Matematisk kvalitet i undervisning

FRODE OPSVIK OG LEIF BJØRN SKORPEN

Vi vil i denne artikkelen studere kvalitetar ved matematikkundervisning. Dette gjer vi ved å ta i bruk omgrepet *Matematisk kvalitet i undervisning* (MKU) som byggjer på *Mathematical quality of instruction* (MQI) og eit tilhøyrande observasjons- og analyseinstrument som er utvikla av ei forskargruppe i USA. Vi vil arbeide med følgjande forskingsspørsmål: Korleis kan ein tilpasse og utvikle omgrepet MKU med tilhøyrande omgrepsapparat til bruk i rettleiingssituasjonar? På kva måtar kan ein bruke MKU-indikatorane som ein reiskap til å fokusere på ulike kvalitetar ved det matematikkfaglege innhaldet i undervisninga? Analyseinstrumentet (MQI) er opphavleg etablert for å gje eit kvantitativt mål på den matematiske kvaliteten i ein lærar si undervisning, basert på videoopptak av undervisninga. I rettleiingssituasjonar har vi bruk for å fokusere på kvalitative sider ved undervisninga. Artikkelen viser korleis vi har tilpassa analyseinstrumentet til kvalitativ bruk. Døme på bruk av omgrepsapparatet er henta frå eige videomateriale innsamla i prosjektet "Kvalitet i opplæringa"[1] ved Høgskulen i Volda. MKU-omgrepsapparatet vil etter vårt syn vere nyttig ved til dømes observasjon og rettleiing av lærarstudentar i praksis.

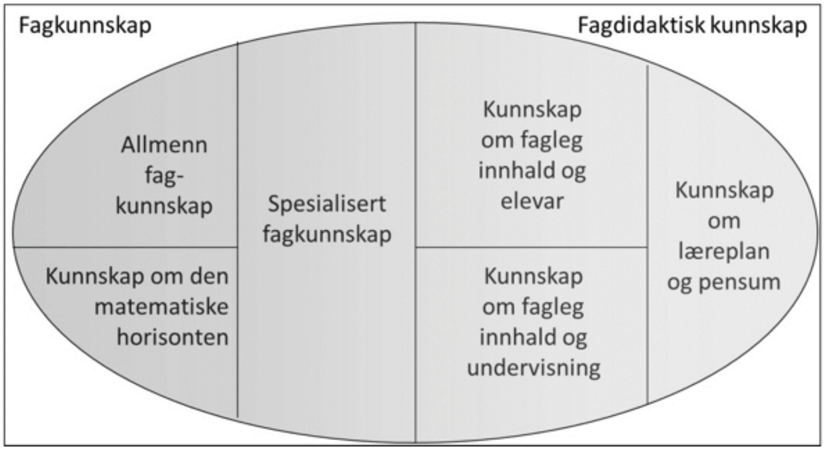
Ein viktig del av arbeidet vårt som lærarutdannarar er å hjelpe lærarstudentar til å bli gode til å planlegge, gjennomføre og evaluere matematikkundervisning. Det er mange delkompetansar som då må løftast fram og utviklast. Refleksjonar over eigen og andre sin praksis er ein viktig del av studentane si utvikling. Studentane skal utvikle eit profesjonelt språk (Grevholm, Björklund & Strømsnes, 2013) med eit omgrepsapparat som gjer dei i stand til å reflektere over denne praksisen. I denne refleksjonsprosessen har vi sakna ein reiskap som hjelper studentane til å fokusere på det faglege innhaldet i undervisninga. Det finst mange gode modeller eller reiskapar som kan brukast til å undersøke undervisninga på eit meir overordna og heilskapleg nivå. Men svakheita til mange av desse

Frode Opsvik, *Høgskulen i Volda*
Leif Bjørn Skorpen, *Høgskulen i Volda*

Opsvik, F. & Skorpen, L. B. (2014). Matematisk kvalitet i undervisning. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 19 (3-4), 101–117.

reiskapane er at dei ikkje tek omsyn til dei *faglege* kvalitetane ved undervisning. Mange av studentane sine refleksjonar vil difor mangle det faglege perspektivet der dei drøfter kva som er viktige faglege kvalitetar ved god matematikkundervisning. Formålet med denne artikkelen er å utvikle og presentere *ein* slik reiskap som kan vere til hjelp i dette arbeidet, ved å tilby eit omgrepsapparat som kan profesjonalisere den faglege refleksjonen. Aktuelle målgrupper som kan ha nytte av ein slik reiskap kan vere lærarstudentar, lærarar, pedagogiske leiarar, lærarutdannarar og forskarar.

Kva er det så som kjenneteiknar god matematikkundervisning, og kva kvalitetar er det viktig å legge vekt på når ein studerer denne undervisninga? Desse spørsmåla har sjølvsagt alltid vore sentrale, men svara har til ein viss grad variert etter kva ein legg vekt på og kva ein dermed ser etter. Fram gjennom historia frå antikken til reformpedagogikken eit stykke ut på 1900-talet stod det faglege innhaldet i sentrum for god undervisning. Gjennom nokre tiår på slutten av nittenhundretalet vart fokus i ein del samanhengar i større grad retta mot organisering og ytre trekk ved undervisninga enn mot innhaldet. Lee Shulman peika på den avgjerande verdien som ligg i å ha fokus på det faglege innhaldet, og viktigheita av at læraren har god innhaldskunnskap som grunnlag for å kunne gje god undervisning. For å få eit meir nyansert bilete av omgrepet innhaldskunnskap, innførte han tre ulike kategoriar av innhaldskunnskap: fagkunnskap, fagdidaktisk kunnskap og kunnskap om læreplan og pensum (Shulman, 1986). Arbeidet hans danna grunnlag for vidareutvikling av denne tanken innanfor mange fagområde. Innanfor det matematikkdidaktiske området har det dei seinare åra blitt utvikla ulike modellar for den kunnskapen ein lærar treng for å skape god undervisning (Hill, Schilling & Ball, 2004; Kunter mfl., 2013; Niss & Højgaard Jensen, 2002; Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005). Fleire av desse rammeverka inneheld interessante perspektiv knytt til vårt tema. Blant desse er det særskild eit forskarmiljø ved University of Michigan i USA som har vidareutvikla Shulman sin modell på ein måte som har vist seg å vere godt eigna for vår bruk (Opsvik & Skorpen, 2012). Michigan-miljøet vidareutvikla Shulman sin modell ved å dele innhaldskunnskap inn i fleire underkategoriar, og dei knytte det eksplisitt til matematikk. Dei oppretta følgjande seks underkategoriar: allmenn fagkunnskap, spesialisert fagkunnskap, kunnskap om den matematiske horisonten, kunnskap om fagleg innhald og elevar, kunnskap om fagleg innhald og undervisning og kunnskap om læreplan og pensum (sjå figur 1). Dei tre første av desse vert kategoriserte som fagkunnskap, og dei tre siste som fagdidaktisk kunnskap (Ball, Thames & Phelps, 2008; Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010; Opsvik & Skorpen, 2012). Modellen er altså eit uttrykk for



