Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang

En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift

Kerstin Pettersson

Studiens syfte är att visa hur en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang kan gestalta sig i en problemlösningsprocess. Studien visar att universitetsstudenter redan under sitt första år av matematikstudier förmår utnyttja en sådan växelverkan. En grupp studenter har arbetat med en analysuppgift som berör begreppen funktion och derivata samt inkluderar ett induktionsbevis. Studenterna utnyttjar i den kreativa processen intuitiva idéer och formella resonemang i ett dynamiskt samspel. Växlingarna har ett flertal funktioner: att kontrollera intuitiva uppfattningar, att skaffa nya utgångspunkter för problemlösningsprocessen, att ekonomisera resonemang och att driva arbetet vidare.

Formella resonemang som bottnar i definitioner och satser är en fundamental del av matematiken, men ett kreativt matematiskt resonemang kan inte enbart vila på formalism (Fischbein, 1987). För att hitta vägar till lösningen av ett matematiskt problem behövs även ett samspel med intuitiva idéer (Hanna, 1991). I den här studien står studenters begreppsuppfattningar i fokus så som de kommer till uttryck i arbetet med en matematisk uppgift. Syftet är då inte främst att kartlägga eller kategorisera studenternas uppfattningar av de begrepp som aktualiseras i arbetet (för en översikt av studier inom en sådan tradition, se Duit, 2006). I sådana studier jämförs de förekommande begreppsuppfattningarna med vetenskapligt vedertagna uppfattningar och studierna får därmed en mer eller mindre tydlig normativ prägel. I denna studie har ett annat perspektiv valts, ett perspektiv som syftar till att lyfta fram hur studenter nyttjar de begreppsuppfattningar de har och hur de, trots begränsningar i sin

Kerstin Pettersson
Högskolan i Skövde

Pettersson, K. (2008), Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang. En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 13 (1), 29–50.

begreppsrepertoar, besitter en avsevärd potential för matematiskt arbete. Resultaten visar att universitetsstudenter redan under sitt första år av matematikstudier förmår utnyttja ett samspel mellan intuitiva idéer och formella resonemang på ett sätt som i mångt och mycket liknar den process som vi kan finna hos tränade matematiker.

Teoretiska utgångspunkter

Formella resonemang och intuitiva idéer

Den formella sidan av matematiken utgörs av axiom, definitioner, satser och bevis. Med kedjor av logiska slutledningar byggs den formella delen av matematiken upp utgående från grundläggande definitioner och axiom. Genom logisk slutledning kan ytterligare egenskaper hos de matematiska objekten härledas och samband mellan de matematiska objekten undersökas. Formella resonemang utgör en viktig del av matematikens struktur för att fastlägga och förtydliga resultat. Formella resonemang, så som de definieras i denna text, *är logiska slutledningar som vilar på formella definitioner och satser.*

Resonemang som inte är formella, det vill säga inte fullt ut redovisar den logiska slutledningen eller dess utgångspunkter, kan betecknas som informella resonemang. Distinktionen formell-informell används till exempel av Pinto och Tall (1999) där resonemang klassificeras som informella då resonemangen inte utgår från de formella definitionerna utan baseras på individens begreppsuppfattning där de formella delarna utelämnas och resonemangen tar stöd i intuitiva idéer. Var gränsen går mellan ett informellt och ett formellt resonemang är delvis beroende av kulturella och kontextuella omständigheter. Att inte absolut kunna avgöra om ett resonemang är tillräckligt preciserat för att utgöra ett formellt resonemang kan uppfattas som en brist. Fokus för denna studie är dock hur studenter rör sig i spannet mellan formella resonemang och resonemang som tar stöd i intuitiva idéer.

Intuition är, enligt Fischbein (1987, 1999), något som skapas och utvecklas i studenters möten med till exempel matematiska objekt. I dessa möten skapas en mental representation av objektet. Denna representation är inte statisk utan produceras och reproduceras i de sammanhang där den aktualiseras. En inre föreställning skapas där matematiska begrepp uppfattas på ett sådant sätt att det blir möjligt att omedelbart och utan medveten tillgång till alla detaljer tolka och använda begreppen. Resonemang kan då göras utan att man behöver vila på de formella definitionerna. Fischbein definierar intuition som en slags kognition som för individen uppfattas som självklar. Intuition karaktäriseras dessutom av ytterligare egenskaper som omedelbarhet (uppfattas direkt i sin helhet), säkerhet (ger en övertygelse), extrapolerbarhet och globalitet (intuitiva idéer sträcker sig längre än det empiriska underlaget). Intuitiva idéer karaktäriseras också som tvingande i meningen att de genom sin självklarhet exkluderar andra tolkningsalternativ.

Med stöd i Fischbeins (1987, 1999) teorier definieras i denna studie intuitiva idéer som *en slags kognition som ger möjlighet till en omedelbar uppfattning där alla delar uppfattas direkt och tillåter resonemang utan att man behöver vila på det formella*. De mentala representationerna av denna kognition kan ses som inre föreställningar. Ibland kan dessa inre föreställningar också ges en yttre representation i exempelvis en skiss av en graf för en funktion som i någon mening utgör ett generiskt exempel. I dessa fall ligger den geometriska tolkningen eller den visuella representationen väldigt nära, och kanske till och med utgör, den intuitiva idén.

Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang

Fischbein (1994) påpekar att man vid analyser av studenters matematiska beteende måste beakta tre basala aspekter av den matematiska aktiviteten: den formella, den algoritmiska och den intuitiva aspekten. Interaktionen mellan dessa tre aspekter är enligt Fischbein mycket komplex. För att studera denna komplexa interaktion kontrasterar Fischbein de tre aspekterna parvis mot varandra. Jag har i denna studie valt att studera två av dessa aspekter, den formella och den intuitiva, och fokusera på samspelet dem emellan.

