

Bokanmälan

Fra snublesten til byggesten. Matematikdidaktiske muligheder

BARBRO GREVHOLM

Niss, M. & Jankvist, U. T. (red.) (2016). *Fra snublesten til byggesten. Matematikdidaktiske muligheder*. Frederiksberg: Frydenlund.

Bokens bakgrund

Denna lilla bok, som är skriven på danska, omfattar 124 sidor och innehåller en inledning av de båda redaktörerna, följt av sex kapitel som är skrivna av danska matematiklärare i gymnasiet. Boken är mycket viktig eftersom den visar på en möjlighet att överbrygga klyftan mellan matematiklärare och forskare i matematikdidaktik samt att föra ut forskningens resultat i skolans praktik. Det sker genom att skapa möjligheter för lärare att tolka forskningens resultat för att låta elever som lär matematik få nytta av forskningen. Det är ett av de främsta målen med matematikdidaktisk forskning.

I inledningen förklaras att bokens titel vill markera kärnan i den verksamhet den bygger på, det vill säga sökandet efter vad de specifika problemen för lärande i gymnasiematematiken består i och hur de kan vändas till att skapa byggstenar för att nå en positiv utveckling av elevers lärande. Boken har blivit till i samband med en ny utbildning av så kallade 'matematikveiledere' i gymnasiet, lärare som ska ha speciella möjligheter att kartlägga elevers problem och söka avhjälpa dem med hjälp av de kunskaper vi fått från senare tiders forskning i matematikdidaktik. Utbildningen har stöttats av Den Europeiska Socialfonden genom STAR-projektet. Själva utbildningen som sådan har beskrivits av redaktörerna i en artikel i *Educational Studies of Mathematics* (Jankvist & Niss, 2015), och beskrivs inte explicit i boken. Alla författarna i övrigt är lärare som genomgått utbildningen i den första kullen av deltagare. Ett led i utbildningen var att skriva rapporter om sina observationer och designen av de åtgärder som genomfördes med eleverna. Dessa rapporter har legat till grund för kapitlet i boken.

Barbro Grevholm

Universitetet i Agder

Redaktörerna inleder med att konstatera att det i den gymnasiala undervisningen finns elever som arbetar motiverat, flitigt, och omsorgsfullt med matematiken men som alls inte når fram till de mest grundläggande begrepp om ämnet. Denna typ av elever verkar vara i ökande omfattning, hävdar författarna.

Samtidigt finns det från de senaste fyra årtiondena en stor fond av insikt i och förståelse för matematikspecifika inlärningssvårigheter och vad deras orsaker kan vara. I Danmark har man inte tidigare försökt dra nytta av denna matematikdidaktiska forskning för att avhjälpa svårigheter för eleverna. Därför kan boken ses som banbrytande på sitt område.

Läraren Bents berättelse

I det första kapitlet beskriver läraren Bent en elev kallad Å med speciella matematiksvårigheter. Det första tema lärarna tar sig an är begrepp och begreppsbyggnad. Beslutet om val av begrepp byggde på ett så kallat detektionstest som de två samarbetande lärarna genomförde med alla elever i sina klasser. Testet följdes av en intervju med eleven som visade att hen hade bekymmer med i stort sett alla uppgifterna och bland annat var hens talbegrepp och talförståelse mycket bristande. Även ekvationer och negativa tal vållade problem för Å. Lärarna uttrycker det så att elevens representationskompetens och symbol- och formalismkompetens är ytterst bristfällig. Mot bakgrund av intervjun beslutar de att den första interventionen som ska genomföras i klassen ska handla om ekvationer och starta med mycket enkla ekvationer.

Den första ekvation som Å får att hantera är $3x = 15$. Där föreslår hen att 3 ska dras ifrån på båda sidor. Å vet att när man gör en operation på ena sidan likhetstecknet ska samma göras på den andra sidan. Hen vill gärna att $3x - 3$ ska bli x men inser efter hand att det inte går. Läraren frågar vilket tecken som är utelämnat mellan 3 och x och då inser Å att det är smartare att dividera än att subtrahera. Så fortsätter arbetet med efter hand lite mer komplicerade ekvationer och Å lyckas till slut lösa alla de föregivna ekvationerna men oftast med stor hjälp från läraren. Läraren sluter sig till att de matematiska kompetenser som var bristfälliga hos Å kunde hänföras till att grunden med talbegrepp och talförståelse var så svag.

