategorier upplever att de har bättre tilltro till sin matematiska förmåga och bättre självförtroende i matematik jämfört med övriga elever.

Vidare noterar Stutler (2005) att en alarmerande stor andel matematiskt begåvade flickor avbryter sina studier i klasser med hög matematisk profil för att välja mindre krävande kurser. För att närmare undersöka elevernas motivation i samband med studierna och deras prestation i ämnet, har Stutler observerat matematiskt begåvade mellanstadieelever (middle school) som delades in i separata flick- respektive pojkgrupper. Studiens slutsatser är att:

- flickorna i den könshomogena gruppen presterade mycket bättre än pojkarna i motsvarande grupp; 14 av 18 flickor fick det högsta betyget jämfört med 1 av 18 pojkar,
- flickorna brydde sig mer än pojkarna om att gruppen var könshomogen,
- flickorna trivdes med tävlingsinriktade arbetssätt i gruppen,
- flickorna uppgav att de studerade bättre, lärde sig mer och var mindre oroliga, medan

- pojkarna uppgav att deras resultat i och motivation för ämnet inte har påverkats av den könshomogena grupperingen (Stutler, 2005).

Ytterligare studier, genomförda av Schober et al. (2004), undersökte skillnader med avseende på gruppering, studieresultat och motivation hos begåvade gymnasieelever i Tyskland. I det heterogena klassrummet skattade pojkarna sina matematiska färdigheter högre, medan flickorna oftare kände sig hjälplösa – men när eleverna var indelade i prestations-homogena grupper, så var studieresultaten till flickornas fördel och flickorna kände även mer motivation för ämnet (Schober et al., 2004).

Avslutningsvis bör det nämnas en studie av Freeman (2004) som problematiserar andra studiers resultat gällande begåvade elevers attityd till och motivation för matematik (tex Heller & Ziegler, 1996; Hunt, 1996; Schober et al., 2004; Sowell, 1993) genom att notera att skillnader i attityd och motivation mellan begåvade flickor och pojkar är kulturellt betingade. Freeman antyder vidare att andelen begåvade och högpresterande flickor i Storbritannien är större än motsvarande andel pojkar, samt att flickorna har bättre studieresultat. Situationen i USA, där begåvade elever inte identifieras endast genom sina prestationer i ämnet, är den motsatta, dvs i USA är det pojkarna som presterar bättre (George, 1976; Freeman, 2004). Dessa skillnader förklaras med att den mer sexualiserade kulturen i USA leder till att flickor har sämre självförtroende samt att föräldrarnas traditionella förväntningar på sina barn i USA, där matematik uppfattas som ett manligt område, har negativ inverkan på flickors självkänsla och matematiska prestationer (Freeman, 2004).

Diskussion

Syftet med denna studie var dels att undersöka vilka pedagogiska och organisatoriska metoder som rekommenderas i samband med begåvade elevers kunskapsutveckling i matematik i forskningslitteraturen, dels att kartlägga empiriska belägg för de rekommenderade metoderna.

Analysen visar att resultaten inom de områden som denna artikel belyser är förhållandevis konvergenta, vilket ger oss anledning att tro att tex vissa pedagogiska metoder kan leda till goda studieresultat för begåvade elever och att begåvade flickor upplever skolmatematiken annorlunda jämfört med begåvade pojkar. Däremot finns det enstaka studier vars resultat divergerar från de tongivande slutsatserna. En förklaring till de divergensen återfinns oftast i hur begåvade elever identifieras i respektive studie. Till exempel visar nästan alla studier att det inte finns några könsskillnader när det gäller begåvade elevers resultat i matematik i heterogena klassrum (tex Schober et al., 2004) medan en artikel (Freeman, 2004) indikerar att andelen begåvade flickor är större än andelen

begåvade pojkar i heterogena klassrum och att flickorna har bättre studie-resultat. I dessa fall väljer tex Schober et al. (2004) att observera gymnasieelever som presterar väl både i matematik och på psykometriska tester, dvs elever som med stor sannolikhet är matematiskt begåvade, medan Freeman (2004) fokuserar elever med goda allmänna studiere-sultat, dvs högpresterande elever som inte har blivit identifierade som matematiskt begåvade. Och med tanke på att det inte finns tillräckligt starka samband mellan begåvning och prestationer i ämnet (tex Juter & Sriraman, 2011), så kan det upplevas som mindre överraskande att nämnda studier kommer fram till olika slutsatser.