En av de relativt få undersökningar som behandlar hur studenter förhåller sig till dessa två aspekter är en studie redovisad av Pinto och Tall (1999, 2002). De klassificerar studenters lärandestrategier som tillhörande en av två kategorier: studenter skapar mening antingen genom att främst utgå från intuitiva idéer (*giving meaning*) eller utgående främst från formella definitioner och satser (*extracting meaning*). Studien visar att studenter har preferens för en av strategierna. En förklaring till detta kan vara att studenterna har sin styrka antingen i intuitiva uppfattningar eller i formella kunskaper. Moore (1994) visar i en studie att en anledning till att studenter misslyckas med att genomföra formella bevis är att de inte behärskar begreppens formella definitioner. En annan anledning är att studenterna saknar eller har för svaga intuitiva uppfattningar om begreppen. Hanna (1991) påpekar att det finns en fara i att studenter arbetar för formellt, det finns då en risk att de bara manipulerar symboler. Fischbein (1987) behandlar det omvända problemet med för starka intuitiva uppfattningar och påpekar att studenterna måste lära sig hantera samspelet mellan formellt bevisade förhållanden och intuitiva idéer.

Studenters preferenser för olika strategier kan eventuellt också förklaras av vilka lärsituationer studenterna mött under sin studietid. Studier av läroböcker (Lithner, 2004; Raman, 2002) visar att studenter genom dessa böcker inte erbjuds så många tillfällen att utveckla intuitiva uppfattningar om begreppen. En mycket stor del av uppgifterna i läroböcker är av algoritmisk karaktär och kan lösas genom imitation av typexempel. Detta gäller även uppgifter som ges i prov och tentamina (Bergqvist, 2006; Boesen, 2006). Framställningsform och urval av uppgifter i läroböcker och prov ger inte studenterna incitament att koppla samman formella definitioner med mer intuitiva karakteriseringar av begrepp.

Relationen mellan intuitiv och formell kunskap diskuteras ofta i termer av att en klyfta finns dem emellan (t ex. Bergsten, in press; Sirotic & Zazkis, 2007). Mamona-Downs (2001) och Farmaki och Paschos (2007) diskuterar hur ett lämpligt didaktiskt angreppssätt kan överbrygga denna klyfta och stödja studenter i en övergång från intuitiva antaganden till ett formellt resonemang. Bergsten (in press) menar att

> the didactical choice is not between exploiting the gap between intuitive/informal and formal knowledge by building on the one side for the profit of the other, but to engage in a kind of ping-pong procedure of reconstruction and refinement.

Det är just en sådan växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang som denna studie fokuserar. Med utgångspunkt i ett perspektiv där vi främst är intresserade av att söka den potential studenterna kan uppvisa sätts fokus på att visa hur växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang kan gestalta sig i en problemlösningsprocess. Kan förstaårsstudenter utnyttja en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang och vilken funktion har i så fall dessa växlingar?

Metod

Intentionell analys

Intuitiva idéer som de definieras i denna studie är mentala objekt som inte är direkt åtkomliga för observation. Med syftet att beskriva hur växlingar mellan intuitiva idéer och formella resonemang gestaltar sig behövs därför en analysmetod där studenternas idéer och resonemang kan tolkas med utgångspunkt från vad studenterna säger, skriver och gör. Med en konstruktivistisk grundsyn och ett kontextualiseringsperspektiv (Halldén, 1999; Nilsson, 2006) krävs en metod som ger en sammanvägning av kognitiva och situationella aspekter på skeendet. Med dessa ställningstaganden som grund har jag valt att använda *intentionell analys*. För en noggrann redovisning av metoden se Halldén (2001), Halldén, Haglund och Strömdahl (2007), Pettersson (2004), Ryve (2006), Scheja (2002) och Wistedt och Brattström (2005). Denna metod har stora likheter med den tolkande verksamhet som vi alla använder i vårt dagliga liv när vi försöker förstå människors agerande och bygger i huvudsak på von Wrights studier av vad som karakteriserar mänskligt handlande. Enligt von Wright (1971) måste man för att förstå vad en individs agerande betyder se det som ett medel för individen att uppnå ett mål. När vi ser någon springa på trottoaren samtidigt som en buss närmar sig tolkar vi situationen som att personen försöker hinna med bussen. Vi tillskriver individen en intention och det är i ljuset av denna intention som agerandet (springandet) blir meningsfullt och kan beskrivas som en handling (skynda sig till bussen).

Med hjälp av intentionell analys skapar vi en *modell* där det observerade agerandet tolkas genom att tillskriva intentioner. Vi modellerar verkligheten för att försöka förstå vad som händer på samma sätt som en tillämpad matematiker skapar modeller för bakterietillväxt, spridning av luftföroreningar eller andra problem man önskar studera. I modellen använder vi begreppet *handling*. Detta begrepp reserveras för arbetet inom modellen och ska inte förväxlas med beskrivningar av verkligheten som görs i termer av *agerande*, *beteende* och *aktiviteter*. Intentionalitet utgör ett grundantagande för modellen. Med intention menar vi inte här nödvändigtvis en medveten mental akt hos aktören. Genom att studera faktorer som kan tänkas påverka individen att agera på ett visst sätt kan vi tolka det som sker. I analysen söker vi ett fält av sammanlänkade fakta. Samma agerande, till exempel en serie enskilda beteenden som ”går mot ett fönster, lyfter handen, griper i handtaget, skjuter fönstret utåt, ...” kan ges flera förklaringar: individen agerar så *för att* vädra eller *för att* släppa ut en fluga. Ett exempel på agerande hämtat från denna studie är ”ritar ett koordinatsystem, skissar en graf, markerar ett nollställe” vilket kan ges förklaringarna: individen agerar så *för att* pröva ett enstaka exempel eller *för att* illustrera en intuitiv idé. Detta *för-att-motiv* är avgörande för vilken beskrivning som passar in i modellen. Vi söker den handling som gör enskilda beteenden rimliga och meningsfulla i ljuset av en avsikt, ett mål som individen försöker uppnå. Intentionell analys innebär just att på detta sätt systematiskt göra en tolkning av det betraktade skeendet. Tolkningens giltighet, validitet, får mätas mot det stöd tolkningen får av det empiriska materialet som samlats till exempel genom observationer samt av relevant teoribildning.

Den intentionella analysen ger en möjlighet att väga samman kognitiva och diskursiva aspekter vid tolkningen av data. För tolkningar av studenters matematiska ageranden innebär det att vi kan analysera studenternas förmågor och föreställningar om begreppen samtidigt som vi tar hänsyn till studenternas uppfattningar om situationen. Genom att ta hänsyn även till dessa kontextuella faktorer kan vi få en mer nyanserad bild av individens kognitiva förmåga (Halldén, Haglund & Strömdahl, 2007).

