Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge

TOM RUNE KONGELF

I denne artikkelen presenterer vi funnene fra en analyse av introduksjonskapitlet i algebra i seks ulike lærebøker. Introduksjonen til bokstaver som symbol for variable størrelser varierer med hensyn til klassetrinn, mengde og kontekst. Gjennom en induktiv kvalitativ innholdsanalyse karakteriserer vi mangelfulle sider ved kapitlene. Hovedfunnene er at variabelaspektet ikke kommer tydelig frem, og at en i liten grad benytter mulighetene til å bygge videre på tallære. I tillegg inneholder lærebøkene feilaktige formuleringer, illustrasjoner og matematiske resonnement, som legger forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger.

Med lærebok mener vi den tradisjonelle fysiske klassetrinns-spesifikke boken som brukes til undervisning og læring av matematikk i skolen. Internasjonalt har lærebøker fått økt oppmerksomhet de siste tiårene, og i matematikk kan det eksemplifiseres ved TIMSS' analyse av 318 lærebøker fra nesten 50 land i 1995. Lærebøker i matematikk spiller en viktig rolle over alt i verden, men i følge Schmidt m. fl. (1996) spiller den en ekstra viktig rolle i Norge. Alseth, Breiteig og Brekkes (2003) gjennomgang av L97 (KUF, 1996) og en rapport fra Utdanningsdirektoratet (2005) om læremidler i Norge støtter i stor grad Schmidt m. fl. (1996). Lærebokens rolle er alene verdt en analyse, men hvis vi legger til muligheten for selv den minste forbedring og multipliserer det med antall elever, lærere og foreldre som bruker dem, indikerer det et stort forbedringspotensial totalt.

Læreboken er ofte primærkilden til matematikklæreren, i tillegg til legitimerende og styrende for innholdet og progresjonen i undervisningen (Freeman & Porter, 1989; Robitaille & Travers, 1992; Bierhoff, 1996; Röj-Lindberg, 1999; Fan & Kaeley, 2000; Schmidt m. fl., 2001; Pepin &

Tom Rune Kongelf
Universitetet i Agder og Høgskulen i Sogn og Fjordane

Kongelf , T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3-4), 83–109.

Haggerty, 2001, 2002; Johansson, 2006). Reys, Reys og Chávez (2004, s. 1, vår oversetting) beskriver det som at "valget av lærebok bestemmer ofte hva lærerne vil undervise i, hvordan de vil undervise, og hvordan elevene deres vil lære". Schoenfeld (1988) hevder at selv om god undervisning kan kompensere for eventuelle svakheter i lærebøkene, er det mye som tyder på at dette ikke er tilfelle. Chávez-López (2003) hevder at antall sider innenfor hvert emne er bestemmende for hvor mye tid læreren bruker på stoffet og for elevenes prestasjoner. Læreboken har også en funksjon som oversetter av matematikk for elevene, lærerne og foreldrene. I tillegg spiller den en viktig rolle i implementeringen av læreplanen, som i enkelte tilfeller kan avvike betraktelig fra den intenderte planen (Goodlad m. fl., 1979; Schmidt m. fl., 2001).

Sammenlignet med det internasjonale gjennomsnittet utgjør undervisningen hvor læreren forklarer til hele klassen en forholdsvis liten del i Norge. Norske elever arbeider derimot mye alene med oppgaver i lærebøkene og forklarer svarene sine lite (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie & Turnmo 2003; Danielsen, Skaar & Skaalevik, 2007; Grønmo & Onstad, 2009). Utdanningsdirektoratet (2005, s. 23) understreker lærebøkenes viktige rolle når den påstår at "[...] hvis det generelt ønskes forandringer i norsk skole, må også lærebøkene forandres". Pehkonen (1995) hevder at undervisningen kan bli påvirket av nye lærebøker, noe som var tilfelle i Finland på 1980-tallet.

Frem til og med år 2000 hadde Norge et eget senter for læremiddel, Nasjonalt læremiddelsenter, med autorisasjon til å godkjenne lærebøker. I dag har Norge et nasjonalt senter for matematikk, Matematikksenteret, uten en slik autorisasjon. I teorien betyr det at hvem som helst kan skrive og publisere en lærebok for skolen. Siden nedleggelsen av Nasjonalt læremiddelsenter har det vært lite forskning på grunnskolebøker i matematikk i Norge, bortsett fra Alseth m. fl. (2003) og Kongelf (2011). Ved å sammenligne formuleringene i læreplanene M87 (KUF, 1987) og L97 (KUF, 1996) identifiserte Alseth m. fl. (2003) fem gjennomgripende punkt. Studien bestod av en innholdsanalyse og en oppgaveanalyse, hvor begge tydet på det samme. Endringene i forhold til punktene ble funnet i geometri, men ikke i algebra, og med det tydet på at lærebokforfatterne bare delvis hadde klart å implementere det nye. I forlengelsen av studien til Alseth m. fl. (ibid.) er forskningsspørsmålet vårt

> hva er karakteristisk for introduksjonskapitlene i algebra i seks lærebøker for ungdomstrinnet i Norge?

I studien er introduksjonskapitlene i algebra definert til å være kapitlene i de seks respektive læreverkene som introduserer bokstaver som symbol for variable størrelser for første gang.

Hva er algebra?

På grunn av ulike tolkinger og vektinger av algebraens historie er det ikke mulig å enes om en felles definisjon av algebra. Hva som kan sies å være essensen, kan vi allikevel få et inntrykk av om vi ser på historiske beskrivelser av algebra (Lins, 1990; Kieran, 1996, 2004; Jakobsson-Åhl, 2006). En mulighet er å firedele algebraen i operasjonell symbolisme, tenkemåte, generalisert tallære og strukturer. Algebra som operasjonell symbolisme handler blant annet om at vi har brukt symbol på ulike måter opp gjennom tiden, hvor vi finner den klassiske tredelingen av representasjonsformen som retorisk, synkopert og symbolsk. Kieran (1990) er en av dem som mener at en del kognitive prosesser som er involvert i læringen av algebra har paralleller til den historiske utviklingen av algebra som et symbolsystem. Denne formen for det genetiske prinsippet (Mosvold, 2001) finner vi tydeligere i L97 (KUF, 1997) og LK06 (UFD, 2005) enn i M87 (KUF, 1987).

Det er ikke noen uttalt enighet hva algebraisk tenkemåte er, men forskere som Charbonneau (1996), Kieran (1996, 2007) og Lee (2001) drøfter dette. En av de viktigste sidene ved algebraisk tenking er betydningen av generalisering. Mason (1996) mener at dersom elevene blir vant med å generalisere fra starten av, vil algebra opphøre å være et problem. Generalisering er blant annet det å oppdage likheter, å repetere, å klassifisere og å kategorisere. Slike aktiviteter kan sees på som en måte å minimere oppmerksomheten på, og som Mason (1996) mener er selve røttene til algebra.

Algebra som generalisert tallære er trolig det synet som dominerer i læring og undervisning av elementær algebra i dag (Lee, 2001). Wu (2001) uttrykker at generalisert tallære handler om to ting, abstraksjon og generalisering. I følge Sfard og Linchevski (1994) kan den elementære algebraen bli beskrevet som generalisert tallære i henhold til en operasjonell og strukturell dualitet. De skiller mellom en operasjonell og strukturell oppfatning og mener at algebraen utvikler seg gjennom en rekke mer og mer avanserte overganger fra operasjonell til strukturell oppfatning. Det vil si at uttrykk som i tallæren blir oppfattet som en prosedyre, kan bli oppfattet som et objekt i algebraen, som igjen kan bli del av en større prosedyre og dermed bli oppfattet som et nytt og større objekt (Bjørnestad, Kongelf & Myklebust, 2013). Sitatet fra læreplanen om at "algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar og andre symbol representerer tal" (UFD, 2005, s. 3) gjør at vi forventer algebra som generalisert tallære i lærebøkene.

Det fjerde synet på algebra er som strukturer. Her tar vi utgangspunkt i strukturelle likheter, ikke bare generaliseringer fra de kjente tallstrukturene, men også avbildninger knytt til funksjonsbegrepet. En algebraisk struktur er en mengde med tilhørende binære operasjoner.

Denne formen for algebra blir ofte kalt abstrakt algebra, og er ikke vanlig å møte før på universitetsnivå.

Hva er algebra i læreplanen?

