Omtale av Matematik for lærerstuderende – Ypsilon, basisbog

Frode Rønning

Hansen, H. C., Skott, J. & Jess, K. (2008), *Matematik for lærerstuderende. Ypsilon, basisbog*. Forlaget Samfundslitteratur. ISBN 978-87-593-1302-2 (Bind1), ISBN 978-87-593-1346-6 (Bind2)

Hans Christian Hansen, Jeppe Skott og Kristine Jess har skrevet de to bindene av boken Ypsilon som utgjør første del av den store utgivelsen *Matematik for lærerstuderende* på Forlaget Samfundslitteratur. Læreboksystemet består av i alt fire bøker (fem bind) og er tilpasset den danske lærerutdannelsen etter revisjonen i 2006. Etter denne revisjonen utgjør linjefaget matematikk 1,2 årsverk (tilsvarende 72 ECTS). Linjefaget er delt i to like deler der den første delen er en grunnleggende del som er felles for alle studenter. Den andre delen er basert på trinnspesialisering, enten mot 1.–6. klassetrinn (begynner- og mellomtrinn) eller mot 4.–10. klasse (mellom- og sluttrinn). Boken Ypsilon er ment for bruk i den første halvdelen av linjefaget. Videre finnes bøkene Epsilon og Omega rettet mot henholdsvis de lavere og de høyere klasser i den trinnspesialiserte delen av linjefaget. Den siste boken, Delta, er seriens grunnbok i fagdidaktikk og er ment til gjennomgående bruk i hele linjefaget, uavhengig av trinnspesialisering.

Ypsilon er inndelt etter tradisjonelle matematikkfaglige emner i sju deler:

I. Eksperimenterende geometri og måling

II. Tall og regneprosesser historisk sett

Frode Rønning
Høgskolen i Sør-Trøndelag, Trondheim

Rønning, F. (2008). Omtale av Matematik for lærerstuderende – Ypsilon, basisbog. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 13 (3), 75–85.

III. De rasjonale tall

IV. Algebra

V. Matematisk argumentasjon

VI. Geometriske resonnement og representasjoner

VII. Stokastikk

Utvalget av emner er gjort etter tankegangen at dette er emner som enten er å anse som sentrale for alle matematikklærere eller det er emner som er spesielt sentrale på mellomtrinnet, som alle studenter kvalifiserer seg for uavhengig av trinnspesialisering. Boken tar sikte på å behandle både matematikkfaglige og fagdidaktiske emner som en helhet. Dette er prisverdig av to grunner. For det ene fordi de matematikkfaglige emnene da kan ses i relasjon til den profesjonen der de skal anvendes, og for det andre fordi de didaktiske emnene kan ses i direkte relasjon til det faget og de fagemnene der de skal brukes. Boken tar på alvor det som en rekke matematikkdidaktikere (se for eksempel Ball & Bass, 2003; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Ma, 1999; Rowland, Huckstep & Twaites, 2005; Skott, 2004; Sullivan & Wood, 2008) peker på, at det finnes en matematikkompetanse som er spesifikk for en som skal være lærer.

Del I. Eksperimenterende geometri og måling

Allerede i innledningen til dette kapitlet gjøres det klart at boken er bygd på et syn på matematikk som menneskeskapt og under utvikling, og at det er et mål å utvikle et slikt fagsyn også hos dem som leser boken. Dette fagsynet søkes her utviklet gjennom en eksperimenterende og utforskende arbeidsform, og fagemnet geometri er valgt som en første inngang til en slik arbeidsform. Hensikten er da at studentene skal kunne anvende denne arbeidsformen senere på andre fagemner, og ikke minst gjøres i stand til å tilrettelegge for en slik arbeidsform med elever. Gjennom hele boken kommer man i kontakt med de ulike *kompetanser* for matematikk som er beskrevet i den danske KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002), og en kan si at det første kapitlet har som overordnet formål å utvikle studentenes problemløsningskompetanse. For å eksemplifisere arbeidsformen presenteres en del velkjente øvelser, for eksempel å beregne areal på spikerbrett (sømbræt).