Det andra temat läraren tar sig an med klassen är resonemang och bevisföring. Som förut börjar man med detektionstest och intervjuer. Samma elev Å som tidigare blev ombedd att fördjupa sina svar i intervjun. Läraren tolkar situationen som att eleven har ett auktoritärt bevis-schema, grundat på hens svar att beviset är korrekt för att beviset säger

det. Läraren frågar om 17 är lika med 0 och då vet Å att det är fel och kan dra slutsatsen att beviset är fel. Men hen kan inte peka på var i beviset den felaktiga slutledningen är gjord. I testet hade Å ibland svarat "Jag kan inte svara" och lärarna tolkar det som bristande kommunikationskompetens. Å klarar inte att skriftligt uttrycka sig matematiskt korrekt. Uppgifterna som eleverna fick under interventionen var i stil med de som gavs i detektionstesten. Eleverna blev stadigt bättre i att genomföra bevis så som lärarna ville. Men för Å kom den vacklande talförståelsen och symbol- och formalismkompetensen igen upp till ytan. Det verkade som om addition och multiplikation flöt samman för Å.

Det tredje temat: modellering

Samma klass och samma elever grep sig nu an ett tredje tema att arbeta med, nämligen modeller och modellering. Denna gång valdes temat för att lärarna skulle kunna se skillnaden mellan de svagaste och det starkaste eleverna i klasserna. I en av testets uppgifter skulle eleverna från ett fotografi uppskatta höjden av en byggnad. På bilden syntes byggnaden och ett antal personer. Eleven Å sa då att det kunde hen inte räkna ut då hen inte hade några mått. När läraren bad Å gissa på något trodde hen att den inte var så hög som Rundetårn, 5 meter hög. Lärarna konstaterar att Å har bristfällig modelleringskompetens. Lärarna noterar avslutningsvis att det är tankeväckande att undervisningssystemet kan sända en elev vidare i livet med ett talbegrepp som i stort sett bara klarar naturliga tal och med stor osäkerhet de fyra räknesätten. En sådan elev sa "Noll är väl inte något tal". Efter hand kunde lärarna förutsäga vilka frågor de utvalda eleverna skulle få problem med och av vilket slag. Lärarna hoppas att Å inte ser sina otillräckliga matematikkompetenser som ett problem. Så allvarliga brister kan inte repareras med några interventioner, därför kan i fallet Å inte en solskenshistoria berättas.

Läraren Marits berättelse

I rapporten från en annan skola skriver läraren Marit om en klassrumsintervention rörande matematiskt resonemang. Hon väljer att använda metoden att intervensera både för hela klassen och för individuella elever. Motiveringen för valet av område är att resonemang och bevisföring utgör en väsentlig del av matematikämnets identitet och är ett område som ofta skapar problem för elever. Sättet att genomföra planen påminner om det som beskrevs ovan. Inledningsvis görs en detektionstest och elever med särskilda svårigheter identifieras. Med dem genomförs så individuella intervjuer där varje elevs förståelse beskrivs med hjälp av ett begrepp från

forskningen, bevisschema. Hela klassens svar används för att ta ställning till om en klassrumsintervention kan bygga på diskussioner och grupparbete. Elevernas föreställningar om matematik kartläggs och påverkar utarbetandet av förloppet som ska genomföras. I det är tanken att de sociomatematiska normerna ska utvecklas. Efter genomförandet av förloppet sker åter individuella intervjuer med eleverna för att klargöra om de mål som satts upp har nåtts. I rapporten ger så läraren en ingående diskussion av de begrepp från matematikdidaktisk forskning som används i arbetet. Det gäller vad forskarna Harel och Sowder menar med bevisschema, vad Op't Eynde med flera avser med föreställningar om matematik (om undervisning, om elevens förhållande till matematik samt om den sociala kontexten) samt vad Yackel och Cobb lägger in i begreppet sociomatematiska normer. De nämnda begreppen från forskningen kan nog inte sägas normalt ingå i lärares vardagliga samtal med varandra. Här har alltså kursen lärarna genomgår inspirerat till vidgade tolkningar av hur elevernas situation kan beskrivas. Därefter ges en översiktlig beskrivning av undervisningsförloppet och läraren presenterar utförliga observationer från grupparbetet med långa och intressanta samtal mellan eleverna. Detta lämnar jag till läsaren att studera mera ingående på egen hand.