På liknande sätt framhäver de flesta studier positiva effekter i väl avvägda accelerationsprogram (tex Dimitriadis, 2012; George, 1976; Leikin, 2010; Rogers, 2007; Sowell, 1993) medan enstaka artiklar (tex Tucker, 1982) påpekar att acceleration inte passar för begåvade elever utan används mest för att avlasta läraren i det heterogena klassrummet. I det här fallet, hänvisar tex Sowell (1993) till 14 empiriska studier om accelerationens effekter medan Tucker grundar sina rekommendationer i upplevelsen att "this author feels that acceleration accomplishes nothing really useful" (Tucker, 1982, s12) utan att hänvisa till mer betydande empiri eller andra studier. Alltså ställs det ibland empiriskt grundade resultat mot förmodade och därmed kan det också vara förståeligt att slutsatserna varierar.

I sammanhanget bör det också poängteras att det är något mer än hälften av de analyserade artiklarna som hänvisar till empiri när det gäller begåvade elever i matematikklassrummet. Övriga texter baseras på analys av tillgänglig forskningslitteratur eller analyserar studier som har genomförts av andra forskare. Och när det gäller de empiriska studierna, så är det något överraskande att man i stor utsträckning (i ca 80 procent av studierna) har använt IQ-tester vid urval av deltagare, trots de senaste årtiondenas omfattande kritik mot dessa tester. Vidare visar analysen att i de empiriska studierna fokuseras det till övervägande del allmänt begåvade elever, dvs inte matematiskt begåvade elever. Följaktligen har vi god anledning att anta att de flesta resultaten i de refererade studierna gäller just begåvade elever med goda resultat i matematik, dvs inte matematiskt begåvade elever specifikt. Analysen visar också att identifieringsmodeller för begåvning är både kulturellt och geografiskt betingade (tex Chyriwsky & Kennard, 1997; Freeman, 2004; Gyarmathy, 2013; Tirri & Kuusisto, 2013) men en djupare analys av den problematiken är, som redan har nämnts, bortom syftet med denna studie.

Sammanfattningsvis kan det konstateras att det finns pedagogiska metoder, som förordas inom forskningsfältet, som antas stimulera begåvade elevers kunskapsutveckling i matematik. Till exempel överensstämmer

flera artiklars rekommendation att matematikläraren mycket väl kan ta hand om dessa elever i det heterogena klassrummet genom att anpassa, differentiera och fördjupa undervisningen – men det finns bara en empirisk studie (Dimitriadis, 2012) som antyder att dessa metoder har positiv inverkan på elevernas kunskapsutveckling. Dimitriadis (2012) visar dock att det finns andra åtgärder (som tex undervisning i prestationshomogena grupper) som har bättre effekt än just undervisning av begåvade elever i heterogena klassrum.

Empirin är däremot entydig gällande matematiskt begåvade elevers ovilja mot grupparbete i heterogena klassrum, men också i erfarenheten att arbete i prestationshomogena grupper leder till bättre kunskapsutveckling, eftersom dessa elever uppskattar att arbeta i egen takt tillsammans med kamrater som betraktar matematiken på samma sätt som de själva gör (tex Hunt, 1996; Li & Adamson, 1992; Robinson, 1990).