En problemlösningssituation

För att studera samspelet mellan intuitiva idéer och formella resonemang har jag valt att försätta en grupp universitetsstudenter i en problemlösningssituation. Uppgiften som valts innefattar begrepp som funktion, nollställe och derivata. Detta är begrepp som studenterna mött redan före sina universitetsstudier och dessutom ytterligare arbetat med under det första årets matematikstudier på universitetet. Det innebär att det är rimligt att tro att studenterna har utvecklat intuitiva idéer för dessa begrepp. Uppgiften är inte av standardtyp så studenterna kan inte direkt utnyttja någon algoritmisk lösningsstrategi. Uppgiften ger dock en specifik uppmaning om att problemlösningen ska innehålla ett induktionsbevis. Induktionsbevis är en typ av bevisföring som studenterna mött i sina kurser under det första årets universitetsstudier. Övningar i hur sådana bevis ska utföras har ingått i kursernas övningsmaterial (Vretblad, 1995, s. 72–77). Den för studien valda uppgiften ger därmed goda förutsättningar för att både intuitiva idéer och formella resonemang ska utgöra delar av problemlösningsprocessen.

Uppgiften

Låt f vara en funktion definierad på hela **R**.

a) Hur många nollställen kan funktionen högst ha om för alla x gäller att $f'(x) \neq 0$?

b) Om istället $f''(x) \neq 0$ vad gäller då för antalet nollställen till funktionen?

c) Om vi har $f^{(n)}(x) \neq 0$ vad kan då sägas om antalet nollställen till funktionen?

Använd induktion för att bevisa ert påstående.

I uppgiften finns inte mer angivet om funktionen än att den är definierad för alla reella tal. Att n:te derivatan är skild från noll för alla x kan tolkas som att funktionen är n gånger deriverbar för alla x men det är ingen helt självklar tolkning. Mitt val att inte tydligare specificera funktionen gör att det blir en del av problemlösningen att diskutera vilka förutsättningar som ska gälla.

Studien genomfördes med tre grupper av studenter som frivilligt anmält sig att medverka. I denna artikel närstuderas en av dessa, en grupp där datamaterialet erbjöd ett rikt underlag för att belysa den aktuella frågeställningen. Problemlösningen genomfördes utanför den schemalagda undervisningen och studenterna informerades om att studien skulle komma att ingå som en del i min forskning om studenters begreppsuppfattningar. Gruppen bestod av fyra studenter, två kvinnor och två män, här presenterade som Alex, Beth, Carl och Diana. De fyra följde alla ett matematikprogram vid ett svenskt universitet. Tre av dem var, när studien genomfördes, i slutet av sitt första studieår och hade under året studerat tillsammans. En av gruppmedlemmarna, Beth, gick i en högre årskurs men läste vid problemlösningstillfället samma kurs i flervariabelanalys som de andra tre. Gruppen fick inga tidsramar för sitt arbete utan instruerades att arbeta så länge de själva önskade. De kom att arbeta i 115 minuter. Gruppens arbete dokumenterades genom videoinspelning utan närvarande observatör. Samtalet har transkriberats i sin helhet och även de anteckningar som studenterna gjorde ingår i underlaget för tolkningen av gruppens arbete.

Resultat

Före presentationen av analysen av studenternas samtal ges här en kort beskrivning av hur studenterna löser uppgiften. Fokus då blir hur studenterna genomför induktionsbeviset och därför följer en kort rekapitulering av den huvudsakliga idén för ett induktionsbevis. För en utförligare presentation av gruppens arbete, se Pettersson (2004).

Studenternas bevis

Studenterna formulerar tidigt i sin diskussion en korrekt hypotes.

Hypotes: Om $f^{(n)}(x) \neq 0$ så har f högst n nollställen.

Studenterna utnyttjar efter ett tag idén att studera vad som gäller då derivatan f' har m nollställen. De övertygar sig om att funktionen då kan ha högst $m+1$ nollställen. Detta kan ses som ett lemma.

Lemma: Om f' har m nollställen så har f högst $m+1$ nollställen.

Studenterna använder argument från en figur (se figur 3) samt hänvisar till satsen om mellanliggande värden. Ett påstående som följer av lemmat utnyttjas av studenterna; vi kan se det som en följdsats även om studenterna inte själva använder den benämningen.

Följdsats: Om $f^{(p)}$ har (högst) m nollställen så har $f^{(p-1)}$ högst $m+1$ nollställen.

Studenternas slutliga bevis för hypotesen kan beskrivas som följer:

> Antag att $f^{(p)} \neq 0$. Med hjälp av det vi kallat följdsats följer då att $f^{(p-1)}$ har högst ett nollställe. Samma resonemang upprepat ger att $f^{(p-2)}$ har högst två nollställen. Upprepning på detta sätt ger till sist att f har högst p nollställen.

Gruppen producerar inte någon skriftlig lösning men i deras resonemang finns alla ingredienser till ett fullständigt bevis.

Induktionsbevis

Låt oss kort rekapitulera den huvudsakliga idén för induktionsbevis.

> Låt P_n vara ett påstående för varje naturligt tal n, det vill säga för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Påståendet ”P_n gäller för alla (positiva) naturliga tal” sägs vara bevisat med induktion om påståendet P_n på något sätt härleds från de föregående, det vill säga från $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$.

I många fall, troligen i alla de fall studenterna mött tidigare, kan P_n härledas från P_{n-1} och beviset kan då genomföras på följande sätt: Verifiera först P_1 och visa sedan att P_{n-1} medför P_n. Detta ger tillsammans ett fullständigt bevis. För studenterna verkar detta ge känslan av en process som går från lägre till högre, eller ”uppåt”. I de fall när P_n är av formen $A_n \Rightarrow B_n$, vilket gäller i uppgiften i denna studie, är den naturliga bevisgången att först visa att A_n ger A_{n-1}. Föregående påstående $A_{n-1} \Rightarrow B_{n-1}$ ger därefter B_{n-1} och det återstår att visa att $B_{n-1} \Rightarrow B_n$. Studenternas arbete med att visa att A_n ger A_{n-1} verkar ge studenterna intrycket av en rörelse från högre till lägre, eller ”neråt”.