Figur 1. *Undervisningskunnskap i matematikk (UKM)*

læraren sin undervisningskunnskap i matematikk, UKM (Mathematical knowledge for teaching, MKT).

Michigan-miljøet har gjennom prosjektet "Learning mathematics for teaching" (LMT) utvikla eit sett med skriftlege prøver for å kartlegge lærarar sin undervisningskunnskap i matematikk (Hill mfl., 2004). Undervisningskunnskap er altså ein teoretisk kunnskap knytt til dei seks ulike kategoriane som let seg måle gjennom ein skriftleg prøve. Ein svakheit ved denne modellen er at han fokuserer på læraren sin kunnskap om og for undervisning, og at han ikkje fangar opp det som skjer i undervisningssituasjonen (Petrou & Goulding, 2011). Undervisningskunnskap i matematikk er altså ikkje ein modell eller ein reiskap vi kan bruke direkte til å analysere spesifikke undervisningssekvensar. Den praktiske dugleiken som kjem til syne i klasserommet omfattar noko meir enn den teoretiske kunnskapen. Kompetanseomgrepet, slik dette blir brukt av Mogens Niss mfl., kan illustrere dette. Dei definerte matematisk kompetanse som ein: "[...] indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situasjoner [...]" (Niss & Højgaard Jensen, 2002, s. 43). Kompetanseomgrepet er altså ei utviding av kunnskapsomgrepet, der ein i tillegg til fagkunnskapen inkluderer kravet om å vere i stand til å handle hensiktsmessig i situasjonen. Dette er òg noko av det som vert vektlagt i kunnskapskvartetten gjennom tre av dimensjonane: omdanning, samanheng og "contingency" (Kleve, 2010; Rowland mfl., 2005). For å få eit bilde av kompetansar av denne typen, altså om ein er i stand til å overføre den teoretiske kunnskapen til praktiske undervisningshandlingar, kan ein observere læraren i praktisk arbeid. Dette vert det gjort nærare greie for nedanfor.

Frå MQI til MKU

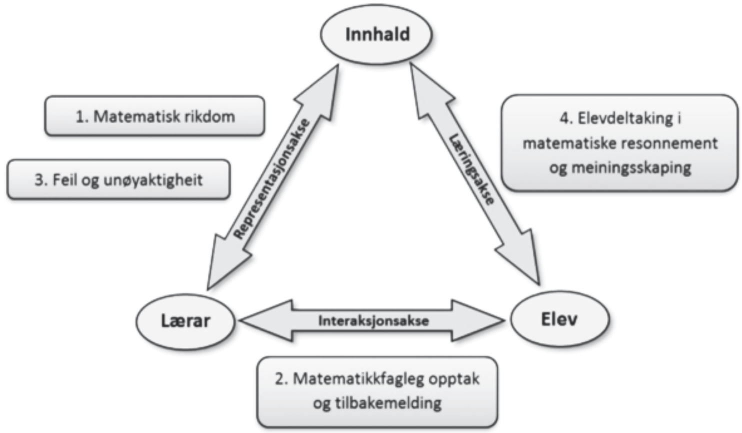
Det har fram gjennom åra blitt gjennomført mange ulike studium av undervisning. Felles for mange av desse er at dei har fokusert på ytre trekk ved undervisninga, til dømes korleis elevane er organiserte, om det er heilklasseundervisning, gruppearbeid eller individuelt arbeid osb. I den grad det har blitt fokusert på det faglege innhaldet i undervisninga, har det oftast vore gjennom kvalitative analysar av relativt korte undervisningssekvensar. Eit viktig bidrag frå LMT-prosjektet var i denne samanheng at dei utvikla omgrepet *Mathematical quality of instruction* (MQI), og dei utvikla eit instrument som målar og kvantifiserer denne matematiske kvaliteten i matematikkundervisninga. Dette byggjer på studium av videoopptak av undervisningssekvensar over lengre tidsrom, og på det teoretiske rammeverket knytt til MKT.

Dei starta ut med å analysere videoopptak av matematikkundervisning, og utvikla indikatorar som kunne brukast til å kvantifisere den matematiske kvaliteten i undervisninga. Desse indikatorane har blitt raffinerte og vidareutvikla i løpet av dei siste ti åra, og det eksisterer derfor ulike versjonar av MQI-instrumentet. Eit av motiva for å etablere MQI-instrumentet var å validere resultata frå MKT-prøvene, og dei fann ein direkte samanheng mellom ein lærar sin undervisningskunnskap i matematikk (frå MKT-prøvene) og den matematiske kvaliteten i hans/hennar undervisning målt gjennom MQI-instrumentet (Hill mfl., 2008). Ved hjelp av faktoranalysar med utgangspunkt i fleire underliggande videokodar, har dei identifisert fire[2] faktorar eller dimensjonar som byggjer opp omgrepet MQI (Hill mfl., 2012). Ein faktoranalyse er ein statistisk metode for å samle og gruppere empiriske variablar til overordna omgrep (Ringdal, 2013). Omgrepet MQI er altså utvikla på grunnlag av eit empirisk materiale.