Acceleration verkar också ha god inverkan på begåvade elever, men i sammanhanget bör det betonas att de mest lyckade accelerationsprogrammen har uppfyllt några viktiga kriterier, dvs att deltagarna har identifierats som matematiskt begåvade, att de deltog frivilligt i accelerationen, samt att innehåll och undervisning var anpassade till deltagarnas förkunskaper och kapacitet (tex Dimitriadis, 2012; George, 1976; Sowell, 1993). Och just urval av deltagare samt anpassad undervisning verkar vara nödvändiga framgångsfaktorer, eftersom allmän acceleration i matematik – där alla elever i ett skolsystem erbjuds förmånliga villkor för att studera matematikkurser som är på en högre nivå än deras ordinarie kurser – kan vara kontraproduktivt för elevers attityd till ämnet (Sheffield, 2015). Men acceleration verkar fungera utmärkt framför allt för "precocious", dvs tidigt utvecklade, elever eftersom de lär sig snabbare på det sättet och dessutom höjer sina resultat i ämnet (tex Sowell, 1993). Och det har även presenterats övertygande argument för att yngre begåvade elever framför allt bör betraktas som tidigt utvecklade individer (Threlfall & Hargreaves, 2008).

Med avseende på det sociala sammanhanget, visar studierna att begåvade elever befinner sig i en utsatt position i det heterogena klassrummet. Trots dessa elevers mödosamma arbete i skolan, verkar det som att de inte är socialt accepterade av sina klasskamrater – de känner sig ofta annorlunda eller främmande och försöker minimalisera effekterna av deras begåvning i interaktionen med kamraterna (Coleman & Cross, 2014).

Och när det gäller könsskillnader mellan begåvade elever som studerar i prestationshomogena grupperingar, visar empirin (tex Stutler, 2005) att på mellanstadiet presterade och trivdes flickor bättre i flickgruppen än i den könsblandade klassen, medan det inte fanns några skillnader mellan motsvarande pojkgrupps attityd och prestationer. Och man har också noterat att begåvade flickor på gymnasiet anstränger sig mer än

motsvarande grupp pojkar, samt att nivågrupperingar i många avseenden är till flickornas fördel (tex Schober et al., 2004). Avslutningsvis kan vi konstatera att begåvade elevers situation i matematikklassrummet är allt annat än oproblematisht. Matematiklärare har sällan resurser för att kunna identifiera matematiskt begåvade elever i heterogena klasser, således finns det en stor risk att många av dessa elever aldrig kommer att få den nödvändiga stimulansen. Och som en följd av detta, verkar det som att identifiering av begåvade elever är en nyckelfråga i sammanhanget. Men eftersom begåvade elever är olika som individer, är det viktigt att påminna oss att det inte finns någon enskild utvecklingsinsats som passar alla dessa elever (Rogers, 2007). Problematiken är synnerligen differentierad och därför bör även lösningarna individanpassas. Att se och uppmärksamma matematiskt begåvade elever är nödvändigt, men sällan tillräckligt i ett större perspektiv, eftersom de blir snabbt uttråkade av enkla uppgifter, jobbar helst för sig själva i heterogena grupper, trivs bäst med utmanande problem och dessutom ofta känner sig utanför klassens sociala gemenskap. Det förhåller sig heller inte på det viset att alla begåvade elever är högpresterande i matematik eller att högpresterande elever är även matematiskt begåvade.

Denna forskningsöversikt leder till antagandet att det behövs fler empiriska studier inom området, men också till förmodandet att det är osäkert om svaren på våra frågor kommer att återfinnas i kommande studiers resultat. Problematiken är komplex och våra undersökningsinstrument är trubbiga, därför bör varje åtgärd utgå från ömsesidig respekt mellan lärare och elever och leda till att varje elev upplever personlig tillfredsställelse i samband med sina matematiska aktiviteter.

Referenser

- Ahrendt, M. H. (1953). Education of the mathematically gifted. *The Phi Delta Kappan*, 34(7), 285–287, 292.
- Bloom, B. S. (red.). (1985). *Developing talent in young people*. New York: Ballantine Books.
- Boaler, J., Wiliam, D. & Brown, M. (2000). Students' experiences of ability grouping-disaffection, polarisation and the construction of failure. *British Educational Research Journal*, 26(5), 631–648.
- Brandl, M. (2011). High attaining versus (highly) gifted pupils in mathematics: a theoretical concept and an empirical survey. I M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (red.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s 1044–1055). University of Rzeszow, Poland.
- Calkins, M. W. (1894). A study of the mathematical consciousness. *Educational Review*, VIII, 269–286.