För att möjliggöra induktionsprocessen måste det finnas någon form av relation mellan de olika påståendena P_n. I många fall är den avgörande punkten att komma underfund med hur denna relation kan utnyttjas praktiskt i härledningen av P_n från P_{n-1} (eller eventuellt från $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$). I detta fall är nyckeln att $f^{(n)}$ är derivatan av $f^{(n-1)}$. Så snart denna nyckel har hittats gäller i de flesta fall studenterna mött att bevisen inte kräver några nya idéer utan endast viss teknisk färdighet för att genomföra de beräkningar som återstår. För denna uppgift krävs däremot ytterligare idéer för att beviset ska kunna genomföras, lemmat och följdsatsen är de idéer studenterna utnyttjar[1].

Formella resonemang

Studenterna har en klar bild av den formella gången i ett induktionsbevis.

Carl: Då ska man ha ett basfall först, ... börjar vi på f prim x eller börjar man på, det finns ingen f noll x va?

Gruppen enas om att börja med $f'(x)$ och genomför ett resonemang som hänvisar till medelvärdessatsen. När gruppen kommer till induktionsantagandet har de formella kunskaper för hur detta ska göras men de känner sig inte bekväma med ett sådant antagande.

Carl: Så vi antar alltså det här för något p då. För något p så gäller att $f^{(p)}(x) \neq 0$ och då så gäller att f har p stycken nollställen. Det här känns ju livsfarligt tycker jag, men det funkar ju, det är ju så ...

Här saknas preciseringen att det handlar om *högst p* nollställen. Vi skulle därmed kunna kritisera det formella resonemanget eftersom det brister i precision. Men vi kan senare i studenternas samtal se att preciseringen återkommer när den blir kritisk för resonemanget. Genom hela problemlösningsprocessen är studenterna bekymrade eftersom de upplever att det bevis de skapar inte följer den mall de mött i tidigare undervisning. De är vana att i induktionssteget arbeta från p till $p+1$. De upplever att deras bevis innehåller en rörelse i motsatt riktning. Särskilt en av studenterna, Beth, påpekar lärobokens mall gång på gång.

Beth: Man antar väl det här liksom så, men sen så lägger man till, steget ovanför ... men då ska det ändå bli liksom, antagandet, liksom. Det är väl så ... principen är.

Beths kommentarer indikerar att hon uppfattar lärobokens mall för induktionsbevis som en algoritm som måste följas slaviskt. Detta stör och hämmar vid flera tillfällen gruppens problemlösningsprocess. Men studenterna diskuterar också hur bundna de måste vara av dessa krav på induktionsbeviset.

Carl: När vi hade det på baskursen så var det ju väldigt viktigt vilket håll man gick åt, men det känns ju som att det egentligen inte ska spela någon roll, om man vet att man landar någonstans.

De formella kraven har också en positiv påverkan på gruppens arbete. Förutom att de leder till att studenterna kontrollerar och verifierar sina idéer så driver studenternas krav på formalisering också problemlösningsprocessen vidare. Kommentarer som ”Hur kan man visa det då?”

och ”Och om man skulle göra detta formellt ...” leder till att studenterna breddar och fördjupar sitt sökande efter idéer.

Intuitiva idéer

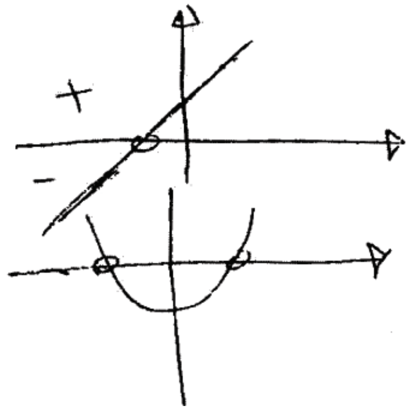
I studenternas diskussioner behandlas begrepp som funktion, derivata, andraderivata, nollställe, växande och avtagande.

Diana:	Om derivatan inte får vara noll, så får derivatan alltså inte byta tecken.
Beth:	Och då är den växande.
Diana:	Ja, växande, eller avtagande.
[...]	
Diana:	Då betyder $f'' \neq 0$ att derivatan är växande eller avtagande.
Carl:	Mm.
Diana:	Vilket betyder att derivatan får byta tecken högst en gång.
Alex:	Men den behöver inte byta tecken?
Diana:	Nä, alltså högst en gång, det är ju det vi snackar om här.
Beth:	Om den byter högst en gång då, hur ...
Diana:	... och då ser derivatan ut så här, [ritar, se figur 1] och då är den minus där och plus där.
[...]	
Diana:	[ritar funktionen, se figur 1] Så blir det, va?
Beth:	Då blir det högst ...

Alla unisont: ... två.

Diana ritar två grafer där den övre illustrerar derivatan (se figur 1). Derivatan är först negativ (markeras av Diana med ett minustecken) och blir sedan positiv (markeras med plustecknet). Derivatan har ett nollställe (inringat). Den undre delen av figuren är Dianas bild av funktionen med funktionens två nollställen markerade. Det är inte med någon större noggrannhet hon placerar funktionens minimipunkt och inte heller y-axeln är placerad helt korrekt. Det är ändå en rimlig tolkning att denna snabbt ritade skiss speglar hur derivatans tecken och nollställe påverkar funktionens utseende.

Studenterna visar genom sina diskussioner att de har och utnyttjar intuitiva idéer för de begrepp som berörs. Studenterna uppfattar dessa begrepp på ett omedelbart och självklart sätt och tillåter sig att resonera runt dessa utan att vila på det formella.