MQI-instrumentet er opphavleg utvikla for å lage eit kvantitativt mål på kvaliteten ved matematikkundervisninga til ein lærar. Sidan vår bruk i første omgang vil vere knytt til rettleiingssituasjonar, vil vi bruke det til å løfte fram kvalitative sider ved ulike undervisningssekvensar i matematikk. For å skilje mellom det opphavlege MQI-instrumentet og vår tilpassing og bruk av dette, vil vi omsette det til norsk og nytte formuleringa "Matematisk kvalitet i undervisninga", forkorta til MKU. Formuleringa *matematisk kvalitet* signaliserer at vi fokuserer på kvaliteten ved det matematikkfaglege og matematikkdidaktiske innhaldet i undervisninga, meir enn på den generelle didaktiske kvaliteten. Omgrepet MKU er bygd opp av dei fire dimensjonane: *matematisk rikdom*, *matematikkfagleg opptak og tilbakemelding*, *feil og unøyaktigheit* og *elevdeltaking i matematiske resonnement og meiningsskaping* (Hill mfl., 2012)[3]. O*pptak* tyder i denne samanhengen at ein elev kjem med ei utsegn som læraren inkluderer og byggjer vidare på i undervisninga (Streitlien, 2009). Dimensjonen *matematisk rikdom* fangar djupna i det matematiske innhaldet i undervisninga. Rik matematikk har enten eit fokus på meininga bak fakta og prosedyrar eller på sentrale matematiske handlingar (praksisar). Dimensjonen *matematikkfagleg opptak og tilbakemelding* fangar opp i kva grad lærar er i stand til å forstå og respondere på elevane sin eigen matematiske produksjon (munnleg eller skriftleg) eller matematiske feil. Dimensjonen *feil og unøyaktigheit* skal fange opp feil, upresist språk og upresis notasjon frå lærar si side, elevfeil som ikkje vert korrigerte, eller manglande presisjon eller klarheit i læraren si framstelling av innhaldet. Dimensjonen *elevdeltaking i matematiske resonnement og meiningsskaping* fangar teikn på at elevane er involverte i kognitivt aktiverande arbeid i klasserommet. Vi legg merke til at tre av desse dimensjonane set fokus på positive trekk ved undervisninga, medan *feil og unøyaktigheit* fokuserer på negative sider ved læraren si undervisning. På ein måte kan det opplevast som uheldig at ein aktivt leitar etter feil og manglar under observasjon av ein undervisningssekvens. Målet vårt med å bruke omgrepsapparatet for MKU er å analysere undervisninga, peike på positive sider, men òg finne spesifikke situasjonar som kan og bør gjerast betre. I dette perspektivet meiner vi det er hensiktsmessig at omgrepsapparatet eksplisitt hjelper både den røynde og den urøynde observatøren til å finne situasjonar med feil og manglar, og som dermed har eit klart forbetringspotensiale.

I den praktiske undervisninga heng alt saman på ein kompleks måte. Den didaktisk trekanten (Hopmann, 1997; Künzli, 1998) kan vere eit av fleire verktøy til å strukturere denne kompleksiteten. Dette er ein enkel modell som løftar fram berre tre, men likevel tre svært sentrale element i undervisninga. Den didaktiske trekanten gjev ei skjematisk framstilling av relasjonane mellom innhald og lærar, mellom lærar og elev og mellom elev og innhald (Opsvik & Skorpen, 2010). Dei fire dimensjonane som MKU er bygd opp av kan plasserast inn på ulike stadar i den didaktiske trekanten (Cohen, Raudenbush & Ball, 2003; NCTE, 2013). Figur 2 viser resultatet av dette i norsk språkdrakt. Dimensjonane *matematisk rikdom* og *feil og unøyaktigheit* handlar i hovudsak om læraren sin relasjon til fagstoffet og kan dermed plasserast på representasjonsaksen. Dimensjonen *matematikkfagleg opptak og tilbakemelding* handlar i hovudsak om læraren si evne til å forstå og gje respons på elevutsegn eller elevarbeid, og kan plasserast på interaksjonsaksen. Den fjerde dimensjonen, som kan plasserast ved læringsaksen, er *elevdeltaking i matematiske resonnement og meiningsskaping* og handlar om elevane si kognitive aktivering i forhold til lærestoffet.

Når ein på denne måten har fordelt kvar av dei fire dimensjonane på ein av dei tre aksane, representerer dette sjølvsagt ei forenkling av den



Figur 2. *Dei fire dimensjonane av MKU plassert i den didaktiske trekanten*

verkelege situasjonen. Til dømes er *matematisk rikdom* plassert inn på representasjonsaksen fordi ein ser på det som heilt grunnleggjande at lærar har ei god og grundig forståing for det faglege innhaldet i lærestoffet. Ei slik grunnleggjande forståing for lærestoffet vil vere viktig for læraren sine val knytt til undervisninga. Dette vil i neste omgang verke inn på korleis lærar let elevane møte lærestoffet gjennom val av undervisningsform og arbeidsform, val av døme og eventuelle oppgåver osb. Dette indikerer at komponentar av matematisk rikdom òg vil vere representert på dei andre aksane, utan at det går eksplisitt fram av figuren. På tilsvarande måte vil dei andre dimensjonane ha komponentar langs dei andre aksane eller kunne ha innverknad på dei. Likevel vil det etter vårt syn vere fornuftig å plassere kvar av dimensjonane berre på ein av aksane, ut frå kvar dei har si hovudtyngde. Denne problematiseringa harmonerer òg med prinsippet bak ei faktoranalyse. Når ein i ei faktoranalyse finn kven av indikatorane som er sterkast korrelerte, og dermed utgjer ein dimensjon, så vil ikkje dette hindre at det finst andre korrelasjonar mellom indikatorane, sjølv om desse då vil vere svakare.

Kvar dimensjon er bygd opp av fleire indikatorar og dersom vi omset[4] desse til norsk får vi følgjande liste over dimensjonar og indikatorar (Hill mfl., 2012, s. 9), sjå tabell 1.