I kapitlet om areal argumenteres det for at det for barn er intuitivt lettere å forholde seg til både lengde og volum enn til areal. Dette begrunnes med at barn har mange flere praktiske erfaringer med lengde og volum enn med areal. Gjennom eget arbeid med lærerstudenter har jeg erfart at for svært mange er begrepsbildet (Tall & Vinner, 1981) for areal nært knyttet til lengde ganger bredde. Dersom jeg ber en gruppe studenter om å *måle* arealet av et rektangelformet område, så skjer som oftest at de fleste måler lengden og bredden og så *regner ut* arealet. I boken legges det opp til en grunnleggende forståelse for arealbegrepet før formlene for areal av ulike figurer presenteres. Disse kommer da som resultat av en deduktiv fremstilling og bygger på fire utsagn som kalles 'aksiomer for areallæren'. Disse aksiomene er svært "euklidske" i sin natur, og det kan kanskje synes vel formalistisk å presentere disse for studentene, særlig så tidlig i studieløpet.

Selv om bokserien inneholder én bok som er dedikert til fagdidaktiske emner (Delta), så blir man også i Ypsilon presentert for fagdidaktiske begrep, både slike som er spesielt knyttet til det bestemte fagemnet som behandles og slike som er mer overordnede. I kapitlet om areal blir man for eksempel presentert for begrepet *didaktisk situasjon* slik dette er innført av Brousseau (1997). Teorien for didaktiske situasjoner blir grundigere presentert i kapittel 7, og det er et gjennomgående inntrykk at denne teorien har spilt en viktig rolle som grunnlag for arbeidet med boken.

Kapitlet om volum bygger på tenkningen fra arealkapitlet, men følger ellers en nokså tradisjonell framstilling. Jeg synes det er interessant å merke seg er at forfatterne har valgt å ta med Cavalieris prinsipp. Dette gjør det for eksempel mulig å bevise formelen for volumet til en vilkårlig pyramide ved å sammenligne med en pyramide med kvadratisk grunnflate og sideflater som danner 45 grader med grunnflaten. Ofte blir formler for romlegemer presentert med liten eller ingen begrunnelse i bøker av denne typen, og bevisene kommer først når man har integralregning til rådighet. Det er derfor interessant å se hvordan et resultat som Cavalieris prinsipp, som historisk hører til grunnlaget for integralregningen, i noen tilfeller kan gjøre samme nytte som den mer utviklede integralregningen. Når man får behov for å sammenligne for eksempel en kjegle med en pyramide, kommer man allikevel til kort så lenge man ikke har tilgang til grenseverdibegrepet.

Del II. Tall og regneprosesser historisk sett

I denne delen presenteres en rekke historiske aspekter både ved tall og tallbehandling. Det gjelder tallsymboler og tallsystemer i ulike kulturer, utviklingen fra regnebrett til algoritmisk regning gjennom innføringen av posisjonssystemet, samt innføring av negative tall, logaritmer og komplekse tall, for å nevne noe.

Som leser får en det inntrykk at forfatterne hele tiden ønsker å gi et bilde av matematikken som et fag eller en vitenskap med flere ansikter. På den ene siden utvikles matematisk kunnskap gjennom eksperimentering og utforsking, og på den andre siden etableres kunnskapen gjennom en deduktiv fremstilling. Indirekte presenteres ulike filosofiske retninger innen matematikk, og i kapitlet om tall blir man presentert for aspekter ved en formalistisk (Ernest, 1991) tilgang gjennom at Peanos aksiomer for de naturlige tall blir presentert. I slutten av kapitlet blir man også antydningsvis presentert for formalismens sammenbrudd gjennom henvisning til Gödels ufullstendighetsteorem.