Figur 1. *Dianas bild av derivatan och funktionen där derivatan byter tecken en gång och funktionen har två nollställen*

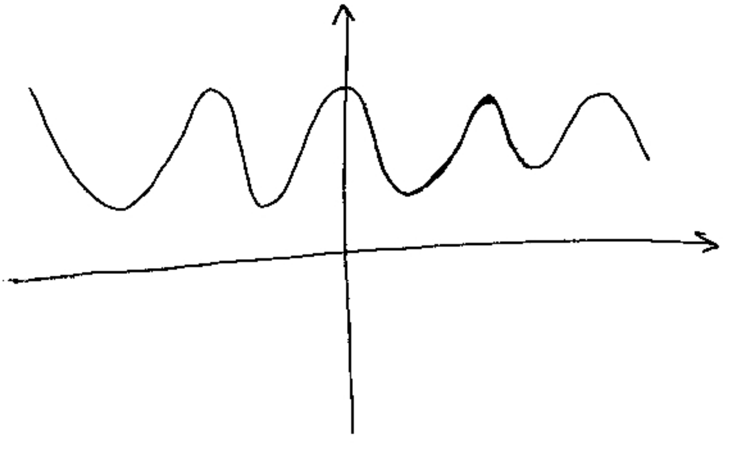
Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang

I detta avsnitt ges två längre utdrag från gruppens samtal. Gruppen har innan det första utdraget arbetat i 15 minuter och under denna tid löst de inledande deluppgifterna. De har också formulerat en hypotes och börjat diskutera hur denna ska kunna bevisas men de är osäkra på hur den bevisidé de har ska kunna formaliseras. De övergår därför till en inventering av vad deras uppfattningar om begreppen derivator och funktioner kan tillföra problemlösningen.

[1] Diana:	Men fortfarande, hur kan vi visa det? Vi kan derivera den där liksom, så får vi den där (pekar i Carls anteckningar på $f^{(n)}(x) \neq 0$ respektive $f^{(n+1)}(x) \neq 0$).
[2] Carl:	Mm.
[3] Diana:	Ja.
[4] Carl:	Ja, precis.
[5] Carl:	Och så, antingen är det färdigt eller så är det jättesvårt. (skratt)
[6] Beth:	Ja, vi har väl principen hur det liksom ska fungera ...
[7] Diana:	Om den är skild från noll, vad innebär det då för derivatan? Och om *funktionen* är skild från noll, vad innebär det då? ... om derivatan? (ritar)
[8] Carl:	Nej, just det ...

[9] Diana:	Det säger ju ingenting, eller liksom, det säger ju ...
[10] Carl:	Nej det säger ju inte någonting ...
[11] Beth:	Nej, det kunde högst vara ett nollställe, men den kanske inte har något nollställe liksom, och derivatan ändå ...
[12] Diana:	Nej.
[13] Alex:	Men, men ...
[14] Alex:	Det säger väl visst någonting, om en funktion är ...
[15] Diana:	Nej.
[16] Alex:	... skild från noll då säger det att, då korsar den inte ...
[17] Beth:	Nej, den korsar inte.
[18] Alex:	Den korsar inte. Och då måste den vara antingen växande eller avtagande.
[19] Diana:	Den kan väl gå så här? (ritar, se figur 2) x-axeln kan ju alltid ligga under, säger ju ingenting, funktionen kan ju hoppa och ha sig lite hur som helst här.

I yttrande [7] försöker Diana relatera begreppen funktion och derivata. Hon frågar vad det innebär att funktionen är skild från noll. Flera av yttrandena innehåller obestämda referenser. Vad syftar *den* på i utsagan ”Om den är skild från noll”? I formuleringen av uppgiften studenterna arbetar med anges $f^{(n)}(x) \neq 0$, så det är rimligt att anta att det är n:te derivatan som åsyftas. Vi kan också se att Diana i yttrande [1] talar om $f^{(n)}(x)$. När hon sedan frågar vad detta innebär för derivatan är det rimligt att



Figur 2. *Dianas bild av en funktion som saknar nollställen*

anta att det är derivatan av $f^{(n)}(x)$ som avses. Detta stöds av yttrande [1] eftersom derivatan av $f^{(n)}(x)$ är $f^{(n+1)}(x)$. Om så är fallet varför övergår Diana då till att fundera över vad avsaknad av nollställen hos funktionen har för effekt? En rimlig tolkning är att Diana döper om $f^{(n)}(x)$ och istället benämner detta *funktionen*. Att döpa om objekt är ett vanligt arbetssätt för matematiker och ger möjlighet till nya utgångspunkter för problemlösningen. För tolkning av "...om derivatan?" blir det viktigt med intonationen. Transkriberingen är här inte tillräckligt tydlig, men en återgång till videofilmen styrker tolkningen att Diana menar "*för* derivatan". Det är inte fundering över ett nytt fall utan hon avser en fortsättning på frågeställningen om funktionens påverkan på derivatan. Med tolkningen att Diana har döpt om $f^{(n)}(x)$ till funktionen blir då "derivatan" liktydig med $f^{(n+1)}(x)$. Genom att byta benämning kan Diana utnyttja de intuitiva idéer hon har för funktion och derivata. När hon ritar en bild av en graf (figur 2) är det på ett omedelbart och självklart sätt, utan hänvisningar till formella definitioner och satser, som hon utnyttjar dessa intuitiva idéer.

Dianas slutsats av undersökningen blir att ingen information kan fås på detta sätt. Carl och Beth håller med men Alex har invändningar. I yttrande [14] och [16] säger Alex "om en funktion är skild från noll då säger det att, då korsar den inte ...". Här är referenserna mycket oklara. Det är rimligt att anta att *den* syftar på funktionen och att den inte korsar x-axeln. Att det är funktionens korsning med x-axeln som åsyftas stöds också av yttrande [19]. Men med denna tolkning blir yttrande [18] – "Och då måste den vara antingen växande eller avtagande" – svårt att rimliggöra. Om *den* fortfarande syftar på funktionen drar Alex en felaktig slutsats. En annan möjlig tolkning skulle vara att *den* syftar på derivatan. Att en funktion saknar nollställen ger inte att derivatan är växande eller avtagande, däremot gäller det omvända att om derivatan saknar nollställen så är funktionen antingen växande eller avtagande. En rimlig tolkning blir att Alex inte just här uppvisar begreppsuppfattningar för funktion och derivata som räcker i denna problemlösningssituation. För att validera tolkningen krävs dock mer data än vad som finns i det här redovisade utdraget.

Som ytterligare ett exempel på hur materialet har analyserats presenteras ett utdrag från senare delen av studenternas samtal. Gruppen har före detta utdrag arbetat i 80 minuter. Här diskuterar studenterna ett delproblem, det som jag i beskrivningen av studenternas bevis benämnt lemma.