Forklaringa til indikatoren *matematisk språk* (1.5) er kanskje litt for snever. Læraren si evne til å snakke matematikk på eit nivå som er tilpassa den einskilde elev, er svært viktig for eleven si læring av matematikk. Læraren si evne til å bruke eit profesjonelt språk, der han eller ho til dømes tek i bruk bilete, metaforar, samanlikningar, analogiar og

Tabell 1. *Dimensjons- og indikatorliste for MKU-omgrepsapparatet*

1.	**Dimensjonen *matematisk rikdom* er sett saman av følgjande indikatorar:**	
1.1	*Kopling og samanbinding*	Kople og binde saman ulike omgrep, idear, prosedyrar og representasjonsformer.
1.2	*Forklaringar*	Gi matematisk meining til omgrep, idear, prosedyrar eller løysingsmåtar.
1.3	*Fleire løysingsmåtar og prosedyrar*	Bruke fleire løysings- og tenkemåtar, strategiar eller prosedyrar for eitt og same problem.
1.4	*Generalisering*	Utvikle/utleie generaliseringar av matematiske samanhengar eller prosedyrar på grunnlag av konkrete døme.
1.5	*Matematisk språk*	Bruke matematisk terminologi og notasjon, og matematiske omgrep på ein presis, naturleg og konsistent måte.
2.	**Dimensjonen *matematikkfagleg opptak og tilbakemelding* er sett saman av indikatorane:**	
2.1	*Oppklaring av vanskar, feil og misoppfatningar*	Det vert arbeidd med det matematiske innhaldet i elevane sine vanskar, feil og misoppfatningar.
2.2	*Opptak og tilbakemelding*	Læraren forstår, byggjer vidare på eller gir tilbakemelding på elevane sine matematiske forklaringar, spørsmål og resonnement.
3.	**Dimensjonen *feil og unøyaktigheit* er sett saman av indikatorane:**	
3.1	*Større matematiske feil eller manglar*	Løyse ei oppgåve feil, bruke omgrep på feil måte, gløyme eller utelate viktige matematiske sider ved det ein fokuserer på.
3.2	*Unøyaktig språkbruk*	Upresis bruk av matematisk språk i munnleg eller skriftleg form, eller upresis bruk av kvardagsspråk når ein forklarer matematiske idear.
3.3	*Uklart innhald*	Det matematiske innhaldet blir uklart presentert.
4.	**Dimensjonen *elevdeltaking i matematiske resonnement og meiningsskaping* er retta mot elevdeltaking i aktivitetar av typen:**	
4.1	*Elevforklaringar*	Elevar forklarar idear, prosedyrar eller løysingsmåtar med fokus på forståing av det matematiske innhaldet.
4.2	*Elevspørsmål og påstandar*	Elevar stiller spørsmål, kjem med påstandar eller motpåstandar knytt til det matematiske innhaldet.
4.3	*Eleven sitt kognitive engasjement*	Elevar deltek i resonnering og gjennomfører kognitivt utfordrande arbeid som til dømes å danne samanhengar mellom ulike representasjonsformer, omgrep eller framgangsmåtar.

assosiasjonar er viktig for å hjelpe elevane til å forstå det som blir sagt og til å forstå matematiske samanhengar.

MQI-instrumentet var opphavleg utforma for å seie noko om den matematiske kvaliteten ved læraren si matematikkundervisning med utgangspunkt i videoopptak av minst tre undervisningstimar for kvar lærar. I LMT-prosjektet vart videomaterialet delt inn i kortare økter på 5 eller 7,5 minutt. I kvar slik økt vart kvar av indikatorane scora ved hjelp av ein tredelt skala (låg, middels eller høg). I tillegg gav forskarane, for kvar av øktene, ei oppsummerande vurdering av kvar dimensjon ved bruk av same tredelte skala. Ved slutten av kvar time brukte dei ein femdelt skala til å gje ei samla vurdering av kvaliteten ved matematikkundervisninga. På denne måten fekk dei altså eit kvantitativt mål på lærarens

MQI innanfor kvar av dimensjonane og lærarens samla MQI (Hill mfl., 2008; Hill mfl., 2012). Eit slikt kvantitativt mål på lærarens MQI kan fort oppfattast som ein "karakter" for læraren, og lærarar kan lett rangerast. Ei slik rangering kan vere uheldig, og er ikkje aktuell i vår bruk av MKU-omgrepsapparatet.

MKU-indikatorane brukte til kvalitative analysar

I vårt prosjekt har det ikkje vore noko mål å legge til rette for å kunne generere ein kvantitativ MKU-verdi knytt til den einskilde lærar. Derimot kan vi ha nytte av eit verktøy som hjelper oss med å analysere kvaliteten av den observerte matematikkundervisninga. Etter vårt syn kan desse indikatorane vere tenlege til slike kvalitative studiar av matematikkundervisninga. For å vise døme på ein slik bruk, har vi henta fram transkripsjonar frå klasseromsstudiar som vi gjennomførte innanfor prosjektet "Kvalitet i opplæringa" ved Høgskulen i Volda, våren 2009 (Opsvik & Skorpen, 2012). Der gjorde vi videoopptak av fem etterfølgjande matematikktimar gjennom ei veke i to fjerdeklassar og to sjuandeklassar, til saman 20 timar. Vi fanga opp aktivitetane i klasserommet ved bruk av tre videokamera, to stasjonære som dekte heile klasserommet[5] og eit mobilt som vi brukte til å fokusere på interessante situasjonar. Kvar av elevane og lærarane hadde sin individuelle mikrofon festa til genseren eller skjorta. På den måten fekk vi tilgang til all kommunikasjon mellom lærar og elev, mellom elevar og "høgttenking" frå einskildelevar i alle typar undervisningssituasjonar (Opsvik & Skorpen, 2012).

I det følgjande bruker vi to transkripsjonar frå dette videomaterialet til å eksemplifisere bruken av MKU-indikatorane. Valet av nettopp desse to transkripsjonane er gjort ut frå ei hermeneutisk tilnærming, der vi gjennom kvar ny gjennomgang av videomaterialet har utvikla ei djupare forståing for stoffet. Med utgangspunkt i kunnskap om datamaterialet vårt og utviklinga av MKU-indikatorane, har vi altså valt ut to av transkripsjonane som vi meiner viser potensialet til bruken av denne reiskapen. I analysen av dei følgjande transkripsjonane vert det referert til dei ulike indikatorane i lista i tabell 1.