På samme måte som det er problematisk å enes om en definisjon på algebra, er det heller ingen enighet om hva algebra er i skolen. Kendal og Stacey (2004) uttrykker at det ikke eksisterer kun en måte å undervise og nærme seg algebraen på, og at det ikke er mulig å lage en liste over innhold som beskriver skolealgebraen. De konkluderer med at algebra er for stort til å passe i læreplanen, slik at det er helt nødvendig for hvert land å velge ut hvilket innhold emnet skal ha. Oppfattelsen av algebra i skolen har variert både over tid og i læreplaner (Sutherland, 2002; Kendal og Stacey, 2004), som kan eksemplifiseres ved Jakobsson-Åhls (2006) beskrivelse av skolealgebraen i Sverige fra 1960 til 2000. Skolealgebraen har blitt beskrevet som et eget emne, som en del av den moderne matematikken, som et verktøy i problemløsning og som en kompetanse. Algebra ble behandlet som et eget emne i skolen fra første halvdel av 1900-tallet, hvor innholdet stort sett var det samme og preget av formell manipulasjon (Donoghue, 2003). Etter andre verdenskrig ble matematikken modernisert og sett på som vitenskapen om formelle strukturer, hvor mengdelæren sammen med funksjoner og algebraiske strukturer stod sentralt. På 1960- og 1970-tallet var tiden inne for å fokusere mer på anvendt matematikk. Algebraen fikk da plass som verktøy i problemløsning. I dag finner vi eksempel på algebra uttrykt som en kompetanse (Crawford, 2001; Niss & Jensen, 2002; MacGregor, 2004; Kieran, 2004). Slike kompetansebeskrivelser finner vi også i den norske læreplanen ved at "Problemløysing høyrer med til den matematiske kompetansen" (UFD, 2005, s. 2), hvor vi kjenner igjen én av Niss & Jensens (2002) åtte delkompetanser.

De fire synene på skolealgebraen bør ikke betraktes som motsetningsfylte, men heller som komplementære. I LK06 (UFD, 2005) finner vi synene igjen i algebraens ulike roller. De fem hovedområdene på ungdomstrinnet er alle klassiske matematiske emner som spiller roller som egne emner, hvor algebra er satt i sammenheng med tall. At algebra også kan sees på som et verktøy i problemløsning finner vi eksemplifisert i kompetansemålet "[...] bruke [...] tal og variablar i [...] praktisk og teoretisk problemløysing [...]" (UFD, 2005, s. 8). Algebra som en kompetanse finner vi ikke direkte belegg for i læreplanen, men siden problemløsning er en del av den matematiske kompetansen, og problemløsning er et kompetansemål i algebra, er det mulig å se spor av algebra som kompetanse også. Det vil si at vi finner spor av tre av de fire synene i læreplanen.

Algebraens store virkeområde og ulike roller (Costello, 1991; Bell, 1995) får naturligvis konsekvenser for forfatternes prioriteringer, elevenes læring og lærernes undervisning. Wheeler (1996) uttrykker det slik:

> [...] we want students of algebra to come to know how to use it to solve problems, to model situations, to handle functions, and to make generalizations. Choosing one of these as a starting point affects how the others can be reached. (Wheeler, 1996, s. 325)

Sitatet setter en ramme for studien vår når vi skal karakterisere introduksjonskapitlene i algebra. Læreplanen har satt algebra sammen med tall, og uttrykker at "Algebra i skulen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. Algebra blir og nytta i samband me hovudområda geometri og funksjonar" (UFD, 2005, s. 3). Dette tolker vi som at en skal ta utgangspunkt i tallære og introdusere algebra gjennom å studere mønster og tallmessige sammenhenger. Algebramanipulasjon kommer da etter at en har arbeidet med å skape mening til bokstavene, gjennom for eksempel mønsteroppgaver. Det er denne tolkingen vi har av læreplanen.

En annen tolking er at en skal introdusere algebra som regning med bokstaver på lik linje som regning med tall. Arbeidet med algebramanipulasjon kan da komme før en har arbeidet med mønster. Disse to tolkningsmulighetene er radikalt ulike i den betydningen av at førstnevnte legger forholdene til rette for en induktiv tilnærming hvor behovet for bokstaver kommer som en naturlig konsekvens av ønsket om å uttrykke seg generelt. Bokstavene blir da først og fremst introdusert som symbol for noe som varierer. Vi kan si at det er selve variabelaspektet i variabelbegrepet som er i fokus. Velger en å introdusere variabelbegrepet gjennom algebramanipulasjon, er det ikke like naturlig å fokusere på variabelaspektet fordi en er mest opptatt av å manipulere uttrykk. Den siste setningen i sitatet gjør at vi ikke forventer at lærebøkene bruker funksjoner som inngangsport til algebra, til tross for at det ble gjort i Norge med M87 (KUF, 1987), og fortsatt gjøres i en rekke land i dag (Kieran, 2007). Det at bokstavenes roller er kontekstavhengig, som uavhengige og avhengige variable i funksjonssammenheng, $y = 2x + 6$, som ukjente i likninger, $2x + 6 = 0$, og som generaliserte tall i generaliseringer, $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$, gjør det nødvendig med en tydelig introduksjon til bokstaver som symbol for variable størrelser. Algebra ble i L97 (KUF, 1996, s. 156) beskrevet som et tema som "[...] krever spesiell oppmerksomhet fordi det i noen grad bryter med tidligere tenkemåter". Sitatet omhandler diskontinuiteter mellom tallære og algebra (Bjørnestad, Kongelf & Myklebust, 2013), og inneholder blant annet Küchemanns (1981) kategorier for elevers oppfatning av bokstaver, inklusiv misoppfatningen om bokstav som objekt. Elever som har denne misoppfatningen, kan tenke at *a* står for objektet appelsin, og med det kunne argumentere for at $2a + 3a = 5a$ fordi 2 appelsiner og 3 appelsiner er det samme som 5 appelsiner. Innholdet i sitatet fra L97 (KUF, 1996) er like aktuelt for dagens læreplan (UFD, 2005).

Metodologi

Metode

Studien er basert på en induktiv kvalitativ innholdsanalyse, "[...] a research method for the subjective interpretation of the content of text data through the systematic classification process of coding and identifying themes or patterns" (Hsieh & Shannon, 2005, s. 1278). Gjennom meningssøkende og tolkende undersøkelser har den kvalitative innholdsanalysen gitt oss muligheten til å karakterisere introduksjonskapitlene i algebra på en subjektiv, men vitenskapelig måte. Funnene er et produkt av våre ferdigheter, kunnskaper og analytiske evner. Vi har brukt en induktiv analyse fordi vi ikke kjente til tilsvarende studier. I analysen har de ulike kategoriene oppstått fra selve datamaterialet gjennom en rekke undersøkelser og sammenligninger. De fire hovedkategoriene er av generell karakter og basert på sammenfallende enkelttilfeller i de ulike lærebøkene.

Innholdsanalysen startet med at vi valgte ut de respektive kapitlene, som introduserte bokstaver som symbol for variable størrelser for første gang, som analyseenhet. Det var i algebrakapitlet i fire 8. klassebøker og i en 9. klassebok, og i funksjonskapitlet i en 8. klassebok. Det neste var å forstå datamaterialet. Etter flere og flere gjennomlesninger ble vi mer og mer fortrolige med materialet, og vi kunne starte med å organisere de kvalitative dataene. Gjennom en åpen koding hvor vi skrev ned egne kommentarer i margen for hver nye gjennomlesning, dannet vi et grunnlag for å kunne opprette mer generelle beskrivelser systematisert i kategorier. Vi overførte kommentarene, som stod i margen på lærebøkene, til Word-dokument. Disse dannet grunnlaget for den første genereringen av kategorier, som bestod av kommentarer med tilnærmet likt innhold. Vi leste deretter igjennom lærebøkene på ny med disse kategoriene som referanse for å kunne gruppere delkategorier som utgjorde en større felles kategori. Ved å gruppere datamaterialet på denne måten reduserte vi antall kategorier ved å samle observasjoner som var tilnærmet like, men like viktig var det at denne klassifiseringen innebar en kontinuerlig sammenligning mellom ulike deler av materialet som ikke hørte til samme kategori (Bryman, 2008). De endelige kategoriene som gjør oss i stand til å gi en karakteristikk av introduksjonskapitlene i algebra er:

1. Lager ikke forbindelser til tallære
   a) i utregninger
   b) om notasjoner
2. Tilrettelegger for utvikling av misoppfatninger gjennom
   a) regler
   b) kontekster og forklaringer
3. Variabelaspektet kommer ikke tydelig frem i
   a) kontekster
   b) forklaringer
4. Feil bruk av multiplikator og multiplikand i oversettinger mellom situasjoner beskrevet med tekst og matematiske symbol.

Når det gjelder den kvalitative innholdsanalysens gyldighet og pålitelighet, er førstnevnte gitt siden det vi skal analysere er deler av innholdet i de fysiske lærebøkene. For å vise påliteligheten vil vi presentere en rekke autentiske tekstutsnitt og beskrive analysen som ligger til grunn for kategoriseringen. Når det gjelder gyldighet knytt til innhold har vi brukt en erfaren matematikklærer og matematikkdidaktikker til å undersøke funnene i en tilfeldig valgt lærebok. Resultatet var i høy grad sammenfallende.

En utfordring ved kvalitative innholdsanalyser er at de er mer komplekse, og i langt mindre grad standardiserte og formulerte, enn tradisjonelle kvantitative innholdsanalyser (Elo & Kingsa, 2008). I tillegg har funnene ofte et format som ikke er like forenelig med plass og ordbegrensninger i vitenskapelige artikler. For å imøtekomme dette har vi vært selektive i presentasjonen av funnene. Vi har valgt å presentere de typiske funnene, kategoriene, i tabellform sammen med utvalgte autentiske eksempler. For å vise rikholdigheten i datamaterialet, har vi valgt å eksemplifisere enkelte ikke-typiske funn også.