Del III. De rasjonale tall

Brøk og desimaltall kan nok sies å være av de emner som skaper størst utfordringer i matematikkundervisningen på mellomtrinnet. For å utvikle et rikt brøkbegrep er en avhengig av å utvikle forståelse for dets mange aspekter, herunder brøk som tall, del av helhet, forhold og operator (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992). Desimaltall krever god forståelse for posisjonssystemet, og i operasjoner med desimaltall blir flere tidligere oppfatninger basert på erfaringer med heltall utfordret, som for eksempel at 'multiplikasjon gjør større' og 'divisjon gjør mindre' (se f.eks. Bell, Greer, Grimison & Mangan, 1989). Det er derfor naturlig at det er gjort mye forskning innenfor dette feltet, og det er ett av de områdene som Brousseau har arbeidet med (se f.eks. Brousseau, Brousseau & Warfield, 2004) innenfor teorien for didaktiske situasjoner. Brøk er også sentralt innenfor den hollandske skolen *Realistisk matematikkundervisning* (*RME*) (se f.eks. Streefland, 1991). Begge disse retningene og deres arbeid med brøkregning blir presentert i kapittel 7. Den innledende behandlingen av brøkbegrepet og regning med brøk kan til tider bli noe regelfokusert.

Kapittel 8 omhandler negative tall. Dette innledes med en seksjon om representasjoner der forfatterne diskuterer hvilke representasjoner som kan være tjenlige for å arbeide med negative tall. Med representasjoner menes her konkretiseringer, eller det man, med referanse til Steinbring (2006), også kunne kalle referansekontekster. Begrepet representasjoner brukes dermed noe annerledes enn slik man er blitt vant med det for eksempel gjennom arbeidene til Duval (2006) og tidligere hos Janvier (1987).

Det mest problematiske i regning med negative tall er formodentlig multiplikasjon av to negative tall; hvorfor gjelder regelen "minus ganger minus blir pluss"? Det finnes ulike måter å rimeliggjøre denne regelen på basert på intuitive oppfatninger, men alle kan til en viss grad sies å være kunstige. Freudenthal sier at denne regelen kanskje er det første tilfellet man møter der man må akseptere en regneregel som en definisjon uten at den er intuitivt opplagt. "I think that the need for rationalization exceeding intuitivity is first felt with negative numbers" (Freudenthal, 1973, s. 280). Han foreslår det han kaller en "inductive-extrapolatory method" (s. 281) som kan sammenlignes med det som ofte gjøres for å utvide regnereglene for potenser til å omfatte potenser med eksponenter som ikke er naturlige tall. Fischbein drøfter også dette problemet med kommentaren

> [b]ut the problem of (-a) x (-b) is much harder, not because, formally, it presents a special difficulty *but simply because even fine mathematical minds could not, for a very long time, completely rid themselves of the impact of implicit intuitive models.*
>
> (Fischbein, 1987, s. 99, utheving i original)

Fischbein refererer videre til at Hankel i 1867 kom til et gjennombrudd fordi han "no longer tries to find concrete models for justifying the negative numbers" (s. 99). I Ypsilon slås regelen ${}^-n \cdot {}^-m = n \cdot m$ fast som en definisjon, og her savner jeg en kommentar om hvorfor man velger bare å definere nettopp denne regelen, mens de andre forsøkes rimeliggjort gjennom referansekontekster. For divisjon av et negativt tall på et annet negativt tall forsøkes den tilsvarende regelen forklart gjennom en modell med "pluss-kuler" og "minus-kuler". Eksemplet ${}^-12 : {}^-4 = 12 : 4 = 3$ begrunnes her gjennom målingsdivisjon: Vi måler hvor mange ganger vi kan ta en gruppe på fire minus-kuler ut av en gruppe på 12 minus-kuler. Det kan vel innvendes at også denne modellen kan synes noe kunstig, idet man i stedet for minus-kuler godt kunne ha sagt sorte kuler uten at det hadde endret modellen. Selve begrepet *negativt tall* har altså ingen betydning for modellen; minustegnet fungerer bare som en merkelapp som skiller en type kuler fra en annen type kuler, på lignende måte som å angi fargen.