Transkripsjon 1. Multiplikasjon av heilt tal med brøk

Det faglege innhaldet i den følgjande transkripsjonen er multiplikasjon av eit heilt tal med ein brøk. Transkripsjonen er henta frå byrjinga av ein dobbeltime i ein sjuandeklasse. Elevane har arbeidd med dette stoffet veka før, då dei hadde vikarlærar, og har fått lekser i det til denne timen. Lærar startar med å repetere, og har snakka litt generelt om multiplikasjon av brøk, og presenterer først ein regel på den interaktive tavla der det står: "Regel: Ein brøk kan multipliserast med eit heilt tal ved at *teljaren* blir multiplisert med talet. *Nemnaren* blir den same." Han held fram med repetisjonen og brukar tre ulike sjølvlaga lysbilde som visualiserer innhaldet i stoffet som han presenterer på den interaktive tavla.

Lærar: Vi skal sjå på eit eksempel. [Hentar fram det første lysbildet på den interaktive tavla. Dette lysbildet viser ein heil pizza, og under denne er det ein 3/4 pizza, sjå figur 3][6]

Lærar: Det er då fredagsklubbens fem medlemmer som skal ha pizzaparty. [Pause] Dei er fem medlemmer, og dei reknar at kvar av dei klarar tre stykke av ein pizza som er delt i fire. Altså, kvar person klarar å ete tre fjerdedels pizza. [Peikar på bilde av den 3/4 pizzaen]

Lærar: Vi treng: $\frac{3}{4} \cdot 5$ pizza. [Skiftar til lysbilde 2]

Lærar: Så er det då ein kasserar som heiter Liv som har sett opp eit reknestykke, det blir altså: tre fjerdedelar gonger fem. [Peikar på $\frac{3}{4} \cdot 5$ på lysbilde 2]

Lærar: Dei var fem stykk, kvar et tre fjerdedels pizza. [Peikar igjen på 5 og $\frac{3}{4}$ på figuren. Pause medan han skiftar til nytt bilde, lysbilde 3, sjå figur 4. I tillegg er det på lysbilde 3 skrive følgjande reknestykke: $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4}$ $= \frac{15}{4}$]

Lærar: Så lurer ho på korleis ho skal rekne ut det. Ho finn ut, etter å ha teikna pizzabetane, at ho kan tenke sånn: Tre fjerdedelar gange fem [Peikar på reknestykket $\frac{3 \cdot 5}{4}$ på figuren], det blir det same som tre gonger fem på teljaren [Peikar på $3 \cdot 5$ på figuren], og så står det framleis fire som nemnar. [Peikar på 4 på figuren] Tre gonger fem, det blir femten. [Peikar på $3 \cdot 5$ på figuren] Så tre fjerdedelar gonger fem skriv ein på denne måten her [Peikar på $\frac{3 \cdot 5}{4}$]: Ta med det ein gongar med over streken. Så reknar ein det ut. Dette er slik de skal føre det når de skal rekne ut.

Figur 3. *Illustrasjon som viser ein heil og 3/4 pizza. Frå lysbilde 1 på interaktiv tavle.*

Figur 4. *Illustrasjon som viser 5 ganger 3/4 pizza. Frå lysbilde 3 på interaktiv tavle.*

I denne transkripsjonen illustrerer lærar multiplikasjon av brøk med eit heilt tal ved hjelp av pizza. Læraren sitt uttalte mål med denne sekvensen er å repetere og forklare regelen for multiplikasjon av eit heilt tal med ein brøk. For å gje matematisk meining til denne løysingsmåten, bruker han gjenteken addisjon visualisert ved hjelp av pizzabitar. Han koplar saman ulike representasjonar av brøk som ligg på ulike abstraksjonsnivå. Rekneforteljinga vert presentert både skriftleg og munnleg, og representerer eit halvkonkret nivå. Representasjonen av pizzabitane på den interaktive tavla ligg òg på det halvkonkrete nivået og er ei visualisering av det matematiske innhaldet i denne. Med utgangspunkt i desse visualiseringane koplar han til slutt dette saman med det abstrakte nivået der multiplikasjonen vert skriven på symbolform. MKU-indikatorane for *kopling og samanbinding* (1.1) og *forklaringar* (1.2) er altså svært sentrale i denne sekvensen. Her må vi kommentere at oppstillinga som lærar har valt ikkje er i samsvar med gjeldande innarbeidd praksis. Lærar skreiv $\frac{3}{4} \cdot 5$, men burde skrive $5 \cdot \frac{3}{4}$ for å støtte opp under den språklege formuleringa fem stykk $\frac{3}{4}$ pizza. Språkbruken hans er konsistent mellom det munnlege og den abstrakte, symbolske, skriftlege forma, men bryt med konkretiseringa som byggjer på den matematiske idéen om gjenteken addisjon. Her er altså indikatoren om *unøyaktig språkbruk* (3.2) sentral, og indikatoren om *matematisk språk* (1.5) vert aktivert på ein negativ måte. Dette er eit godt døme på forskjellen mellom *allmenn fagkunnskap* og *spesialisert fagkunnskap* (sjå figur 1). På eit allment matematikkfagleg plan er "faktorenes orden likegyldig" ved multiplikasjon. Innanfor spesialisert fagkunnskap i undervisning, med tanke på omgrepsdanning, er det stor forskjell på å tolke multiplikasjonen som det å finne $\frac{3}{4}$ av 5, i motsetning til gjenteken addisjon av $\frac{3}{4}$ fem gonger. Vi ser vidare at lærar presenterer stoffet til klassen, utan å aktivisere eller inkludere elevane i sjølve gjennomgangen. Indikatorlista får oss til å legge merke til dette ved at indikatorane i dimensjonen *matematikkfagleg opptak og tilbakemelding* og dimensjonen *elevdeltaking i matematiske resonnement og meiningsskaping* ikkje vert aktiverte. Transkripsjonen viser eitt konkret døme på multiplikasjon av eit heilt tal med ein brøk. Det kunne etter vårt syn vore naturleg å gå vidare med fleire døme som til slutt vart summert opp i form av ein generell regel, slik indikatoren *generalisering* (1.4) legg opp til. Læraren sitt val om å presentere regelen først, for deretter å gje eitt konkret døme som underbyggjer denne regelen, må sjåast i lys av at dette er ein repetisjonssekvens.