[1] Carl:	Om p:te derivatan har n nollställen och den primitiva funktionen till den har max n plus ett nollställen, om vi skulle veta det, ...

[2] Beth: Mm.

[3] Carl: ... och vi vet att, att *n*:te, eller *p*:te derivatan, den har inga nollställen, då vet vi i så fall att, nästa ...

[4] Diana: ... har max ett.

[5] Carl: ... har max ett nollställe, och så måste vi med induktion kunna fortsätta och säga att om *den* har max en då har *den* max två, *den* max ... och faktiskt säga nånting. Det måste vara en riktig induktion ...

[6] Diana: Ja ja, man vet att den implicerar ju den som i sin tur implicerar den som implicerar den och så.

[7] Carl: Mm. Och sen så tycker jag att om man säger att, det här är, en funktion, (ritar figur 3) så om vi har nollställen på derivatan ...

[8] Beth: Mm.

[9] Carl: ... ja, dom där är inte så bra att ta med egentligen, dom skulle bara gå ner så där egentligen (ändrar i den figur han ritat, se figur 3). Om vi har tre nollställen för derivatan då kan vi *högst* ha fyra stycken. Även om det här kanske inte var ett bra formellt bevis så känns det som att jag blir väldigt övertygad om att det *är* så, ...

[10] Diana: Ja.

[11] Beth: Jo, det är sant.

[12] Carl: ... och då så stämmer det och då så stämmer det alltihop.

[13] Diana: Mm.

[14] Carl: Och om man skulle göra det här formellt, ...

[15] Diana: Det där går ju att bevisa, liksom *den* ...

[16] Carl: ... det är ju egentligen det där som är för ett nollställe, i intervall måste det ju vara, ...

[17] Diana: Mm.

[18] Carl: ... och att om en funktion är strängt växande eller strängt avtagande i ett intervall och den börjar på ena sidan ...

[19] Diana: Mm.

[20] Carl: ... så där (ritar figur 4). Den måste ha ett nollställe då, om ...

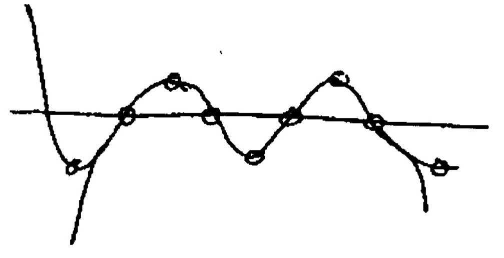
[21] Diana: Ja, ja men det är ju liksom så här enligt så här ...

[22] Carl: ... alfa till beta och medelvärdessatsen.

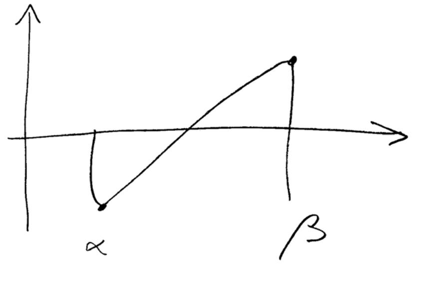
[23] Diana: Ja ...

[24] Carl: ... och sånt. Och att den måste ...

[25] Diana:	Ja, och mellanliggande värde.
[26] Carl:	Ja, mellanliggande värde också, ja just det.
[27] Diana:	Ja, och om derivatan är positiv så är den växande, och det vet vi och så det behöver vi inte, krångla med, tror jag. Men, ja ...
[28] Beth:	Jag sitter helt tyst, för jag tycker de här grundgrejorna de förstår man ju, men man ska bevisa med induktionen nånting liksom, det känns som man bara bollar med samma saker och jag förstår inte hur man ska få det på rätt sätt då.



Figur 3. *Carls bild av en funktion där funktionens och derivatans nollställen är markerade*



Figur 4. *Carl illustrerar satsen om mellanliggande värden*

Carl uttalar i [1] en hypotes: Om $f^{(p)}$ har n nollställen så har $f^{(p-1)}$ maximalt $n+1$ nollställen. Yttrande [3] lägger till att i detta fall ska n vara noll. Av detta ska då, enligt Carls yttrande [5], en slutsats kunna dras om antal nollställen för funktionen f. Slutsatsen formuleras inte men en rimlig tolkning är att slutsatsen är samma som den hypotes gruppen tidigt i sitt arbete slog fast: Funktionen f kan ha högst n nollställen. Carl säger i [5] att ”det måste vara en riktig induktion”. Han verkar övertygad men går ändå vidare.

I yttrande [9] ritar Carl en figur över en funktion (se figur 3). Denna figur kan tolkas som ett generiskt exempel där en intuitiv idé kommer till uttryck. Exemplet kan generaliseras till godtyckligt antal nollställen. Funktionen är också vald så att möjliga fall täcks in. Det kan därför ses som en rimlig tolkning att Carl här inte bara prövar ett enda exempel utan ser det generella i exemplet. En tänkbar tolkning av agerandet kan då vara att Carl försöker övertyga sig själv om sanningshalten i hypotesen. Carl säger sig bli väldigt övertygad om att hypotesen stämmer men söker därefter ändå ett sätt att formalisera den intuitiva idén. Vid försöken att formalisera gör Carl i [16] ett uttalande där han påstår att nollställena måste ligga i intervall. Yttrandena [18] – [25] innehåller kopplingar mellan exemplets funktion uppdelad i intervall och formella satser som behandlar kontinuerliga funktioner på intervall. En rimlig tolkning är att studenterna här letar efter formella definitioner och satser där de inblandade objekten finns representerade. I yttrande [20] och [22] extraherar Carl väsentliga delar i det han först kallar medelvärdessatsen och senare, efter Dianas kommentar i yttrande [25], satsen om mellanliggande värden. I Dianas yttrande [27] säger hon att ”om derivatan är positiv så är den växande” och ”det behöver vi inte krångla med”. En tolkning av detta kan vara att hon har en intuitiv idé om växande funktioner och därför inte har behov av ett formellt bevis. En annan möjlig tolkning är att hon menar att sambandet mellan positiv derivata och en växande funktion i denna kontext anses vara en del av den gemensamma matematiska kunskapen och så grundläggande att bevis inte krävs.