Del IV. Algebra

Algebra og algebraisk tenkning danner grunnlaget for en stor del av den matematiske aktiviteten som foregår i skolen når en kommer over den mest elementære tallbehandlingen. Algebra er et nærmest uunnværlig redskap for å kunne drive med generalisering i matematikk, samtidig som algebra utgjør et stort hinder for mange elever for å kunne arbeide med matematikk på en meningsfull måte. Mason (1996) beskriver algebra som et vannskille (watershed) for svært mange elever i skolen – et skille mellom det de behersker og forstår og det som kan fortone seg som meningsløst. Det er derfor rimelig at denne basisboken, som alle lærerstudenter i matematikk skal lese, har en seksjon om algebra. Forfatterne starter med en presentasjon av Kaputs fem aspekter ved algebra (Kaput, 1999), en inndeling som etterhånden er blitt ganske godt kjent og er mye brukt. Jeg savner imidlertid en utdyping av disse aspektene i den etterfølgende fremstillingen. Slik det er nå blir de hengende litt i luften uten å ha en spesiell hensikt. Det første aspektet, "generalisering og formalisering av mønstre og sammenhenger", gir etter mitt syn et av de sterkeste argumentene for å arbeide med algebra i lærerutdanningen. Dette gir studentene virkelig muligheten til å arbeide matematisk; se etter sammenhenger, generalisere, fremsette hypoteser, argumentere for disse, og bevise eller eventuelt motbevise dem. Generaliseringsaspektet, slik det for eksempel kommer til uttrykk hos John Mason (se f.eks. Mason, 2005) synes jeg burde ha vært fremme i mye større grad i en bok som dette.

Algebra kan sies å ha en referensiell side og en strukturell side (Kirshner, 2001), og begge disse sidene er viktige for å utvikle god innsikt i algebra. Den strukturelle siden (punkt 3 hos Kaput) kommer særlig til uttrykk i de klassiske universitetskurs i abstrakt algebra (teorien for grupper, ringer og kropper). Forfatterne velger å innføre begrepet kropp (dansk: legeme), og de bruker dette som bakgrunn for en formalistisk tilnærming til de alminnelige regnereglene. Jeg er redd for at dette kan være noe for ambisiøst i et basiskurs, som denne boken er laget for. Hvis ikke studentene lykkes med å se formålet med dette kan det være en fare for at algebraen forblir det som den for mange har kommet til å bli i skoletiden, "en syntaktisk styrt manipulasjon av (ugjennomskuelig) formalisme" (Kaputs punkt 2).

Jeg synes derfor det med fordel kunne ha vært lagt mer vekt på andre aspekter ved algebra. Modelleringsaspektet (Kaputs punkt 5) synes jeg også med fordel kunne ha vært fremhevet sterkere gjennom at kapittel 11, om funksjoner, i sterkere grad hadde vært knyttet til modellering. I stedet blir dette kapitlet nokså tradisjonelt.

Kapitlet om funksjoner gir imidlertid et av mange gode eksempler på at forfatterne evner å innlemme fagdidaktisk stoff som en naturlig del av det matematiske fagstoffet, idet man her innfører begrepene *begrepsdefinisjon* og *begrepsbilde*, som først ble brukt av Tall og Vinner (1981) og som nå hører med blant de mest fundamentale begrepene i matematikkdidaktikk. Under hånden nevnes det å se på en funksjon som en *prosess* eller som et *objekt*, og objektaspektet knyttes til behovet for å kunne gjøre noe med en funksjon, for eksempel finne inversfunksjonen. Distinksjonen prosess-objekt blir her litt usynlig og kunne gjerne ha vært utdypet litt mer, med henvisning til begrepet reifisering (Sfard, 1991). Det er et interessant avsnitt der en har tatt med eksempler på definisjoner av begrepet funksjon til ulike tider og i ulike lærebøker. Det kunne være en interessant øvelse å se på disse definisjonene i lys av om de hovedsakelig betrakter funksjon som en prosess eller som et objekt.

Del V. Matematisk argumentasjon

Beviset har en helt sentral plass i vitenskapsfaget matematikk. Det er derfor naturlig at dette kommer til uttrykk i en bok som dette. I denne seksjonen møter man eksempler på ulike typer bevis, og man presenteres for bevis basert på mer eller mindre intuitive geometriske fremstillinger og også bevis basert på formell setningslogikk. Seksjonen inneholder også et kapittel om språk og definisjoner der man kommer tilbake til de sentrale begrepene begrepsdefinisjon og begrepsbilde.