Transkripsjon 2. Prosentrekning

I det følgjande presenterer vi ein transkripsjon av ein repetisjonssekvens knytt til prosentrekning i ei anna sjuandeklasse. Sekvensen er henta frå byrjinga av ein time. Lærar lagar oppgåvene i situasjonen, og presenterer dei i munnleg form. Oppgåvene vert gjevne i ein praktisk kontekst, der læraren tek utgangspunkt i sine eigne klede. Etter nokre innleiande oppgåver startar følgjande sekvens:

Lærar: Skal eg ta ei litt vanskelegare då. Viss de har ... buksa mi då ... den har eg ... den kosta berre tre hundre kroner, og så får vi tretti prosent rabatt på den. Kor mykje rabatt får vi på den buksa då? [Kort pause] Tre hundre kroner, og så får vi tretti prosent rabatt. [Pause] Tenk litt på den! [Pause] Bukse – kosta tre hundre kroner – så fekk vi tretti prosent rabatt. Peter. [elevnamn]

Peter: Eh ... nitti.

Lærar: Korleis kom du fram til det? [Kort pause] Det er riktig.

Peter: ... gonga tretti ... ta tretti gangar tre ... og du har tre ... hundre.

Lærar: Ja, fordi at for kvar ... [Pause medan lærar går fram til tavla] Då vi var gjennom prosent før – ikkje sant, så tenkte de då ... Hundrelappen her [Teiknar ein hundrelapp i form av eit rektangel på tavla som han skriv 100 inni], 30 % i rabatt. [Trekkjer ein strek ut frå teikninga av 100-lappen og skriv 30 %] Var det slik Peter?

Peter: Ja.

Lærar: Då har du 30 kroner på denne. Og så har du to slike til, som du då og har tretti, [Teiknar to hundrelappar til med ein strek ut frå kvar av dei, og skriv 30 ved kvar av strekane] og så tok du tretti gangar tre, for det var tre hundrelappar. Og det er ... denne reknemåten der i hovudet er veldig grei når de skal ut på butikken og handle, fordi at ... då kan de telle etter sånn cirka ... kor mykje de må betale.

Lærar inviterer her i utgangspunktet til elevdeltaking ved at han etterspør korleis eleven kom fram til svaret (*elevforklaringar*, 4.1). Eleven sine ufullstendige formuleringar dannar utgangspunkt for lærar sitt *opptak og tilbakemelding* (2.2). Det verkar som om lærar forstår, eller trur han forstår kva eleven prøver å formulere, og byggjer vidare på eleven sin tenkemåte. Han visualiserer denne ved å teikne tre hundrelappar på tavla, og trekke ut 30 kroner frå kvar av desse. I dette opptaket[7] blir eleven sin strategi for raskt å kunne rekne ut prosentar knytt til kvardagssituasjonar akseptert, og ført vidare gjennom læraren si forklaring. I denne sekvensen brukar dei altså ikkje den tradisjonelle strategien gitt i læreboka som er å gå vegen om 1 % av heile beløpet. I staden brukar dei her strategien å rekne heile prosentstorleiken av kvar einskild hundrarar, for deretter å multiplisere med talet på hundrarar. I lys av dette kan vi seie at indikatoren *fleire løysingsmåtar og prosedyrar* (1.3) vert aktivert. Denne strategien er, slik læraren også presiserer, godt eigna til overslags- og hovudrekning utan hjelpemiddel, og såleis godt tilpassa butikkonteksten. Her vert både tenkjemåtar og bruksaspektet ved matematikken tydeleggjorte. Ved at læraren teiknar dei tre hundrelappane på tavla og skriv talet 30 ved kvar av desse, bruker han høvelege representasjonsformer som visualiserer både måten å tenke på og framgangsmåten (indikator 1.1 og 1.2). I starten gjentek lærar oppgåva tre gonger i litt ulike vendingar. Dette kan vere positivt for nokre av elevane, som på den måten tydeleg får med seg kva oppgåva spør etter, medan det kan verke irriterande og forstyrrande for andre. Det kan òg diskuterast om læraren i for stor grad "legg orda i munnen" på Peter. Dermed mister eleven moglegheita til å få øving i å formulere tankane sine sjølv på ein presis måte (indikator 4.1 *elevforklaring*).

Drøfting

Eit profesjonelt språk er nødvendig for å kunne reflektere over ulike sider ved undervisning. I rettleiingssituasjonar er det viktig at vi har eit språk som også dekkjer dei matematiske kvalitetane vi ønskjer at undervisninga skal ha.