- Chyriwsky, M. & Kennard, R. (1997). Attitudes to able children: a survey of mathematics teachers in English secondary schools. *High Ability Studies*, 8(1), 47–59.
- Coleman, L. J. & Cross, T. L. (2014). Is being gifted a social handicap? *Journal for the Education of the Gifted*, 37(1), 5–17.
- Csikós, C. & Dobi, J. (2001). Matematikai nevelés [Matematisk uppfostran]. I Z. Báthory & I. Falus (red.), *Tanulmányok a neveléstudomány köréből* (s.354–372). Budapest: Osiris Kiadó.
- Csikszentmihályi, M. & Robinson, R. E. (1986). Culture, time and the development of talent. I R. J. Sternberg & J. E. Davidson (red.), *Conceptions of giftedness* (s.285–306). London: Cambridge University Press.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense*. New York: Oxford University Press.
- Diezmann, C. M. & Watters, J. J. (2001). The collaboration of mathematically gifted students on challenging tasks. *Journal for the Education of the Gifted*, 25(1), 7–31.
- Dimitriadis, C. (2012). Provision for mathematically gifted children in primary schools: an investigation of four different methods of organizational provision. *Educational Review*, 64(2), 241–260.
- Freeman, J. (2004). Cultural influences on gifted gender achievement. *High Ability Studies*, 15(1), 7–23.
- George, W. C. (1976). Accelerating mathematics instruction for the mathematically talented. *Gifted Child Quarterly*, 20(3), 246–261.
- Graneheim, U. H. & Lundman, B. (2004). Qualitative content analysis in nursing research: concepts, procedures and measures to achieve trustworthiness. *Nurse Education Today*, 24(2), 105–112.
- Gyarmathy, E. (2013). The gifted and gifted education in Hungary. *Journal for the Education of the Gifted*, 36(1), 19–43.
- Heller, K. A. & Ziegler, A. (1996). Gender differences in mathematics and natural sciences: Can attributional retraining improve the performance of gifted females? *Gifted Child Quarterly*, 40(4), 200–210.
- Hong, E. & Aquí, Y. (2004). Cognitive and motivational characteristics of adolescents gifted in mathematics: comparisons among students with different types of giftedness. *Gifted Child Quarterly*, 48(3), 191–201.
- Hootstein, E. (1998). *Differentiation of instructional methodologies in subject-based curricula at the secondary level*. Richmond: Metropolitan Educational Research Consortium. Hämtad från <http://eric.ed.gov/?id=ED427130>
- Hunt, B. (1996). The effect on mathematics achievement and attitude of homogeneous and heterogeneous grouping of gifted sixth-grade students. *Journal of Advanced Academics*, 8(2), 65–73.
- Händel, M., Vialle, W. & Ziegler, A. (2013). Student perceptions of high-achieving classmates. *High Ability Studies*, 24(2), 99–114.