Studien vår kan plasseres innenfor segmentet lærebok – matematikk i Rezat og Sträßers (2013, s. 471) didaktiske tetraeder, som beskriver metodologiske tilnærminger i matematikkdidaktikken. Studien kan videre plasseres innenfor et algebradidaktisk perspektiv.

Utvalg av lærebøker

Vi har tidligere gitt en karakteristikk av heuristiske tilnærmingsmåter i seks læreverk brukt på ungdomstrinnet i Norge (Kongelf, 2011). For å få et mer sammensatt bilde av disse, er de samme læreverkene valgt når vi nå skal gi en karakteristikk av introduksjonskapitlene i algebra. I læreverket Kode X (Christensen, 2007) er introduksjonen i 9. klasse, mens i de andre, Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006), Nye Mega (Guldbrandsen, Melhus & Løchsen, 2006), Tetra (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006), Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2006) og Grunntall (Bakke & Bakke, 2006), er det i 8. klasse. Alle lærebøkene er skrevne av norske forfattere, bortsett fra Tetra som er en oversetting fra svensk.

Datainnsamling

Alle sidene i introduksjonskapitlene er analysert bortsett fra øvingsoppgavene. Det er kun én lærebok som benytter samme navn på kapitlet, *tall og algebra*, som læreplanen bruker på hovedområdet. Fire av seks introduserer bokstaver som variable størrelser gjennom et algebrakapittel, mens én gjør det gjennom et funksjonslærekapittel kalt sammenhenger. Antall sider i Kode X (Christensen, 2007) skiller seg ut, som i stor grad kan forklares ved at dette læreverket ikke har algebra i 8. klasseboken (se tabell 1).

Tabell 1. *Datamaterialet*

Lærebok	Kapittelnavn	Antall sider
Faktor 1	Tall og algebra	26
Kode X 9A	Algebra	114
Nye Mega 8B	Algebra	36
Tetra 8	Algebra	41
Sirkel 8B	Sammenhenger	54
Grunntall 8	Algebra	24

Funn og diskusjon

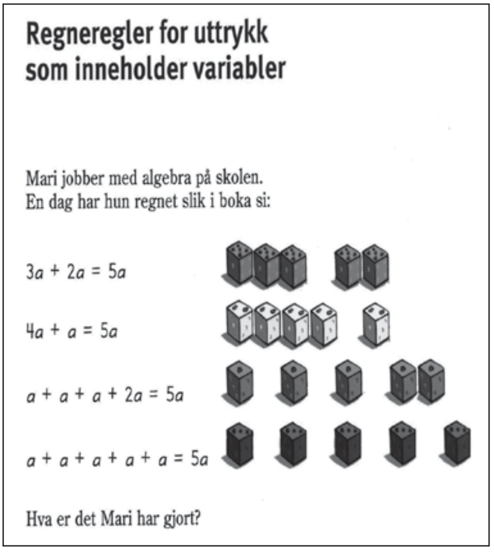
Ser vi på lærebøkene sammen med kategoriene, genererer det en informativ matrise av data (tabell 2). Matrisen viser blant annet at Faktor 1 (Hjardar & Pedersen, 2006) inneholder eksempler på alle kategoriene bortsett fra 1 a), som handler om at en ikke lager forbindelser til tallære i utregninger. Vi legger ellers merke til at 1 b), lager ikke forbindelser til tallære om notasjoner, og 3b), variabelaspektet kommer ikke tydelig frem i forklaringer, finnes i alle bøkene. For å få et mer innholdsrikt bilde av matrisen, ser vi på eksempler på de ulike kategoriene. Vi starter med et tekstutsnitt som først og fremst eksemplifiserer 1 a), men som også viser hvordan 2 b) og 2 a) kommer til uttrykk (se figur 1).

Tabell 2. *Matrise bestående av lærebøker og kategorier*

Kategori	Lærebok					
	Faktor 1	Kode X 9A	Nye Mega 8B	Tetra 8	Sirkel 8B	Grunntall 8
1 a)		+	+	+	+	+
1 b)	+	+	+	+	+	+
2 a)	+	+	+			+
2 b)	+	+	+			+
3 a)	+	+		+	+	+
3 b)	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+		+	+

Lager ikke forbindelser til tallære i utregninger

Vi deler teksten opp i to deler, hvor figur 1 viser 1a) og 2b), og figur 2 viser 2a). Teksten utgjør det første møtet med å forenkle algebraiske uttrykk. Variabeluttrykkene er alle illustrerte med terninger, hvor eksempelvis $3a + 2a$ er illustrert med henholdsvis tre og to terninger. Det blir ikke gitt noen videre forklaring på hvorfor $3a + 2a = 5a$, bortsett fra at dette er en såkalt tenk og snakk-oppgave, som er definert som noe elevene skal diskutere seg i mellom. Muligheten med å lage en forbindelse til tallære, og det elevene kan om multiplikasjon som gjentatt addisjon,



Figur 1. *Eksempel fra Nye Mega 8B (Guldbrandsen m.fl., 2006, s.37)*

benyttes ikke av læreboken. Illustrasjonen med terninger er en form for konkretisering av det riktige svaret, $5a$, som en finner om en adderer tallfaktorene og beholder variabelen. Til tross for at illustrasjonen isolert sett kan hjelpe til med selve utregningen, bryter den radikalt med ideen om bokstaver som symbol for variable størrelser. Fremstillingen kan gi næring til den klassiske misoppfatningen bokstav brukt som objekt (Küchemann, 1981). Den misoppfatningen kan elevene ha med seg fra arbeidet i tallære, hvor de kan ha sett skrivemåten 1 m = 100 cm, mens andre kan få den gjennom det vi kaller for fruktsalatalgebra. Fruktsalatalgebra har ofte sitt utspring i at en i undervisningssammenheng opplever et behov for å konkretisere hvordan en trekker sammen algebraiske uttrykk. Å antyde at a kan stå for et objekt, som appelsin, kan gjøre at det virker logisk at $3a + 2a$ er det samme som $5a$ fordi "3 appelsiner og 2 appelsiner er det samme som 5 appelsiner". Selv om læreboken ikke direkte uttrykker at a står for objektet terning, kan illustrasjonen føre til at det virker fornuftig å argumentere med at siden "3 terninger pluss 2 terninger er det samme som 5 terninger", da må $3a + 2a = 5a$. På neste side i læreboken blir regneregelen presentert gjennom et utsagn som kan være med på å forsterke misoppfatningen hvor en ser på bokstav som objekt (figur 2).

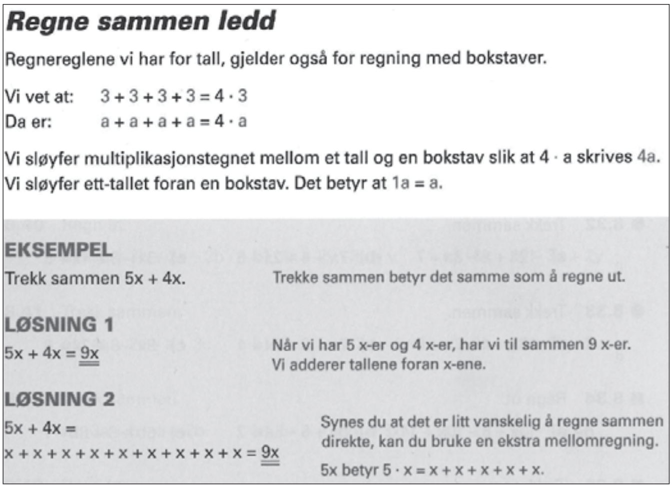
Med variabler har vi samme regneregler med pluss og minus som med tall: $5a + 2a = 7a$ $5a - 2a = 3a$

Figur 2. *Regneregel fra Nye Mega 8B (Gulbrandsen m.fl., 2006, s.38)*

Læreboken forsøker å knytte regneregler for variabler til kunnskaper om regneregler for tall, men tilknytningen blir bare i form av ord og ikke en matematisk forklaring. Den matematiske forklaringen på hvorfor vi kan addere tallene og la den felles variabelen stå er den distributive loven, $3a + 2a = (3+2)a = 5a$, eller alternativt multiplikasjon som gjentatt addisjon, $3a + 2a = 3 \cdot a + 2 \cdot a = a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$. Læreboken bruker ingen av disse og det er mulig å tolke at regneregler for konstanter og variabler ikke er like når vi tilsynelatende lar variabelen stå og bare adderer tallene. Utsagnets upresise formulering, og manglende matematiske forklaring og tilknytning til tallære, legger forholdene til rette for misoppfatningen bokstav brukt som objekt.