Fokuseringsreiskap

MKU-omgrepsapparatet er nyttig fordi det hjelper oss til å fokusere på bestemte kvalitetar ved undervisninga. Kvar av indikatorane fungerer som briller som får oss til å sjå etter, eller legge merke til, dei delane av undervisninga som desse indikatorane omhandlar. Etter at ein på denne måten har fokusert på eit bestemt område, må ein likevel gjere ei subjektiv vurdering av kvaliteten på den aktuelle undervisninga ein har observert. Dette stiller sjølvsagt høge krav til observatøren sin undervisningskunnskap i matematikk, forståing av undervisning generelt og forståing av MKU spesielt. Denne reiskapen vil i seg sjølv ikkje vere nok til å vurdere kvaliteten ved ein undervisningssekvens. Ein urøynd student vil truleg ikkje få det same ut av ein observert sekvens som ein meir røynd matematikklærar eller lærarutdannar. Poenget er å vise den urøynde observatøren nokre sentrale moment som han/ho kan vere merksam på, og som dette omgrepsapparatet gjev oss eit språk til å reflektere rundt. Ein røynd observatør vil òg etter vårt syn kunne ha nytte av ei slik systematisk indikatorliste. Ved bruk av denne reiskapen får ein hjelp til å fokusere på dei indikatorane som er aktiviserte på ein positiv eller negativ måte, og/eller på dei indikatorane som ikkje er aktiverte. I det siste tilfellet kan ein bli merksam på at undervisningskvalitetar som desse indikatorane fokuserer på, ikkje var til stades. Til dømes vart vi i transkripsjon 1, gjennom bruk av indikatorlista, merksame på at indikatorane frå dimensjon 2, *matematikkfagleg opptak og tilbakemelding*, og dimensjon 4, *elevdeltaking i matematiske resonnement og meiningsskaping*, mangla. I ein rettleiingssituasjon vil det dermed vere naturleg å fokusere på læraren sitt val av arbeidsmåte og presentasjonsform. Han utfordra ikkje elevane til å kome med spørsmål eller til å kome med eigne formuleringar. Dette kan seiast å vere eit område med eit klart forbetringspotensiale for denne læraren, spesielt i lys av at dette var ein repetisjonssekvens, der elevane burde kunne ha mykje å bidra med. Eit anna moment er at lærar har laga ein fin figur som illustrer multiplikasjonen 5 ganger $\frac{3}{4}$, men i sjølve presentasjonen vert det, som tidlegare nemnt, ikkje lagt vekt på sjølve tolkinga av denne. Der vert det berre fokusert på oppstillinga av reknestykket på symbolform. Sekvensen viser altså tydeleg forskjellen på generell fagkunnskap og spesiell fagkunnskap. Ved at lærar ikkje har denne typen fagkunnskap present, får ikkje undervisningssekvensen den matematiske rikdommen som han potensielt kunne hatt. Dette vert dermed òg eit døme på korleis læraren sin undervisningskunnskap i matematikk får innverknad på kvaliteten i undervisninga. Den didaktiske trekanten (figur 2) viser det same; at læraren sin relasjon til det faglege innhaldet får konsekvensar for eleven sitt møte med dette innhaldet. Noko tilsvarande gjeld for lærar i transkripsjon 2. Det er bra at lærar trur han forstår kva eleven tenkjer, eller prøver å uttrykkje, men dimensjon 4 hjelper oss til å sjå at elevdeltakinga gjennom elevforklaring og eleven sitt kognitive engasjement med fordel kunne blitt meir utfordra. I høve til figur 1, peikar dette tilbake på læraren sin fagdidaktiske kunnskap. Med utgangspunkt i figur 2 ser vi at dette valet får konsekvensar for eleven sitt forhold til det faglege innhaldet.

Fokus på innhald

Det er heilt klart at MKU-omgrepsapparatet er eit verktøy som fokuserer på kvaliteten ved innhaldet i matematikkundervisninga. Fokuset på innhald er så pass sterkt, at apparatet langt på veg er "blind" for ein del andre komponentar ved undervisningssituasjonane, som kan vere verdifulle for elevane si læring. Dette er ikkje unaturleg, i og med at dette verktøyet er utvikla som ein reaksjon på ulike reformpedagogiske trekk og verknadane av desse, der innhaldet gjerne har kome i skuggen av overordna pedagogiske idéar og organisatoriske trekk. Indikatorane fokuserer tydeleg på det faglege innhaldet, også når ein kanskje kunne tru at det dreiar seg om meir generelle pedagogiske verkemiddel og ytre trekk. Til dømes når indikatorlista fokuserer på elevdeltaking, er det ikkje på eit generelt grunnlag, men elevdeltaking i *matematiske resonnement og meiningsskaping*.

MKU-indikatorane har altså eit sterkt fokus på innhald og er i mindre grad i stand til å fange opp variasjonar i arbeidsmåtar. Eit døme på denne eigenskapen ved apparatet observerte vi i den same klassa som transkripsjon 2 er henta frå. Læraren hadde her eit undervisningsopplegg som fokuserte på forholdstal representert ved brøk, desimaltal og prosent, og det å sjå samanhengen mellom desse representasjonsformene. Dette undervisningsopplegget vart gjennomført i to ganske ulike samanhengar. Den eine utandørs med sterkt innslag av fysisk aktivitet og konkurransepreg, den andre inne i klasserommet nokre dagar etter, som del av "stasjonsarbeid" (Opsvik & Skorpen, 2012, s. 162–164, 168). I og med at innhaldet var det same i desse to gjennomføringane, vil skilnaden i arbeidsmåte og organisering i liten grad kome til syne ved bruk av MKU-indikatorane. Vi kan ikkje sjå bort frå at det å løyse same oppgåva i to ulike ytre samanhengar, og det at oppgåva vart repetert, i seg sjølv bidrog til å auke læringsutbyttet hos elevane. Det er derfor viktig å hugse på at MKU-apparatet er konstruert for å løfte fram den matematiske kvaliteten ved undervisninga, og ikkje er meint å fange den universelle didaktiske eller pedagogiske kvaliteten ved undervisninga. For å studere fleire sider ved undervisninga må ein gjerne kombinere fleire ulike omgrepsapparat og modellar. Michigan-miljøet kommenterer òg dette ved at dei opplever vanskar med å konstruere MQI-instrumentet slik at det fangar opp kvalitetane i måten eit problem vert introdusert på, og i måten læraren gjev støtte til eleven sin læringsprosess på (LMT-project, 2011).

MKU-indikatorane gjev oss eit verktøy til å studere korleis ein lærar eller lærarstudent sin undervisningskunnskap i matematikk (UKM) kjem til syne gjennom aktiviteten i klasserommet. Indikatorane hjelper oss til å fokusere på den sentrale rolla læraren har, ved at vi ser på det som skjer i klasserommet i lys av læraren sitt arbeid. Til dømes vel læraren ut oppgåver, og kanskje læreverk og andre læremiddel. Læraren bestemmer òg langt på veg graden av elevdeltaking og elevaktivitet enten direkte eller gjennom val av oppgåver og aktivitetar. I ein rettleiingssituasjon er det viktig å løfte fram desse sidene ved ein lærar eller lærarstudent sin praksis. Bak det læraren gjer i klasserommet, og som vi får hjelp til å observere gjennom bruk av MKU-indikatorane, ligg denne læraren sin undervisningskunnskap i matematikk (UKM).