Denne seksjonen gir også en presentasjon av aksiomatiske systemer gjennom arbeid med definisjoner, aksiomer og bevis bygd på disse. Her får en også et lite innblikk i geometrier som er alternativer til den klassiske euklidske geometrien. Det synes som at fremstillingen er basert på en felles forståelse av hva et bevis er, og at denne forståelsen er sammenfallende med slik den er i det klassiske vitenskapsfaget. I en fagdidaktisk sammenheng kan det imidlertid være av interesse å snakke om *bevisnivåer* (Balacheff, 1988) idet en elev i skolen godt kan bli overbevist om at en sammenheng gjelder generelt bare gjennom å se på noen få eksempler. Hvis denne formen for naiv empirisme, som Balacheff kaller det, blir den dominerende forståelsen for bevis, vil det også ødelegge for mulighetene til å se rikdommen i en generaliseringsprosess. For en lærer er det derfor en didaktisk utfordring å arbeide med ulike bevisnivåer for å utvikle forståelse for behovet for en mer allmenngyldig argumentasjon enn den som ligger i å teste noen få eksempler.

Del VI. Geometriske resonnement og representasjoner

Denne seksjonen består av fire kapitler med til dels ganske ulikt innhold. I det første kapitlet i seksjonen (kap. 15) arbeides det med geometri på et aksiomatisk grunnlag, i motsetning til i Del I, der geometrien ble betraktet på et mer eksperimentelt grunnlag. Hensikten med kapittel 15 synes å være å gi et bilde av en euklidsk måte å angripe geometrien på. Forfatterne sier at de har latt seg inspirere av Euklids måte å bygge opp geometrien på, det vil si at de ikke foregir å følge Euklids framstilling. Det synes imidlertid ikke godt begrunnet hvorfor man velger andre aksiomer enn Euklid når først hensikten er å presentere en euklidsk tilgang. Parallellaksiomet er for eksempel gjengitt i Playfairs formulering (Heath, 1956, s. 220), som i Ypsilon på side 562 betegnes som “en moderne udgave”.

Forfatterne har også valgt å ta med som et eget aksiom i tillegg til Playfairs aksiom, den egenskapen at ensliggende vinkler ved parallelle overskjæringslinjer er like store. Dette utnyttes imidlertid i en undersøkelse der leseren blir bedt om å undersøke hvorvidt de to formuleringene om parallelle linjer faktisk kan være ekvivalente.

Boken kommer stadig tilbake til de åtte kompetanseområdene som beskrives i den danske KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002). Dette er naturlig, da disse kompetanseområdene har fått stor innflytelse på matematikkdidaktikk både i Norden og utenfor, blant annet gjennom rammeverket for PISA (OECD, 2006). Kapittel 16 er viet to av disse kompetanseområdene, problemløsnings- og resonnementskompetanse. Her diskuteres ulike problemløsningsstrategier anvendt på geometriske problemer.

I de to neste kapitlene behandles to nokså forskjellige tema fra geometri; analytisk geometri i kapittel 17 og tegning av tredimensjonale objekter i kapittel 18. Det sistnevnte temaet blir behandlet nokså oppskriftsmessig og kan synes å være tatt med fordi det er et tema i den gjeldende læreplanen i den danske skolen, slik det også er blitt det i den norske skolen etter siste læreplanrevisjon (KD, 2006). Det er klart at dette emnet er sterkt knyttet til billedkunst, hvilket nevnes, men ikke kommer til uttrykk i særlig grad gjennom eksempler. Eksemplene som gis blir svært skjematiske, og jeg savner gjengivelse av virkelige bilder (kunstverk) der man tydelig kan se effekten av bruk av perspektiv, eller mangel på bruk av perspektiv.

Del VII. Stokastikk

Statistikk er et eget vitenskapsfag, adskilt fra matematikk, men som skolefag er det en del av matematikkfaget. Det vil det da også naturlig være i lærerutdanningen, og derfor er det naturlig at en seksjon vies til dette temaet. Her behandles både beskrivende statistikk og sannsynlighetsregning og kombinatorikk. Et kapittel om stikkprøver og estimering gir et lite innblikk i statistisk undersøkelsesmetode, og et kapittel om stokastikkens didaktikk avslutter hele boken.