En viktig slutsats är att eleverna efter förloppet visade att de fått utbyte av det i form av ett gemensamt språk och en förståelse för betydelsen av matematiska resonemang och bevisföring. Jag menar att det också tydligt framgår att läraren fått ett nytt och utvidgat språk för att beskriva vad som observeras hos eleverna. Forskningen kan bidra med att ge ord och termer för fenomen som lärare normalt kanske lägger märke till och är medvetna om men inte ger verbalt uttryck för. Framväxten av ett sådant professionellt språk kan bidra till att lärare skapar möjligheter att på ett fördjupat sätt samtala om fenomenen i klassrummet. Det kan ses som en utveckling av lärarens professionella identitet.

Tema om begreppet funktioner

Ett annat tema som belyses i en av rapporterna är begreppet funktioner. De centrala begrepp från forskningen som används här är Tall och Vinnars begreppsmodell och begreppsdefinition, begreppet kognitiv konflikt, representationsformer enligt Thompson och Sfard samt Skemp's begrepp instrumentell och relationell förståelse. Genomförandet av interventionen skedde i femton så kallade 'frokostsessioner' förlagda till klassens lunchpaus. Eleverna bjöds på en sandwich medan en lärare ledde en dialog som innehöll frågor och små uppgifter. Samlingarna spelades in på video så att lärarna efteråt kunde gå igenom och analysera

dialogerna. Här börjar beskrivningen med den så kallade Amalietolkningen av begreppet funktion. Eleverna ser på den allmänna linjära ekvationen $y = ax + b$. Här är Amalies svar på några frågor: Förklara vad y är: " y är b ". Förklara vad x är: " x är a ". Förklara vad a är: " a säger något om x ". Förklara vad b är: " b visar vad y är".

Det följande materialet visar att Amalie har delar i sin begreppsbild som skulle kunna ge upphov till kognitiva konflikter men inte verkar göra det i hennes fall och att begrepps bilden hon har är långt bort från en mera allmänt accepterad begreppsdefinition. Vidare undersökning visade att flera elever hade begrepps bilder som var varianter av den Amalie visar upp. Även de elever som avslöjar problem av detta slag klarade sig i examen och lärarna tolkar det så att det räcker med att ha en instrumentell förståelse för den matematik man testas på. En fråga jag ställer mig är om en sådan förståelse kommer att vara tillräcklig för dessa elever senare i livet.

Fokus på matematisk modellering

I flera av beskrivningarna av undervisningsförloppen är fokus på matematisk modellering. Det var det område den tredje terminen av kursen tog sikte på. En av lärarna ser närmare på diagnosticeringen av eleverna och kopplar modellering till elevernas föreställningar om matematik. Hon använder en typologi av den tyske matematikdidaktikern Stefan Grigutsch med fyra typer av föreställningar: Schemabaserade, processorienterade, formalistiska och nytto- eller användningsorienterade. De två elever som väljs ut för djupare beskrivningar hyser olika typer av föreställningar av de två första slagen. De båda eleverna, vars tankar vi får del av, klarar sig fint i examen och läraren ställer sig frågan om det kan vara så att deras modelleringskompetens har föga betydelse för deras generella nivå mätt med examensresultat. Det är en öppen fråga för fortsatt undersökning.

I en annan beskrivning knyter lärarna matematisk modelleringskompetens till avsaknad av matematiskt mod. Här möter vi Miriam och Sarah, de flitiga eleverna som löser standarduppgifter perfekt men stoppar upp helt då läraren inte noga berättar vad som ska ske. I intressanta samtal som återges får vi följa elevernas sätt att tänka. Genom att lärarna ger eleverna verktyget modelleringscykeln får eleverna möjlighet att göra framsteg och bättre komma igång med modelleringsuppgifter. För en verksam lärare erbjuder de olika kapitlen goda och väl utprovade uppslag till hur man kan hantera en situation då eleverna kommer i svårigheter.

Matematisk modellering berörs också i det sista kapitlet, där vi får ta del av historien om A, en flitig, arbetsam och tillmötesgående elev, som

har svårt att lösa uppgifter där man självständigt ska kombinera olika matematiska metoder. Hur hjälper man en sådan elev vidare, frågar sig de två lärarna. De låter sig inspireras av Lesh och Doerrs ideer om aktiviteter som belyser modeller. Metoden går ut på att dra in eleven i processer och uppgifter som har modellen som resultat hellre än ett konkret räknereultat. De tre interventioner som beskrivs gäller bristfällig användning av linearitet (för areal och volym), hastighetsbegreppet och enkel förhållanderäkning. Den ingående beskrivningen av elevens och lärarnas arbete ger insikt i vilka tankegångar som kan förekomma i dessa fall. Vid eftertestet med eleven ser lärarna att hon nu kan inse sina fel och rätta dem. En viktig slutsats för lärarna är att det kräver stor insikt i elevens förkunskaper och det är nödvändigt med ett grundligt analysarbete innan läraren kan sätta ihop lämpliga uppgifter för eleven så att en utveckling sker. I A:s fall konstaterades en mognad och ett medvetandegörande i hennes modelleringskompetens. Men om hon har förbättrat sina matematiseringskompetenser generellt kan först tiden utvisa.