Kjeldeliste

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389–407.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W. & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 25 (2), 119–142.

Fauskanger, J., Bjuland, R. & Mosvold, R. (2010). "Eg kan jo multiplikasjon, men ka ska eg gjørr?" – det utfordrende undervisningsarbeidet i matematikk. I T. Løkensgard Hoel, G. Engvik & B. Hansen (red.), *Ny som lærer - sjansespill og samspill* (pp. 99-114). Trondheim: Tapir Akademisk Forlag.
Grevholm, B., Björklund, C. & Strømsnes, H. (2013). *Matematikkundervisning 1–7*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.
Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L. mfl. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: an exploratory study. *Cognition & Instruction*, 26 (4), 430–511.
Hill, H. C., Charalambous, C. Y., Blazar, D., McGinn, D., Kraft, M. A., Beisiegel, M. mfl. (2012). Validating arguments for observational instruments: attending to multiple sources of variation. *Educational Assessment*, 17 (2-3), 1–19.
Hill, H. C., Schilling, S. G. & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105 (1), 11–30.
Hopmann, S. (1997). Wolfagang Klafki och den tyska didaktiken. I M. Uljens (red.), *Didaktik: teori, reflektion och praktik*. Lund: Studentlitteratur.
Kleve, B. (2010). Brøkundervisning på barnetrinnet – aspekter av en lærers matematikkunnskap. *Acta didactica Norge*, 4 (1), 1–14.
Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U. A. K. S. & Neubrand, M. (2013). *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers: results from the COACTIV project*. Boston: Springer U.S.
Künzli, R. (1998). The common frame and the places of didaktik. I B. H. Gundem (red.), *Didaktik and/or curriculum. An international dialogue* (s. 29–45). New York: Peter Lang Publishing.
LMT-project. (2011). Measuring the mathematical quality of instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14 (1), 25–47.
NCTE, National Center for Teacher Effectiveness (2013). *Mathematical quality of instruction*. Lasta ned frå http://isites.harvard.edu/icb/icb.do?keyword=mqi_training
Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.
Opsvik, F. & Skorpen, L. B. (2010). Lærar som kontrollør versus tilretteleggjar i matematikkundervisning. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, 94 (3), 219–230.
Opsvik, F. & Skorpen, L. B. (2012). Om kvalitetar i matematikkundervisning. I P. Haug (red.), *Kvalitet i opplæringa. Arbeid i grunnskulen observert og vurdert* (s. 144–170). Oslo: Det Norske Samlaget.
Petrou, M. & Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. I T. Rowland & K. Ruthven (red.), *Mathematical knowledge in teaching* (s. 9–25). London: Springer.

Ringdal, K. (2013). *Enhet og mangfold: samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode*. Bergen: Fagbokforlaget.
Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8 (3), 255–281.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4–14.
Streitlien, Å. (2009). *Hvem får ordet og hvem har svaret? – om elevmedvirkning i matematikkundervisningen*. Oslo: Universitetsforlaget.

Notater

1 Prosjektet var ein del av Noregs forskingsråd sitt program PRAKSISFOU (Praksisrettet FOU-arbeid i barnehage, grunnopplæring og lærerutdanning).

2 Dei har òg identifisert ein femte dimensjon, men den vil ikkje bli vektlagt her, sjå fotnote 3.

3 Ein femte dimensjon, "Classroom work is connected to mathematics", som registrerer om arbeidet i klasserommet er knytt til matematikk, er òg ein del av MQI-instrumentet.

4 Vi har i omsetjinga prøvd å bruke norske ord og omgrep som er mest mogleg dekkande for dimensjonane og indikatorane i originalteksten. I nokre tilfelle har dette lete seg gjere ved ei nærast ord for ord omsetjing, medan det i andre tilfelle har vore naudsynt med noko større grad av omskriving.

5 I klassar der ikkje alle elevane ynskte å bli observerte, laga vi "blindsoner" der desse elevane kunne arbeide og opphalde seg utan å kome med på videoopptaka. Datainnsamlinga er gjort etter godkjenning frå Personvernombodet.

6 Figur 3 og 4 er vår "reproduksjon" av dei figurane som vart vist på den interaktive tavla.

7 Opptak tyder altså i denne samanhengen at ein elev kjem med ei utsegn som læraren inkluderer og byggjer vidare på i undervisninga (Streitlien, 2009).

Frode Opsvik

Frode Opsvik er høgskulelektor i matematikk og har undervist i lærarutdanningane ved Høgskulen i Volda sidan 1998. Forskingsinteressa hans er klasseromsstudier av matematikkundervisning som grunnlag for kvalifisering av lærarar.

frode.opsvik@hivolda.no

Leif Bjørn Skorpen

Leif Bjørn Skorpen er førstelektor i matematikk og har undervist ved lærarutdanningane ved Høgskulen i Volda sidan 1992. Hans interesser er i hovudsak knytt til klasseromsforsking, matematikkvanskar og matematikk i tverrfaglege samanhengar, spesielt matematikk og musikk.

leifbjorn.skorpen@hivolda.no

Abstract in English

In this article we show how mathematics instruction can be studied by applying a modified version of the concept *Mathematical quality of instruction* (MQI), and its related observation and analysis instrument, developed by a U.S. research team. Our research questions are: How can we adapt and develop the concept of MQI and its associated structure of concepts for use in tutoring situations? And how can we use the adapted MQI-indicators as a tool to focus on various mathematical qualities in mathematics instruction. The MQI instrument was originally developed for making quantitative studies based on videotapes of mathematics lessons. We have translated and adapted the key concepts of this instrument to Norwegian, and show how these can be used in qualitative analyses of mathematics instruction. Examples of this usage are taken from our own video material collected in the project ”Kvalitet i opplæringa” (Quality in education) financed by The Research Council of Norway and Volda University College. Our adapted instrument is, in our opinion, useful when observing and tutoring student teachers.