Oppsummering

Det er et imponerende arbeid som er lagt ned i å skrive dette verket som Ypsilon utgjør første del av. Jeg vil peke på to særlig sterke sider ved boken. For det ene gir forfatterne en fremstilling av matematisk fagstoff ut fra den forutsetningen at dette er en fremstilling beregnet på fremtidige lærere. Forfatterne legger altså til grunn at lærerutdanningsfaget matematikk er noe annet enn både vitenskapsfaget matematikk og skolefaget matematikk. For det andre legger forfatterne opp til en integrering av de matematikkfaglige og de fagdidaktiske temaene, ikke bare gjennom å snakke om tilrettelegging for undervisning, men også gjennom eksplisitt å introdusere faglige, teoretiske begreper fra matematikkdidaktikk som vitenskapsområde. Her skal det også understrekes at forfatterne har lagt vekt på å ta med resultater fra nyere matematikkdidaktisk forskning.

Man kan oppleve at når fagmatematikere ved universitetene skal vurdere matematikkemner i lærerutdanningen så er de opptatt av hvor stor andel av emnet som er matematikk og hvor stor andel som er didaktikk. Dette mener jeg er en umulig problemstilling, for når en arbeider med lærerutdanningsfaget matematikk, så bør de fagmatematiske og de fagdidaktiske emnene støtte hverandre gjensidig og gå over i hverandre. Dermed blir det tilnærmet umulig å si når en holder på med det ene og når en holder på med det andre. Jeg opplever at denne boken er skrevet med et slikt syn som grunnlag.

Ypsilon er skrevet for bruk i første halvdel av linjefaget matematikk i dansk lærerutdanning. I tillegg er det meningen at boken Delta fra samme verk skal brukes gjennom hele linjefaget. Linjefaget utgjør til sammen mer enn ett årsverk, så det er ganske omfattende, men likevel er det mitt inntrykk at det totale omfanget er stort for det halve linjefaget. Jeg ser at slik boken er bygd opp er det uproblematisk å legge opp et kurs slik at en bare bruker deler av boken. På bakgrunn av min erfaring med norske lærerstudenter så vil jeg også si at dersom de danske lærerstudenter er noenlunde lik de norske, så er deler av boken lagt opp nokså ambisiøst når det gjelder faglig nivå. Dette kan nok i noen grad ivaretas av det faktum at det danske linjefaget er et valgfag, slik at en må anta at de som i størst grad har et anstrengt forhold til matematikkfaget, ikke velger det i sin lærerutdanning. I Norge er det etter gjeldende ordning ikke mulig å velge bort matematikk i det som kalles allmennlærerutdanningen, som er det studiet som utdanner de aller fleste lærere for grunnskolen (1–10).

Referanser

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (ss. 216–230). London: Hodder and Stoughton.

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. I E. Simmt & B. Davis (Red.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (ss. 3–14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. I V. Richardson (Red.), *Handbook of research on teaching* (4. utg.) (ss. 433–456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. I D. G. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 296–333). New York: NCTM.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L. & Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (5), 434–449.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum – Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, 23 (1), 1–20.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: RoutledgeFalmer.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's elements with introduction and commentary* (2. utg., Vol. 1). New York: Dover.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: the notion of function as an example. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (ss. 67–71). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. I E. Fennema & T. Romberg (Red.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (ss. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

KD (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet* (Midlertidig utgave juni 2006). Oslo: Kunnskapsdepartementet.

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Red.), *Perspectives on school algebra* (ss. 83–98). Dordrecht: Kluwer.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: L. Erlbaum.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (ss. 65–86). Dordrecht: Kluwer.

Mason, J. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Paul Chapman Publ.

Niss, M. & Jensen, T. H. (Red.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.

OECD (2006). *Programme for international student assessment (PISA)*. Lastet ned 28. september 2008 fra http://www.pisa.oecd.org

Rowland, T., Huckstep, P. & Twaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 255–281.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.

Skott, J. (2004). The forced autonomy of mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 227–257.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 133–162.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer.

Sullivan, P. & Wood, T. (Red.). (2008). *The international handbook of mathematics teacher education. Volume 1: Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam: Sense Publishers.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

Frode Rønning
Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avd. for lærer- og tolkeutdanning
N-7004 Trondheim
frode.ronning@hist.no