Lager ikke forbindelser til tallære om notasjoner

Neste eksempel (figur 3) viser en lærebok som starter med å lage tydeligere forbindelse til tallære, men som i praksis forlater den umiddelbart gjennom å presentere en annen løsningsmetode som løsning 1. Tekstutsnittet er kategorisert som både 1a) og 1 b), men skal her først og fremst eksemplifisere 1b).



Regne sammen ledd

Regnereglene vi har for tall, gjelder også for regning med bokstaver.

Vi vet at: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$
Da er: $a + a + a + a = 4 \cdot a$

Vi sløyfer multiplikasjonstegnet mellom et tall og en bokstav slik at $4 \cdot a$ skrives $4a$.
Vi sløyfer ett-tallet foran en bokstav. Det betyr at $1a = a$.

EKSEMPEL

Trekk sammen $5x + 4x$.

Trekke sammen betyr det samme som å regne ut.

LØSNING 1

$5x + 4x = \underline{\underline{9x}}$

Når vi har 5 x-er og 4 x-er, har vi til sammen 9 x-er.
Vi adderer tallene foran x-ene.

LØSNING 2

$5x + 4x =$
$x + x + x + x + x + x + x + x + x = \underline{\underline{9x}}$

Synes du at det er litt vanskelig å regne sammen direkte, kan du bruke en ekstra mellomregning.
$5x$ betyr $5 \cdot x = x + x + x + x + x$.

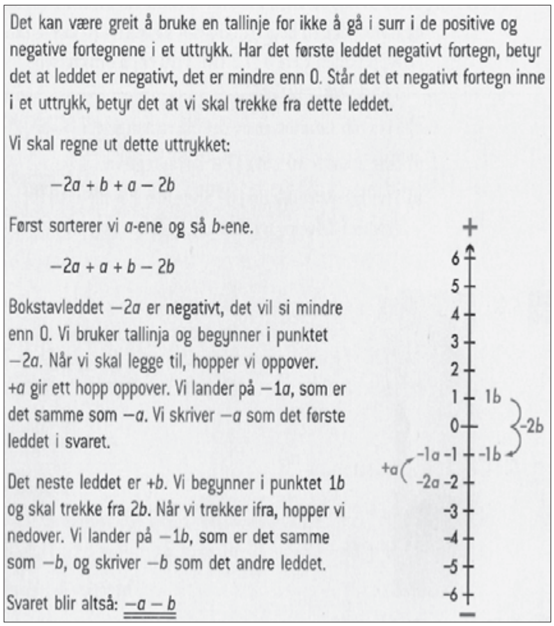
Figur 3. *Eksempel fra Grunntall (Bakke & Bakke, 2006, s. 219)*

Tekstutsnittet er første gang læreboken viser hvordan en regner sammen variabeluttrykk. Introduksjonsteksten starter med å lage en forbindelse til tallære og multiplikasjon som gjentatt addisjon, $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$, for variabeluttrykket $4 \cdot a$. Dette er en kjent didaktikk som er i tråd med læreplanen, men ser vi videre på eksemplet og hva som presenteres som løsning 1 og 2, blir forbindelsen kraftig svekket. Grunnen til det er at det er løsning 2, og ikke 1, som benytter seg av forbindelsen til tallære. At denne løsningen blir presentert som løsning 2, gjør at den ikke får samme status, noe som forsterkes gjennom utsagnet "Synes du at det er litt vanskelig å regne sammen direkte, kan du bruke en ekstra mellomregning." Løsning 1 fremstår som den smarte og effektive metoden som forklares ved at "Vi adderer tallene foran x-ene". Denne effektive, men semantisk fattige metoden, er en metode som elevene før eller siden vil lære seg. Det didaktiske spørsmålet er ikke om de skal lære denne, men når i undervisningsforløpet det bør skje? I denne læreboken er svaret med en gang. Det vil si at etter kun ett eksempel forventes det at en er klar for en ikke-triviell regning med variable størrelser.

Det konkrete eksemplet på delkategori 1 b) befinner seg i den siste setningen før eksemplet i form av ”Vi sløyfer ett-tallet foran en bokstav. Det betyr at ”$1a = a$.” ” Læreboken velger her ikke å forklare hvorfor $1a$ er a ved for eksempel å knytte det til talleksempel: $1 \cdot 2 = 2$, $1 \cdot 3 = 3$, ..., $1 \cdot 50 = 50$, ..., $1 \cdot n = n$.

Tilrettelegger for utvikling av misoppfatninger

Det neste tekstutsnittet (figur 4) er først og fremst et eksempel på delkategori 2 b), men inneholder også element fra 3 a) og 3 b).



Det kan være greit å bruke en tallinje for ikke å gå i surr i de positive og negative fortegnene i et uttrykk. Har det første leddet negativt fortegn, betyr det at leddet er negativt, det er mindre enn 0. Står det et negativt fortegn inne i et uttrykk, betyr det at vi skal trekke fra dette leddet.

Vi skal regne ut dette uttrykket:

$$-2a + b + a - 2b$$

Først sorterer vi a-ene og så b-ene.

$$-2a + a + b - 2b$$

Bokstavleddet $-2a$ er negativt, det vil si mindre enn 0. Vi bruker tallinja og begynner i punktet $-2a$. Når vi skal legge til, hopper vi oppover. $+a$ gir ett hopp oppover. Vi lander på $-1a$, som er det samme som $-a$. Vi skriver $-a$ som det første leddet i svaret.

Det neste leddet er $+b$. Vi begynner i punktet $1b$ og skal trekke fra $2b$. Når vi trekker ifra, hopper vi nedover. Vi lander på $-1b$, som er det samme som $-b$, og skriver $-b$ som det andre leddet.

Svaret blir altså: $\underline{\underline{-a - b}}$

Figur 4. *Eksempel fra Kode X(Christensen, A. S., 2007, s.18)*

Teksten handler om å forenkle uttrykk i delkapitlet ”Uttrykk med negative fortegn”, hvor læreboken prøver å besvare spørsmålet ”[...] hva skjer når du har bokstavuttrykk med negative fortegn?”. Læreboken bruker en tallinje som konkretisering, der tallinjen blir presentert både med tall og bokstaver, hvor -1a er plassert på samme plass som -1 og -1b. Det vil si at dersom illustrasjonen skal gi en matematisk mening, må vi ikke bare forutsette at $a = b$, men også at $a = b = 1$.

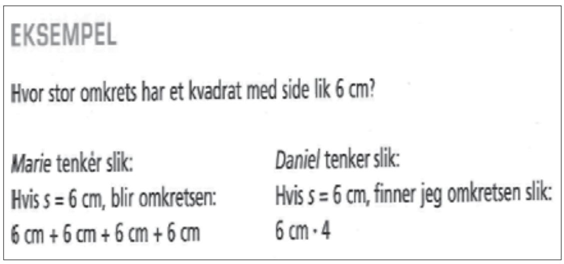
Teksten skiller ikke tydelig mellom regnetegn og fortegn. Den bruker ordet fortegn uavhengig om det er som binært eller singulært minus.

Det finner vi eksemplifisert i setning nummer to og tre. Siden dette er i introduksjonsfasen, forventer vi at læreboken presenterer addisjon og subtraksjon av positive algebraiske uttrykk før negative uttrykk. Vi forstår derfor eksemplet som at det egentlig tar for seg subtraksjon av positive algebraiske uttrykk.

Den første setningen forteller at konkretiseringen skal hjelpe oss til å forenkle regnearbeidet med algebraiske uttrykk. Den andre setningen starter med et utsagn som kun er riktig om vi forutsetter at leddet er konstant, og det er det ikke. Leddet -2*a* kan uttrykkes som negativt, men det betyr ikke nødvendigvis at verdien er mindre enn 0. Læreboken uttrykker seg trolig slik fordi det skal passe inn i konkretiseringen med tallinjen. Dette sees på som et tilfelle hvor det er konteksten som legger forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger knytt til variabelbegrepet. At det algebraiske uttrykket -2*a* er positivt så lenge a ≤ 0 og negativt så lenge a > 0, er en viktig del av variabelbegrepet som læreboken ikke tar hensyn til. Den tredje og siste setningen i det første avsnittet er heller ikke med på å klargjøre forskjellen mellom binært og singulært minus, som igjen gjør det unødig problematisk senere å forklare subtraksjon av negative bokstavuttrykk, som 2*a* – (-*a*) = 2*a* + *a*. -2*a* blir enda en gang definert til å være mindre enn 0, og nå forsøkt konkretisert i form av et punkt på tallinjen. Skal vi ta tallinjen på alvor ser vi at punktet for -2*a* er sammenfallende med punktet -2 og med det må konkludere med at *a* ikke varierer, men er lik 1. Dette er en uheldig konsekvens av ønsket om å prøve å konkretisere enkel algebraregning gjennom en utradisjonell konkretisering med tallinjen. I forklaringen av utregningen av -2*a* + *a* uttrykker en seg inkonsekvent i forhold til tidligere, hvor + *a* får rollen som en operasjon og ikke som et fortegn lengre. Dette forsterkes i neste setning gjennom "+*a* gir ett hopp oppover." Bevegelsen med hopp gir inntrykk av at det skjer noe, en opererer, mens tolkingen av +*a* som fortegn er mer som noe statisk på tallinjen. Videre velger boken ikke å gi noen forklaring på hvorfor -1*a* er det samme som -*a*, til tross for at dette er første gangen notasjonen brukes. Videre blir +*b* presentert som et ledd, når det egentlig er kun *b* som er leddet. +*b* blir heller ikke presentert som "ett hopp oppover" på lik linje med +*a*. Boken gir med det et inntrykk av at det er forskjell på +*a* og +*b* i form av om de representerer hopp eller ikke. +*b* blir omgjort uten noe form for kommentar til 1*b* og konkretisert med det sammenfallende punktet 1 på tallinjen. Til slutt får uttrykket 2*b* rollen som subtrahend når det uttrykkes at en "[...] skal trekke fra 2*b*". Denne subtraksjonen blir konkretisert på tallinjen gjennom å hoppe to nedover. Svaret, -*a* - *b*, blir til slutt paradoksalt ikke konkretisert på tallinjen til tross for at hele forklaringen er bygd opp rundt den.