- Johnsen, S. K. & Kendrick, J. (red.) (2005). *Math education for gifted students*. Waco: Prufrock Press.
- Juter, K. & Sriraman, B. (2011). Does high achieving in mathematics = gifted and/or creative in mathematics? I B. Sriraman & K. H. Lee (red.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (s 45–66). Rotterdam: Sense Publishers.
- Karp, A. & Bengmark, S. (2011). Gifted education in Russia and the United States: personal notes. I B. Sriraman & K. H. Lee (red.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (s 131–143). Rotterdam: Sense Publishers.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Leeuwen, T. van (2005). *Introducing social semiotics*. London: Routledge.
- Leikin, M., Paz-Baruch, N. & Leikin, R. (2013). Memory abilities in generally gifted and excelling-in-mathematics adolescents. *Intelligence*, 41 (5), 566–578.
- Leikin, R. (2010). Teaching the mathematically gifted. *Gifted Education International*, 27 (2), 161–175.
- Leikin, R. (2014). Giftedness and high ability in mathematics. I S. Lerman (red.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, (s 247–251). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Lester, F. K. & Schroeder, T. L. (1983). Cognitive characteristics of mathematically gifted children. *Roeper Review*, 5 (4), 26–28.
- Li, A. K. F. & Adamson, G. (1992). Gifted secondary students' preferred learning style: cooperative, competitive, or individualistic? *Journal for the Education of the Gifted*, 16 (1), 46–54.
- Mattsson, L. (2013). *Tracking mathematical giftedness in an egalitarian context*. Institutionen för matematiska vetenskaper, Göteborgs universitet.
- Mönks, F. J. & Ypenburg, I. H. (2009). *Att se och möta begåvade barn*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Persson, R. (1997). *Annorlunda land. Särbegåvningens psykologi*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Pettersson, E. (2011). *Situationen för elever med särskilda matematiska förmågor*. Institutionen för datavetenskap, fysik och matematik, Linnéuniversitetet.
- Preckel, F., Götz, T. & Frenzel, A. (2010). Ability grouping of gifted students: effects on academic self-concept and boredom. *British Journal of Educational Psychology*, 80 (3), 451–472.
- Reed, C. F. (2004). Mathematically gifted in the heterogeneously grouped mathematics classroom: What is a teacher to do? *Journal of Advanced Academics*, 15 (3), 89–95.
- Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *The Phi Delta Kappan*, 60 (3), 180–184, 261.

- Robinson, A. (1990). Cooperation or exploitation? The argument against cooperative learning for talented students. *Journal for the Education of the Gifted*, 14 (1), 9–27.
- Rogers, B. K. (2007). Lessons learned about educating the gifted and talented: a synthesis of the research on educational practice. *Gifted Child Quarterly*, 51 (4), 382–396.
- Rotiger, J. V. & Fello, S. (2005). Mathematically gifted students – how can we meet their needs? I S. K. Johnsen & J. Kendrick (red.), *Math education for gifted students* (s3–13). Waco: Prufrock Press.
- Shayshon, B., Gal, H., Tesler, B. & Ko, E. (2014). Teaching mathematically talented students: a cross-cultural study about their teachers' views. *Educational Studies in Mathematics*, 87 (3), 409–438.
- Sheffield, L. (2003). *Extending the challenge in mathematics*. Thousand Oaks: Corwin Press.
- Sheffield, L. (2015). Myths about "gifted" mathematics students: How widespread are they? I F. M. Singer, F. Toader & C. Voica (red.), *Proceedings of the 9th International Conference of Mathematical Creativity and Giftedness* (s. 114–119). Sinaia, Romania.
- Schober, B., Reimann, R. & Wagner, P. (2004). Is research on gender-specific underachievement in gifted girls an obsolete topic? New findings on an often discussed issue. *High Ability Studies*, 15 (1), 43–62.
- Schumm, J. & Vaughn, S. (1991). Making adaptations for mainstreamed students: general classroom teachers' perspectives. *Remedial and Special Education*, 12 (4), 18–27.
- Skolverket. (2015). *Särskilt begåvade elever – stödmaterial*. Hämtad från <http://www.skolverket.se/skolutveckling/lorande/sarskilt-begavade-elever-1.230661>
- Sowell, E. J. (1993). Programs for mathematically gifted students: a review of empirical research. *Gifted Child Quarterly*, 37 (3), 124–132.
- Sriraman, B. & Lee, K. H. (red.) (2011). *The elements of creativity and giftedness in mathematics*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Sternberg, R. J. (1998). Abilities are forms of developing expertise. *Educational Researcher*, 27 (3), 11–20.
- Stoeger, H. (2009). The history of giftedness research. I Shavinina L. (red.), *International handbook on giftedness* (s17–38). New York: Springer.
- Stutler, S. L. (2005). Breaking down the barriers – adventures in teaching single-sex algebra classes. I S. K. Johnsen & J. Kendrick (red.), *Math education for gifted students* (s93–103). Waco: Prufrock Press.
- Swanson, H. L. & Jerman, O. (2006). Math disabilities: a selective metaanalysis of the literature. *Review of Educational Research*, 76 (2), 249–274.
- Threlfall, J. & Hargreaves, M. (2008). The problem-solving methods of mathematically gifted and older average-attaining students. *High Ability Studies*, 19 (1), 83–98.
- Tirri, K. & Kuusisto, E. (2013). How Finland serves gifted and talented pupils. *Journal for the Education of the Gifted*, 36 (1), 84–96.