Hur ser lärarna på sin egen kompetensutveckling?

Läsaren av boken blir nyfiken på hur lärarna ser på den utveckling de själva genomgår under kursen. Det finns inte beskrivet i boken mer än indirekt genom vad läsaren kan sluta sig till av artiklarna. Därför har jag kikat lite i artikeln som kursledarna skrivit om kursen i *Educational Studies in Mathematics* (Jankvist & Niss, 2015). På en direkt fråga till deltagarna framkommer det att de har blivit mycket mer observanta på elevernas föreställningar och uppmärksammar dem mer, talar mer med eleverna om vad matematik är och det ökar deras intresse för sådana frågor. Vidare sluter lärarna sig till att eleverna måste få mycket svårare uppgifter än standard rutinuppgifter för att det ska engagera dem i resonemang. En mycket erfaren lärare konstaterade att han fick ett helt annat perspektiv på sin egen undervisning. "Matematikhandledarprogrammet förser oss med ett begreppsligt ramverk och praktiska erfarenheter, som gör oss bättre på att förstå eleverna. Det är tankeväckande hur osäkra även de bästa elevernas kunskaper är. Det teoretiska innehållet i programmet har hjälpt mig att förstå naturen hos dessa problem. Det är fruktbart", säger en lärare. Författarna lovar skriva mer om både elevernas och lärarnas utveckling genom kursen och jag ser fram emot att få läsa om det.

En genusfråga?

Efter att ha läst hela boken är det naturligt att fråga sig om de danska gymnasielever som har särskilda problem med matematiken i regel är

flickor. Av de elever vars genus avslöjas i texterna är nämligen alla flickor. Vi möter Amalie, Julie, Sarah, Miriam och A i det sista kapitlet. Två elever Å och A (i kapitel 2) kan vara pojkar, vi får inte veta deras kön. Miriam och Sarah, som nämndes ovan, är två elever med matematik på A-nivå och betyg mellan 7 och 10. De har en reproducerande strategi för lärande och är flitiga som myror, enligt läraren. De gör sina hemuppgifter på ett framstående sätt när det gäller typuppgifter men har problem med annorlunda och nya typer av uppgifter. De kan inte modellera. De här flickorna passar alltså in på en vanlig stereotyp om flickor i matematiken. De är flitiga och kan härma men inte tänka självständigt. En förklaring till att det blivit flest flickor i beskrivningarna kan vara att urvalet bygger på frivillighet och vilja och förmåga att förklara för sin lärare hur man tänker och resonerar. Kanske har fler flickor varit villiga att ställa upp i intervjuerna? Men det hade varit intressant att även höra fler röster från pojkarna. De forskningsresultat som finns om genus och matematik är i hög grad relevanta för aktiva lärare och kan säkert påverka elevernas vardag i klassrummen.

Boken ger förståelse för elevers tankar och resonemang

Boken *Fra snublesten till byggesten* visar tydligt att lärare som vet mer om sina elevers matematiska förmåga och förkunskaper och kan kombinera det med resultat från forskningen har goda möjligheter att på ett konkret och konstruktivt sätt hjälpa sina elever till en utveckling av de matematiska kompetenserna. Det är ett hoppfullt budskap som kan inspirera både lärare och elever. I tider av nedslående rapporter från TIMSS och PISA om elever som blir allt sämre i matematik behöver vi den här typen av stärkande budskap. Det finns en potential för förbättring av matematikkunskaperna och lärandet kan förändras till det bättre. Jag rekommenderar boken till läsning för den som på ett djupare sätt vill förstå sina elevers svårigheter och utveckling i matematik och vill hjälpa och stötta i den utvecklingen.

References

- Jankvist, U. T. & Niss, M. (2015). A framework for designing a research-based "maths counsellor" teacher programme. *Educational Studies in Mathematics*, 90(3), 259–284.