Feil bruk av multiplikator og multiplikand

Eksemplet i figur 5 er det første etter at læreboken har presentert formelen for omkretsen til et kvadrat som O = $s + s + s + s$. Det blir presentert to løsninger i form av hvordan Marie og Daniel tenker. Maries tenkemåte er bruk av formelen, som akkurat er presentert, mens Daniels tenkemåte er det som utgjør det nye. I Daniels oversetting fra problemsituasjonen til det matematiske symbolspråket er multiplikator og multiplikand ikke bare bytt om i forhold til tolkingen av multiplikasjon som gjentatt addisjon, men også i forhold til multiplikasjon med måleenheter og normal rekkefølge på faktorene i formler, her O = 4s.



EKSEMPEL

Hvor stor omkrets har et kvadrat med side lik 6 cm?

Marie tenkèr slik:
Hvis s = 6 cm, blir omkretsen:
6 cm + 6 cm + 6 cm + 6 cm

Daniel tenker slik:
Hvis s = 6 cm, finner jeg omkretsen slik:
6 cm · 4

Figur 5. *Eksempel fra Sirkel 8B (Maugesten & Torkildsen, 2006, s.124)*

Variabelaspektet kommer ikke tydelig frem

Bokstaven x blir introdusert gjennom et tilsynelatende praktisk eksempel om alder, men analysen vår avdekker spesielt to ting (se figur 6). Det første er mangelen på logisk progresjon. Ved å ta utgangspunkt i problemet som skal løses, hvor gammel Hanna er om Bent er 10 år, trenger vi ikke et generelt uttrykk for Hanna sin alder i form av $x + 3$. Slik som eksemplet er lagt opp, vil de aller fleste kunne løse problemet umiddelbart uten noe behov for noe nytt. Det andre er at premissen i spørsmålet vedrørende Hanna sin alder, "Hvis Bent er 10 år, [...]", står i konflikt med at en rett etter på uttrykker at en kan tenke seg at x står for alderen til Bent og at x kan variere. Sammen med at det gir lite mening å hevde at alderen til Bent i dette konkrete eksemplet varierer, gjør dette at variabelaspektet ikke kommer tydelig fram. Konteksten gjør at bokstaven opptrer mer som en ukjent enn som en variabel. Vi forstår at alderen til en person vi ikke kjenner kan være hva som helst, men det er ikke tydelig hva en egentlig mener når en uttrykker at alderen til en konkret person her og nå kan variere. Det er måten forfatterne presenterer konteksten på her, som gjør dette utfordrende. Ser en på dette sammen med progresjonen kan en påstå at eksemplet er lite egnet som inngangsport


Uttrykk med variabler

Jeg er tre år eldre enn deg.

Jeg er x år gammel.

Hvis Bent er 10 år, hvor gammel er Hanna da?

Hanna er tre år eldre enn Bent.

Hvis vi tenker oss at x er et tall som står for alderen til Bent, så er alderen til Hanna

$x + 3$

Bokstaven x er her et symbol for et tall som kan *variere*. Det betyr at det kan ha forskjellige verdier. Vi sier at bokstaven er en *variabel*.

Hvis Bent er 10 år, så er $x = 10$. Da er alderen til Hanna

$10 + 3 = 13$

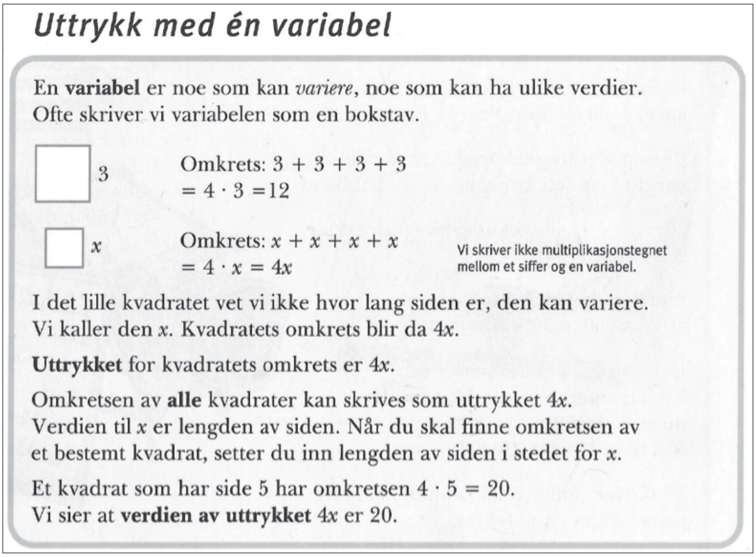
Hvis Bent er 11 år, så er $x = 11$. Da er alderen til Hanna

$11 + 3 = 14$

Figur 6. *Eksempel fra* Faktor *(Hjardar & Pedersen, 2006, s. 185)*

til hvorfor vi trenger bokstaver som symbol for variable størrelser. Det inntrykket forsterkes gjennom avslutningen hvor en presenterer to spesialtilfeller av Hanna sin alder ut i fra to ulike premiss, hvor Bent er henholdsvis 10 og 11 år. Progresjonen i dette eksemplet kan karakteriseres som at en beskriver en situasjon, stiller et spørsmål som en umiddelbart kan svare på, presenterer det nye fagstoffet gjennom et generelt uttrykk som brukes til å svare på spørsmålet en allerede vet svaret på. Det vil si at det nye, bokstaver som symbol for variable størrelser, ikke trengs for å kunne løse det egentlige problemet.

Figur 7 viser et nytt eksempel på manglende tydelighet av variabelaspektet. Læreboken starter med å definere en variabel, før den presenterer to kvadrat med sidelengder på henholdsvis 3 og x. Omkretsen blir regnet ut ved hjelp av multiplikasjon som gjentatt addisjon i både tall- og bokstavuttrykket. Notasjonen $4x$ presenteres umiddelbart uten forklaring, "Vi skriver ikke multiplikasjonstegn mellom et siffer og en variabel". Vi forstår dette som mellom tall og variabel, siden sifrene i tallsystemet vårt er de ti innbyrdes forskjellige symbolene vi bruker for å uttrykke



Uttrykk med én variabel

En **variabel** er noe som kan *variere*, noe som kan ha ulike verdier.
Ofte skriver vi variabelen som en bokstav.

3 Omkrets: $3 + 3 + 3 + 3$
$= 4 \cdot 3 = 12$

x Omkrets: $x + x + x + x$
$= 4 \cdot x = 4x$

Vi skriver ikke multiplikasjonstegnet mellom et siffer og en variabel.

I det lille kvadratet vet vi ikke hvor lang siden er, den kan variere.
Vi kaller den x. Kvadratets omkrets blir da $4x$.

Uttrykket for kvadratets omkrets er $4x$.

Omkretsen av **alle** kvadrater kan skrives som uttrykket $4x$.
Verdien til x er lengden av siden. Når du skal finne omkretsen av et bestemt kvadrat, setter du inn lengden av siden i stedet for x.

Et kvadrat som har side 5 har omkretsen $4 \cdot 5 = 20$.
Vi sier at **verdien av uttrykket** $4x$ er 20.