Beth uttrycker i [28] en osäkerhet i den formella hanteringen av induktionsbeviset. Hon har, som redan nämnts, under diskussionen vidhållit att induktionen bör göras på ett visst sätt. Hennes kommentar gör att de andra studenterna blir osäkra. De övergår då i en inventeringsfas och försöker befästa sina intuitiva idéer med hjälp av formella definitioner och satser.

Slutsatser och diskussion

Växlingar och deras funktioner

Analys av det empiriska materialet visar, som redovisats ovan, att dessa förstaårsstudenter utnyttjar en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang. I ett intentionellt perspektiv är det emellertid inte bara intressant att belysa *hur* studenter resonerar kring en given uppgift utan också *varför* de resonerar som de gör, vilken mening deras agerande kan sägas ha. Med stöd i det empiriska materialet kan vi inte bara ge exempel på växlingar, vi kan också beskriva växlingarnas funktion.

Växlingar för att kontrollera intuitiva idéer
Vi ser vid ett flertal tillfällen att studenterna lämnar sina intuitiva idéer och söker stöd i formella definitioner och satser. Carl har till exempel genom ett generiskt exempel övertygat sig om den uppställda hypotesens korrekthet. Men han går vidare och försöker formalisera sina idéer. Studenterna söker vid detta och andra tillfällen kopplingar mellan sina idéer och formella resultat för att befästa hypotesers korrekthet med formella argument men också för att säkerställa de intuitiva idéerna och kontrollera sina intuitiva uppfattningar. Studenterna tar också vid flera tillfällen stöd i den formella struktur som de uppfattat att induktionsbeviset innefattar. Växlingen från intuitiva idéer till det formella beviset leder därmed det kreativa arbetet framåt. Den formella strukturen blir en ledstång som gör att studenterna tar sig vidare.

Växlingar för att få nya utgångspunkter
När studenterna kör fast i försöken att formalisera sina intuitiva idéer söker de möjligheter till nya intuitiva utgångspunkter genom att växla från formella resonemang till intuitiva idéer. I resultatavsnittet presenterades en diskussion mellan Diana och Alex. Alex lämnar i diskussionen uttrycket ”funktionen är skild från noll”. Detta språkliga uttryck hänvisar till matematikens formella symbolspråk; $f(x) \neq 0$. Han övergår till att tala om att funktionen ”inte korsar” x-axeln. Detta uttryck refererar till en geometrisk eller visuell representation. Dessa representationsformer är vanliga för intuitiva idéer. Alex rör sig i spannet från ett formellt resonemang mot ett mer intuitivt med stöd i den geometriska representationen. Alex växlar perspektiv till en mer intuitiv uppfattning som öppnar upp för ett geometriskt, eller visuellt, resonemang. I resultatavsnittet ser vi också hur Diana övergår från att tala om $f^{(n)}$ till att bara tala om ”funktionen”. Genom att byta benämning till ett mer allmänt begrepp skaffar sig Diana tillgång till fler intuitiva idéer.

Växlingar för att reducera komplexitet
Exemplet ovan är också ett exempel på hur studenterna ekonomiserar sina resonemang. Dessa växlingar består i att först utelämna för tillfället överflödiga detaljer för att senare ta tillbaka dessa preciseringar när de verkligen behövs. Det finns i materialet flera exempel där studenterna blir mindre stringenta i sina resonemang. När de arbetar med uppgiften kan vi se att de vid ett flertal tillfällen utelämnar preciseringar som till exempel att funktionen har *högst n* nollställen. Studenternas sätt att

uttrycka sig kan vid första anblicken synas slarvigt och ofullständigt men vi kan senare i studenternas samtal se att dessa preciseringar återkommer när de verkligen behövs. Diana utnyttjar också tekniken att döpa om objekt. Det är ett effektivt sätt att reducera komplexiteten i ett problem och är ett vanligt arbetssätt för matematiker.

Växlingar för att driva problemlösningsprocessen vidare

Analysen av studenternas arbete med uppgiften visar att studenterna har intuitiva idéer om de begrepp som uppgiften behandlar, idéer som de också använder i den kreativa delen av problemlösningen. Studenterna säger sig bli mycket övertygade om att deras hypoteser är korrekta när de tar stöd i dessa intuitiva idéer. Trots att studenterna säger sig vara övertygade av de intuitiva idéerna ställer de ändå stora krav på formalisering av sina idéer. Studenternas arbete handlar till stor del om hur de ska ta sig från sina intuitiva idéer till ett formellt bevis. De arbetar för att kunna presentera ett bevis formaliserat på det sätt som de anser vara korrekt men blir inte riktigt nöjda eftersom de inte tycker att deras bevis passar in i den mall de tidigare mött. Det är studenternas egna krav på formalisering som vid flera tillfällen driver dem vidare trots att de uttalar att problemet är löst. Vid något tillfälle räddar det dem från att presentera ett felaktigt bevis för sin hypotes. Vid flera tillfällen gör studenternas formaliseringskrav att de tränger djupare in i uppgiften och letar efter nya vägar i bevisprocessen och därmed hittar nya idéer. Studenternas starka krav på formalisering, och det att de vid flera tillfällen inte lyckas formalisera sina idéer på det sätt de själva önskar, leder också till att de vid flera tillfällen vidgar sitt sökande och vill stämma av sina intuitiva idéer. Mycket tydligt övergår studenterna då i en inventeringsfas och försöker befästa sina intuitiva idéer med hjälp av formella definitioner och satser. Studenterna söker också nya infallsvinklar för sitt intuitiva tänkande genom att gå tillbaka till formella definitioner och satser. De inventerar sitt förråd av relaterade begrepp och tolkningar. Växlingar mellan intuitiva idéer och formella resonemang driver på detta sätt problemlösningsprocessen framåt.

Växelverkan trots ensidiga uppgifter

Det är viktigt att studenter lär sig utnyttja men också att kontrollera sin intuition. Intuitiva idéer är nödvändiga för den kreativa processen men det är de formella bevisen som studenterna måste luta sig mot eftersom intuitionen kan vara missledande. Precis som Fischbein (1987, s. 209) påpekar måste studenter lära sig hantera samspelet mellan intuitiva idéer och formellt bevisade förhållanden. Vi har i denna studie sett många exempel på att studenterna klarar att hantera detta samspel och detta trots att de i undervisningen mött läroböcker av den typ Lithner (2004) och Raman (2002) har studerat, det vill säga böcker som i mycket liten utsträckning ger studenterna tillfälle att skapa kopplingar mellan intuitiva uppfattningar och formella definitioner och satser. Studenterna har ändå skolats in i hur en matematisk argumentation förs där dessa kopplingar är viktiga för det matematiska arbetet.