- Tretter, T. R. (2005). Gifted students speak – mathematical problem-solving insights. I S. K. Johnsen & J. Kendrick (red.), *Math education for gifted students* (s 119–143). Waco: Prufrock Press.
- Tucker, B. F. (1982). Providing for the mathematically gifted child in the regular elementary classroom. *Roeper Review*, 4(4), 11–12.
- Webb, J.T., Amend, E. R., Webb, N. E., Goerss, J., Beljan, P. & Olenchak, F. R. (2005). *Misdiagnosis and dual diagnosis of gifted children and adults: ADHD, bipolar, Asperger's, depression, and other disorders*. Scottsdale: Great Potential Press.
- Weinert, F. E. (Red.). (1998). *Entwicklung im Kindesalter – Bericht über eine Längsschnittstudie*. Weinheim: Beltz.
- Vlahovic-Stetic, V., Vizek Vidovic, V. & Arambasic, L. (1999). Motivational characteristics in mathematical achievement: a study of gifted high-achieving, gifted underachieving and non-gifted pupils. *High Ability Studies*, 10(1), 37–49.
- Ziegler, A. (2005). The actiotope model of giftedness. I R. J. Sternberg & J. E. Davidson (red.), *Conceptions of giftedness* (s 411–436). New York: Cambridge University Press.

Noter

- 1 Studien genomfördes under sommaren 2014.
- 2 Tex Ahrendt, 1953; Dimitriadis, 2012; Diezmann & Watters, 2001; George, 1976; Hunt, 1996; Leikin, 2010, 2014; Li & Adamson, 1992; Preckel, Götz & Frenzel, 2010; Reed, 2004; Robinson, 1990; Rogers, 2007; Rotiger & Fello, 2005; Sowell, 1993; Threlfall & Hargreaves, 2008; Tucker, 1982.
- 3 Tex Coleman & Cross, 2014; Freeman, 2004; Heller & Ziegler, 1996; Hong & Aquí, 2004; Händel, Vialle & Ziegler, 2013; Li & Adamson, 1992; Schober, Reimann & Wagner, 2004; Stutler, 2005.
- 4 Tex Brandl, 2011; Chyriwsky & Kennard, 1997; Leikin, 2010; Shayshon, Gal, Tesler & Ko, 2014.
- 5 Tex Gyarmathy, 2013; Karp & Bengmark, 2011; Leikin, 2014; Tirri & Kuusisto, 2013.
- 6 Tex Hong & Aquí, 2004; Juter & Sriraman, 2011; Lester & Schroeder, 1983; Vlahovic-Stetic, Vizek Vidovic & Arambasic, 1999.
- 7 I en referenslista som är tillgänglig på NOMADs webb listas de artiklar som bäst överensstämmer med innehållet i eller är oftast refererade inom dessa områden.

Attila Szabo

Attila Szabo är fil. lic. i matematikämnets didaktik och doktorand vid Stockholms Universitet. Hans forskningsintressen rör den matematiska förmågens struktur och det matematiska minnets uttryckssätt vid problemlösning hos högpresterande elever.

attila.szabo@stockholm.se

Abstract

The present article offers an overview of those main methodological and pedagogical approaches associated with gifted pupils' education in mathematics which are focused in the research literature. Furthermore, the article discusses gender differences, motivation and some central aspects of mathematically gifted pupils' social situation in the classroom. The analysis shows that there are some pedagogical and organizational approaches, e.g. *voluntary acceleration* where the *teaching is adapted* to the knowledge and the capacity of the participants or working with *challenging mathematical problems* in *performance-homogenous groups*, which may have good effects on gifted pupils' mathematical achievement. The overview also indicates that mathematically gifted adolescents are facing difficulties in their social interaction and that gifted female and male pupils are experiencing certain aspects of their mathematics education differently.