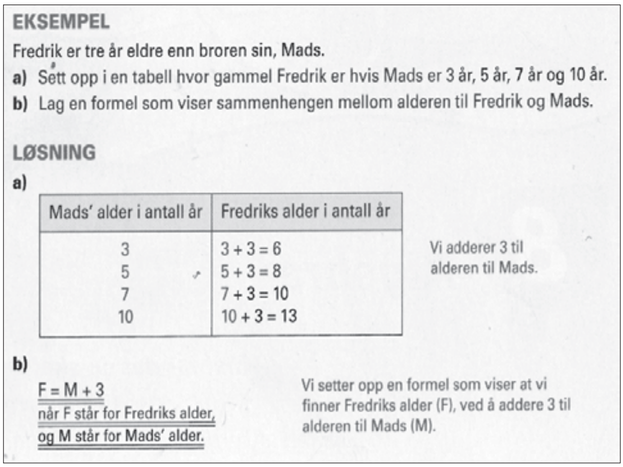
Figur 7. *Eksempel fra Tetra (Hagen m.fl., 2006, s.90)*

ethvert tall med. Illustrasjonene viser videre at det minste kvadratet er det med sidelengde x og det uttrykkes at "I det lille kvadratet vet vi ikke hvor lang siden er, den kan variere". Siden dette er det første møtet med bokstaver som variable tallstørrelser, er det på sin plass å kommentere teksten. Vi som allerede kjenner variabelbegrepet, vil være i stand til å forstå hva som er det egentlige matematiske innholdet her. Men for dem som ikke har det, kan det være vanskelig å se for seg at sidelengden kan være hvilket som helst tall, når en skriver at sidelengden i det lille kvadratet kan variere. Slik som setningen er bygd opp, ved at vi ikke vet hvor lang siden er, og med kun ett illustrert spesialtilfelle, gjør at sidelengden opptrer mer som en ukjent enn som en variabel. Vi må også ta i betraktning at vi ser ett konkret lite kvadrat hvor størrelsen blir sammenlignet med ett annet konkret kvadrat med sidelengde 3. Vi er ofte opptatt av figurer og det vi lett kan se, og det vi først og fremst ser her er ett lite kvadrat som vi ikke kjenner lengden til. Det er ikke trivielt å kunne klare å se på det lille kvadratet som en illustrasjon for ethvert kvadrat, altså et generelt kvadrat, etter bare å ha sett ett kvadrat rett før. Riktignok uttrykkes det lengre ned at "Omkretsen av alle kvadrater kan skrives som uttrykket $4x$", men linken mellom dette og illustrasjonen er ikke tydelig. I tillegg er formuleringen om det lille kvadratet med på å henvise til ett konkret kvadrat og ikke et generelt kvadrat.

Hittil har vi presentert funn som er typiske for lærebøkene, men vi ønsker også å vise enkelte ikke-typiske funn som kan være med på å gi et mer utfyllende bilde. Vi starter med inkonsekvent skrivemåte for den variable.

Ulike skrivemåter for den variable

Læreboken starter med å skrive den variable med stor bokstav uten kursiv, deretter liten bokstav med kursiv og til slutt liten bokstav uten kursiv (figur 8, 9, 10).



EKSEMPEL

Fredrik er tre år eldre enn broren sin, Mads.

a) Sett opp i en tabell hvor gammel Fredrik er hvis Mads er 3 år, 5 år, 7 år og 10 år.

b) Lag en formel som viser sammenhengen mellom alderen til Fredrik og Mads.

LØSNING

a)

Mads' alder i antall år	Fredriks alder i antall år
3	3 + 3 = 6
5	5 + 3 = 8
7	7 + 3 = 10
10	10 + 3 = 13

Vi adderer 3 til alderen til Mads.

b)

F = M + 3
når F står for Fredriks alder,
og M står for Mads' alder.

Vi setter opp en formel som viser at vi finner Fredriks alder (F), ved å addere 3 til alderen til Mads (M).

Figur 8. *Eksempel fra* Grunntall *(Bakke & Bakke, 2006, s. 214)*

Eksemplet i figur 8 er lærebokens introduksjon til variabelbegrepet, hvor variablene er skrevet med ukursiverte store bokstaver, F og M. At læreboken bruker stor bokstav for Fredriks alder kan delvis forklares ved at vi ofte bruker stor bokstav for den avhengige variabelen i matematiske formler. Hvorfor den bruker stor bokstav for alderen til Mads, lar seg ikke forklare på samme måte. Personnavn blir som kjent skrevet med stor forbokstav, og det at læreboken bruker store bokstaver for alderen til Fredrik og Mads kan gjøre at en heller tenker på personene Fredrik og Mads, enn alderen til dem. En legger da forholdene til rette for misoppfatningen bokstav brukt som objekt. Læreboken følger heller ikke vanlig praksis siden den utelater kursiv skrift på den variable, og med det bidrar til at forskjellen mellom bokstav brukt som forkorting av personnavn og bokstav brukt som variabel ikke blir tydelig. I resten av delkapitlet brukes det konsekvent stor bokstav uten kursiv for den variable, mens i det påfølgende delkapitlet er det små kursiverte bokstaver (figur 9).

Verdien av et uttrykk

Når vi har et uttrykk eller en formel, kan vi sette inn tall og regne ut verdien. Fra tidligere kjenner du sikkert formelen for arealet og omkretsen av et kvadrat der siden er *s*.

Arealet: $s \cdot s$
Omkretsen: $s + s + s + s = 4 \cdot s$

Dersom vi vet hvor lang siden *s* er, kan vi finne arealet og omkretsen ved å bytte ut *s* med sidens lengde og regne ut.

Figur 9. *Eksempel fra Grunntall (Bakke & Bakke, 2006, s. 215)*

Den variable sidelengden blir her korrekt skrevet i kursiv og har nå fått den ordinære notasjonen i form av liten bokstav. Formelen for omkretsen er også forklart gjennom den korrekte gjentatte addisjonen, $s + s + s + s = 4 \cdot s$. Variabeluttrykket $4 \cdot s$ er ikke skrevet forkortet som $4s$, som kan være med på å fremheve det matematiske innholdet i uttrykket. Vi merker oss at en om den variable skriver at "[...] siden er *s*". Ved å skrive at *s* er siden og ikke sidelengden, er en med på å tilrettelegge for misoppfatningen bokstav brukt som objekt. Når en skriver at siden er *s*, er det lett å tolke *s* som et navn på linjen, på lik linje med navnet på en person. Uttrykksmåten "Dersom vi vet hvor lang siden *s* er [...]" forsterker dette.

På den neste siden i læreboken er den variable fortsatt skrevet med liten bokstav, men nå ikke med kursiv skrift lenger (figur 10).

EKSEMPEL

Regn ut verdien av 2 · a + b når a = 2 og b = 3.

LØSNING

2 · a + b =
2 · 2 + 3 =
4 + 3 = 7

Vi erstatter a og b med verdiene (tallene) som a og b har, og regner ut.

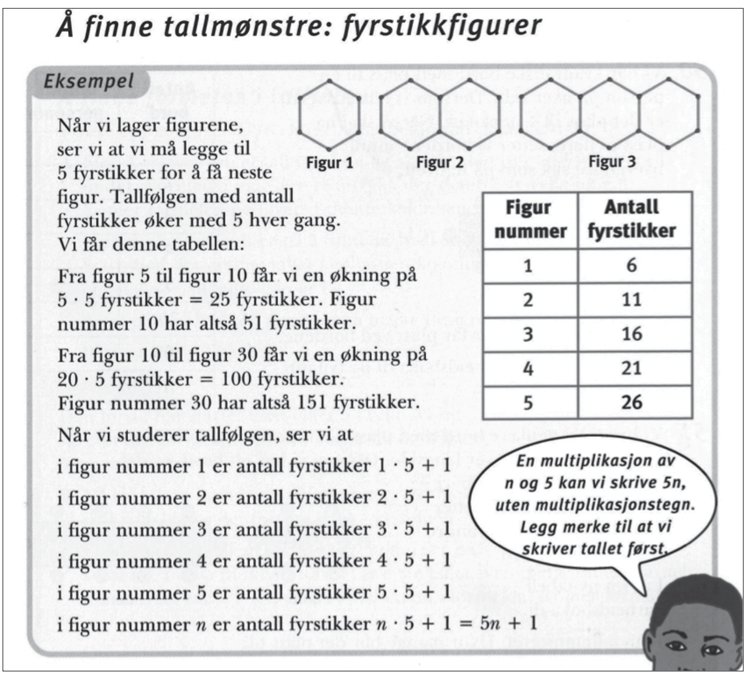
Figur 10. *Eksempel fra Grunntall (Bakke & Bakke, 2006, s. 215)*

Notasjonen med å skrive de variable uten kursiv blir gjort i resten av kapitlet, bortsett fra på to figurer og ett tilfelle hvor den variable er spesifisert i antall cm. I disse tre tilfellene står den variable i kursiv. Selv om det er mulig å se en form for mønster i når læreboken velger kursiv og ikke-kursiv, og stor og liten bokstav, blir dette ikke kommentert. I trykt skrift er det vanlig å skrive den variable i kursiv, og vi ser på den manglende konsekvente notasjonen som et illustrerende eksempel på lærebøkenes lite tydelige fremstilling av den variable spesielt, og algebraen generelt.

Det siste eksemplet er et sjeldent tilfelle av hvordan leting etter mønster kan føre frem til et variabeluttrykk.

Mønster som utgangspunkt for et variabeluttrykk

Eksemplet (figur 11) tar utgangspunkt i et mønster, beskrevet geometrisk og med tall, som grunnlag for det generelle algebraiske uttrykket. Eksemplet er med på å synliggjøre forbindelser mellom tall og algebra gjennom leting etter mønster, og med det ligger forholdene til rette for læreplanens ønske om at algebra skal "generaliserer talrekning" (UFD, 2005, s. 3). Algebraen kommer her som en naturlig konsekvens av et ønske om å uttrykke seg generelt. Konteksten og progresjonen fra det spesielle til det generelle legger forholdene til rette for at elevene selv er med på å gi mening til, og forstå, hvorfor vi trenger bokstaver som symbol for variable størrelser. Dette didaktiske aspektet svekkes kraftig gjennom valget med å plassere eksemplet til slutt i kapitlet, og med det blir en avslutning og ikke en introduksjon til algebra.



Å finne tallmønstre: fyrstikkfigurer

Eksempel

Figur 1 Figur 2 Figur 3

Når vi lager figurene, ser vi at vi må legge til 5 fyrstikker for å få neste figur. Tallfølgen med antall fyrstikker øker med 5 hver gang. Vi får denne tabellen:

Figur nummer	Antall fyrstikker
1	6
2	11
3	16
4	21
5	26

Fra figur 5 til figur 10 får vi en økning på $5 \cdot 5$ fyrstikker = 25 fyrstikker. Figur nummer 10 har altså 51 fyrstikker.

Fra figur 10 til figur 30 får vi en økning på $20 \cdot 5$ fyrstikker = 100 fyrstikker. Figur nummer 30 har altså 151 fyrstikker.

Når vi studerer tallfølgen, ser vi at

i figur nummer 1 er antall fyrstikker $1 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 2 er antall fyrstikker $2 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 3 er antall fyrstikker $3 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 4 er antall fyrstikker $4 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 5 er antall fyrstikker $5 \cdot 5 + 1$

i figur nummer n er antall fyrstikker $n \cdot 5 + 1 = 5n + 1$

En multiplikasjon av n og 5 kan vi skrive 5n, uten multiplikasjonstegn. Legg merke til at vi skriver tallet først.

Figur 11. *Eksempel fra Tetra (Hagen m.fl., 2006, s. 99)*

Oppsummering av funn og refleksjon

Funnene våre tyder på at det er til dels manglende samsvar mellom læreplanens fortolkede intensjon og lærebøkenes fremstilling når det gjelder hvordan bokstaver brukt som symbol for variable størrelser blir introdusert. De manglende samsvarene arter seg på flere måter, men felles for lærebøkene er at algebraen i liten grad generaliserer tallæren, som i følge Mason (1996) er den viktigste siden ved algebraisk tenking, og nøkkelen til at algebra ikke forblir et problememne. Den manglende sammenhengen til tall blir forsterket gjennom eksempel hvor progresjonen, konteksten og forklaringen gjør at variabelaspektet ikke kommer tydelig frem. Mangelfulle sammenhenger kan relativt enkelt unngås ved at lærebøkene benytter seg av en rekke spesialtilfeller med tall som grunnlag for det generelle uttrykket med bokstaver. Vi ønsker å eksemplifisere dette gjennom å endre eksemplet om alderen til Hanna og Bent i figur 6 (Hjardar & Pedersen, 2006, s. 185).

> Tenk deg en jente som heter Hanna, og en gutt som heter Bent, som vi ikke kjenner alderen til. Det eneste vi vet er at Hanna er 3 år eldre enn Bent. Ved å bruke denne informasjonen ønsker vi å finne et uttrykk for alderen til Hanna. Vi tenker oss at dersom Bent er 10, da må Hanna være 10 + 3. Dersom Bent er 11, da må Hanna være 11 + 3. Dersom Bent er 15, da må Hanna være 15 + 3. Vi setter det opp i en oversiktlig tabell.

Bent	Hanna
10	10 + 3
11	11 + 3
:	:
15	15 + 3

> Antall år som Bent er, vet vi ikke, men vi vet at det er ett tall. Siden vi ikke vet hvilket tall det er, kan vi kalle det for x. Dersom Bent er x år, hva kan vi da si om alderen til Hanna? Bruk tabellen og se etter et mønster som kan hjelpe. Vi ser da at alderen til Hanna er Bent sin alder pluss 3.

Bent	Hanna
10	10 + 3
11	11 + 3
:	:
15	15 + 3
:	:
x	$x + 3$

> Vi har nå laget oss et uttrykk, $x + 3$, som viser alderen til Hanna, til tross for at vi ikke vet alderen til Bent.

Dette er nytt for elevene, og som de ikke kan svare umiddelbart på, noe som gjør at det er lettere å gi mening til og overbevise elevene om hvorfor vi trenger bokstaver som symbol for variable størrelser. Bokstaven kommer her som en konsekvens av et ønske om å uttrykke seg generelt. I vår alternative fremstilling tar vi på alvor Masons (1996) tanker om å gå fra en rekke tallmessige spesialuttrykk til et generelt algebraisk uttrykk, og med det vektlegger bokstav brukt som generalisert tall.

For fem av de seks analyserte lærebøkene kan den manglende sammenhengen mellom tall og algebra forklares gjennom de to tolkningsmulighetene hvor mønster og tallmessige sammenhenger kommer enten før eller etter algebramanipulasjon. For læreboken som introduserer den variable gjennom funksjoner, og med det er mer i tråd med M87 (KUF, 1987) enn LK06 (UFD, 2005), kan det sees på som en materialisering av Kendal & Staceys (2004) påstand om at det ikke eksisterer kun en måte å nærme seg algebraen på. Det manglende samsvaret mellom lærebøkene og dagens læreplan korrelerer med Alseth m. fl. (2003) sitt algebrafunn i lærebøkene fra L97-perioden (KUF, 1996), og er et nytt eksempel på at den implementerte læreplanen avviker fra den intenderte planen. Det inntrykket forsterkes ved at eksempler som inneholder mønster, som Hagen m. fl. (2006, s. 99), plasseres til slutt i kapitlet. En mulig forklaring på det er at algebra tradisjonelt sett har hatt et sterkt manipulasjonsfokus, men det kan også forklares ved at mønster kun blir nevnt i kompetansemålene etter 7. trinn og at algebra vanligvis ikke er et eget emne før i 8-. eller 9. klassebøkene. I tillegg er lærebøkene for ungdomstrinnet ofte skrevet av andre forfatteren enn på mellomtrinnet. I praksis kan det bety at mønster, som er beskrevet etter 7. trinn, ikke tas hensyn til når en skal skrive lærebøker for 8.–10. trinn. Forfatterne skriver først og fremst ut fra kompetansemålene etter 10. trinn, og der står det ingenting om mønster. Funnene våre gir økt næring til forslagen 9–12 i rapporten om matematikk i norsk skole anno 2014 (Utdanningsdirektoratet, 2014, s. 96), hvor det foreslås kompetansemål etter 8. og 9. trinn, mer detaljerte kompetansemål og styrking av algebra i læreplanen.

Når det gjelder de fire historiske beskrivelsene av skolealgebraen, opptrer den først og fremst som et eget emne i de seks lærebøkene. Emnet består primært av formell manipulasjon med bokstavuttrykk, hvor det vies lite oppmerksomhet til hvorfor en kan manipulere. Lærebøkene benytter i begrenset grad mulighetene til å bygge videre på elevenes kunnskaper i tallære, som igjen fører til at algebraen fremstår som langt mer isolert enn den trenger å være. Det inntrykket forsterkes ved at lærebøkene introduserer forkortede skrive- og utregningsmåter med en gang, samt at det er kun én lærebok som bruker samme navn på introduksjonskapitlet, tall og algebra, som læreplanen bruker på hovedområdet.

Wheelers (1996, s. 325) påstand om at den valgte introduksjon får konsekvenser for hvordan de andre sidene av algebraen kan nås, gjelder selvfølgelig for de analyserte lærebøkene også. Lærebøkenes fokus på manipulasjon, og manglende generaliseringer fra tallæren, legger ikke forholdene til rette for verken variabelaspektet, bokstavenes kontekstavhengighet eller hvorfor vi trenger bokstaver som symbol for variable størrelser. Hovedområdet tall og algebra innbyr til en induktiv tilnærming hvor bokstavene kommer som en naturlig konsekvens av ønsket om å uttrykke seg generelt. En slik tilnærming vil også være med på å dempe misoppfatningen bokstav brukt som objekt, fordi bokstavenes rolle blir først og fremst som symbol for noe som varierer.

Konklusjon

Introduksjonen til bokstaver som symbol for variable størrelser varierer med hensyn til klassetrinn, mengde og kontekst. Samtidig har lærebøkene det til felles at de i liten grad benytter mulighetene til å bygge videre på og dra sammenligninger til tallære. Algebra fremstår som et isolert emne til tross for at det er satt sammen med tall i læreplanen. Innholdet er i hovedsak algebramanipulasjon, hvor en i liten grad legger opp til begrunnelser for notasjon og hvorfor en kan bedrive manipulasjon. Konteksten og progresjonen i eksemplene gjør at variabelaspektet blir lite tydelig. I tillegg finner vi feilaktige formuleringer, illustrasjoner og matematiske resonnement, som legger forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger. Algebrakapitlene fremstår i sin helhet som lite påvirket av intensjonen med hovedområdet tall og algebra, og av algebradidaktisk forskning og utvikling.

Studien har gitt ny kunnskap om hvordan norske ungdomsskolebøker introduserer algebra. Den har vist hvordan mangelfulle sammenhenger til tallære relativt enkelt kan unngås ved å benytte mer induktive fremstillinger hvor en eksemplifiserer en rekke spesialtilfeller med tall som grunnlag for det generelle med bokstaver, som i eksemplet om alderen til Hanna og Bent (Hjardar & Pedersen, 2006).

Studien kan brukes som delforklaring på svake norske algebraresultater på nasjonale og internasjonale tester, og setter spørsmålstegn ved lærebokforfatternes tolking av hovedområdet tall og algebra i læreplanen.

Acknowledgement

I am grateful to NordForsk for funding the Network for research on mathematics textbooks in the Nordic countries, project number 45321, which created opportunities for me to present from my doctoral study and have it discussed with engaged colleagues.

Referanser

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus*. Notodden: Telemarksforsking.

Bakke, B. & Bakke, I. H. (2006). *Grunntall 8. Matematikk for ungdomstrinnet*. Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, 14 (1), 41–73.

Bierhoff, H. (1996). Making the foundations of numeracy: a comparison of primary school textbooks in Britain, Germany and Switzerland. *Teaching Mathematics and its Applications*, 15 (4), 141–160.

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2013). *Alfa – matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1–7 og 5–10* (2. utgave). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke.

Bryman, A. (2008). *Social research methods* (third edition). Oxford University Press.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: algebra and its relation to geometry. I N. Bednarz, C. Kieran & Lee, L. (red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (s. 15–37). Dordrecht: Kluwer Academic.

Chávez-López, O. (2003). *From the textbook to the enacted curriculum: textbook use in the middle school mathematics classroom*. University of Missouri. Hentet fra http://zeta.math.utsa.edu/~hvz231/dissertation/dissertation.pdf

Costello, J. (1991). *Teaching and learning mathematics 11–16*. London: Routledge.

Crawford, A. R. (2001). Developing algebraic thinking: past, present and future. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 1, s. 192–198). University of Melbourne.

Christensen, A. S. (2007). *Kode X 9A. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Forlaget fag og kultur.

Danielsen, I. J., Skaar, K. & Skaalvik, E. M. (2007). *De viktige få: analyse av elevundersøkelsen 2007*. Kristiansand: Oxford Research.

Donoghue, E. F. (2003). Algebra and geometry textbooks in twentieth-century America. I G. Stanic & J. Kilpatrick (red.), *A history of school mathematics* (Vol. 1, s. 329–398). Reston: NCTM.

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62 (1), 107–115.
Fan, L. & Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbook on teaching strategies: an empirical study. *Mid-Western Educational Researcher,* 13 (4), 2–9.
Freeman, D. J. & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26 (3), 403–421.
Goodlad, J.I. et al. (1979). *Curriculum inquiry: the study of curriculum practice*. New York: McGraw-Hill Book Company.
Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli M., Lie S. & Turmo A. (2003). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003*. Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitet i Oslo.
Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). T*egn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo: Unipub.
Guldbrandsen, J. E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2006). *Nye Mega 8B. Matematikk for ungdomsstrinnet*. Oslo: N. W. Damm & Søn.
Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K. B. & Öberg, B. (2006). *Tetra 8. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Det norske samlaget.
Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2006). *Faktor 1. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Cappelen Damm.
Hsieh, H. F. & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. Q*ualitative Health Research*, 15 (9), 1277–1288.
Johansson, M. (2006). Textbooks as instruments. Three teachers' way to organize their mathematics lessons. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 11 (3), 5–30.
Jakobsson-Åhl, T. (2006). *Algebra in upper secondary mathematics: a study of a selection of textbooks used in the years 1960–2000 in Sweden*. Luleå tekniska universitet.
Jakobsson-Åhl, T. (2008). Word problems in upper secondary algebra in Sweden over the years 1960–2000. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 13 (1), 7–28.
Kendal, M. & Stacey, K. (2004). Algebra: a world of difference. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The future of the teaching and learning of algebra, the 12th ICMI study* (s. 329–346). Dordrecht: Kluwer Academic.
Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. I P. Nesher & J. Kilpatrick (red.), *Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 97–112). Cambridge University Press.
Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. I C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (red.), *Eighth international congress on mathematical education: selected lectures* (s. 271–290). Seville: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: reflections on its main activities. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The future of the teaching and learning of algebra, the 12th ICMI study* (s. 21–34). Dordrecht: Kluwer Academic.
Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middel school through college levels: building meaning for symbols and their manipulations. I F. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 707–762). Charlotte: Information Age.
Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, 16 (4), 5–44.
KUF. (1987). *Mønsterplanen for grunnskolen*. Oslo: Aschehoug.
KUF. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.
Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. Hart (red.), *Children's understanding of mathematics* (s. 11–16). London: John Murray.
Lins, R. (1990). A framework for understanding what algebraic thinking is. I G. Booker, P. Cobb & T. N. Mendicuti (red.), *Proceedings of the fourteenth PME conference for the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s. 93–100). Oaxtepec: Program committee.
Lee, L. (2001). Early algebra – but which algebra? I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (red.), *The future of teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 2, s. 392–399). University of Melbourne.
MacGregor, M. (2004). Goals and content of an algebra curriculum for the compulsory years of schooling. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The future of teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (s. 313–328). Boston: Kluwer Academic.
Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (s. 65–86). Dordrecht: Kluwer Academic.
Mosvold, R. (2001). *Det genetiske prinsipp i matematikkdidaktikk* (Hovedfagsoppgave). Kristiansand: Høgskolen i Agder.
Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Uddannelseministeriet. Hentet fra http://pub.uvm.dk/2002/kom/
Pehkonen, E. (1995). On pupils' reactions to the use of open-ended problems in mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 3 (4), 43–57.
Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33 (5), 158–175.
Pepin, B. & Haggarty, L. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28 (4), 567–590.

Reys, B. J., Reys, R. R. & Chávez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61 (5), 61–66.
Rezat, S. & Sträßer, R. (2013). Methodologies in Nordic research on mathematics textbooks. I B. Grevholm, P. S. Hundeland, K. Juter, K. Kislenko & P.-E. Persson (red.), *Nordic research in didactics of mathematics: past, present and future* (s. 469–482). Oslo: Cappelen Damm.
Robitaille, D. F. & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics education* (s. 687–709). New York: Macmillan.
Röj-Lindberg, A.-S. (1999). *Läromedel och undervisning i matematik på högstadiet. En kartläggning av läget i Svenskfinland*. Vasa: Svenskfinlands läromedelscenter.
Schoenfeld, A.H. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145–66.
Schmidt, W. H., McKnight C. C., Valverde G. A., Houang R. I. & Wiley D. E. (1996). *Many visions, many aims: a cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. London: Kluwer Academic Publishers.
Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E. et al. (2001). *Why schools matter: a cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.
Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191–228.
Sutherland, R. (2002). *A comparative study of algebra curricula*. London: Qualifications and curriculum authority.
Torkildsen, S. H. & Maugesten. M. (2006). *Sirkel 8B. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: H. Aschehoug & Co.
UFD. (2005). *Kunnskapsløftet*. Hentet fra http://www.udir.no/upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/Grunnskole_og_gjennomgaende/matematikk_010810.rtf
Utdanningsdirektoratet. (2005). *Kartlegging av læremidler og læremiddelpraksis*. Hentet fra http://www.skolenettet.no/moduler/templates/Module_Article.aspx?id=37694&epslanguage=NO
Utdanningsdirektoratet. (2014). *Matematikk i norsk skole anno 2014. Faggjennomgang av matematikkfagene – rapport fra ekstern arbeidsgruppe oppnenvt av Utdanningsdirektoratet*. Hentet fra http://www.udir.no/PageFiles/89051/Matematikk_norsk_skole_2014_rapport_ekstern_arbeidsgruppe.pdf?epslanguage=no
Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: reflections on different approaches to algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (s. 317–325). Dordrecht: Kluwer Publishers.
Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator*, 25 (2), 10–17.

Tom Rune Kongelf

Tom Rune Kongelf er en Ph.D.-student tilknyttet doktorgradsprogrammet ved Universitetet i Agder, og arbeider som foreleser ved Høgskulen i Sogn og Fjordane. Han forsker på lærebøker i matematikk som blir brukt på ungdomstrinnet, med vekt på problemløsning, algebra og oppgaver.

tom.rune.kongelf@hisf.no

Abstract

In this paper we present findings from an analysis of the chapters introducing algebra in six mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway. The introduction of letters as symbols for variables varies with respect to grade, quantity and context. Through an inductive qualitative content analysis we characterise insufficient aspects of the different chapters. The main findings are that the variable aspect is not clear, and that the textbooks hardly use the opportunities to build on arithmetic. In addition we find erroneous formulations, illustrations and mathematical reasoning, which facilitates the development of misconceptions.