Ett dynamiskt samspel

I studien har vi detaljstuderat en grupp studenters arbete. Studenterna använder i problemlösningsprocessen möjligheten att skifta mellan olika perspektiv. Vi har sett hur studenterna utnyttjar en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang. Studenternas arbete med uppgiften visar att de på ett mångdimensionellt sätt förmår nyttja sina begreppsuppfattningar. Det finns en stor dynamik i det matematiska arbetet som också känns igen från hur en professionell matematiker bedriver ett kreativt arbete (se t.ex. Burton, 1999a, 1999b). Redan under sitt första studieår förmår studenterna utnyttja detta dynamiska samspel. I en undervisningssituation borde en fokusering på denna potential kunna ge lärare goda möjligheter att möta studenter i utvecklande samtal.

Referenser

Bergqvist, E. (2006). *Mathematics and mathematics education: two sides of the same coin* (PhD thesis). Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå University.

Bergsten, C. (in press). *Exploiting the gap between intuitive and formal knowledge in mathematics*. Regular lecture at ICME 10, Copenhagen 2004 (to appear in the proceedings).

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact* (PhD thesis). Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå University.

Burton, L. (1999a). The practices of mathematicians: what do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 37, 121–143.

Burton, L. (1999b). Why is intuition so important for mathematicians but missing from mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, 19 (3), 27–32.

Duit, R. (2006). *Biography – STCSE. Students' and teachers' conceptions and science education*. Leibniz Institute for Science Education, University of Kiel.

Farmaki, V. & Paschos, T. (2007). The interaction between intuitive and formal mathematical thinking: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38 (3), 353–365.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231–245). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematics reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 11–50.

Halldén, O. (1999). Conceptual change and contextualization. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 53–65). Amsterdam: Pergamon Elsevier.

Halldén, O. (2001). Social konstruktionism, konstruktivism och intentionell analys som heuristiskt verktyg i kvalitativ analys. I O. Halldén, M. Scheja & H. Jakobsson Öhrn, *Intentionell analys* (Forskningsrapporter från Pedagogiska institutionen, nr 65). Stockholms universitet.

Halldén, O., Haglund, L. & Strömdahl, H. (2007). Conceptions and contexts: on the interpretation of interview and observational data. *Educational Psychologist*, 42 (1), 25–40.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54–61). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 405–427.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259–288.

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249–266.

Nilsson, P. (2006). *Exploring probabilistic reasoning – a study of how students contextualise compound chance encounters in explorative settings* (PhD thesis). Växjö University.

Pettersson, K. (2004). *Samspel mellan intuitiva idéer och formella bevis: en fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift* (Licentiatuppsats). Matematiska vetenskaper, Göteborgs universitet.

Pinto, M. & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 3, pp. 281–288). Haifa: Technion, Israel Institute of Technology

Pinto, M. & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. *For the Learning of Mathematics*, 22 (1), 2–10.

Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 135–150.

Ryve, A. (2006). *Approaching mathematical discourse: two analytical frameworks and their relation to problem solving interactions* (PhD thesis). Department of Mathematics and Physics, Mälardalen University.

Scheja, M. (2002). *Contextualising studies in higher education* (PhD thesis). Department of Education, Stockholm University.

Sirotic, N. & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49–76.

Wistedt, I. & Brattström, G. (2005). Understanding mathematical induction in a co-operative setting: merits and limitations of classroom communication among peers. In A. Chronaki & I. M. Christiansen (Eds.), *Challenging perspectives on mathematics classroom communication* (pp. 173–203). Greenwich, CT: Information Age Publish.

Vretblad, A. (1995). *Algebra och kombinatorik*. Malmö: Gleerups.

Von Wright, G. H. (1971). *Explanation and understanding*. Ithaca, NY: Cornell University Press.

Noter

1 Studenterna utnyttjar i sitt bevis att $f^{(p)}$ är derivatan av $f^{(p-1)}$. Det gäller dessutom att $f^{(p)}$ är $(p-1)$:te derivatan av f'. Som en anmärkning kan nämnas att detta samband kan användas för ett alternativt bevis. För att härleda P_p från P_{p-1} antar vi då att $f^{(p)} \neq 0$. Då gäller att $(p-1)$:te derivatan av f' saknar nollställen. Från P_{p-1} kan vi då dra slutsatsen att f' har högst $p-1$ nollställen. Lemmat ger då att f har högst p nollställen.

Kerstin Pettersson

Kerstin Pettersson är fil. dr. i matematik med inriktning mot ämnesdidaktik och arbetar som universitesadjunkt vid Högskolan i Skövde. Hon disputerade i februari 2008 vid Göteborgs universitet. Hennes huvudsakliga forskningsintresse är universitetsstudenters lärande med fokus på hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar främst inom området matematisk analys.

Kerstin Pettersson
Högskolan i Skövde
Institutionen för vård och natur
Matematik
Box 408
SE-541 28 Skövde
Sweden
kerstin.pettersson@his.se

Summary

The aim of this study is to describe the interaction between intuitive ideas and formal reasoning in a creative problem-solving process. A group of four university students worked on a task in calculus. The task included the concepts of function and derivative and required the use of proof by induction. The discussion between the members of the group was analysed in accordance with the principles of intentional analysis, a method by which we regard the students' activities as intentional. The results show that the students both had and used intuitive ideas relevant to the concepts brought to the fore by the task. During the group discussion all components of a complete proof was included in the students' reasoning. The students created a proof by induction which matched the ordinary pattern for such a proof, but they did not themselves regard it as a proof fitting into the ordinary scheme of argumentation as they remembered it from text-books and teaching. The students put heavy demands upon the formalization of their ideas and these demands were sometimes hampering the problem-solving process, but they also encouraged the students to expand their search for a solution to the problem at hand. The students used intuitive ideas and formal reasoning in a dynamic interplay. The interplay had several functions: to control intuitive conceptions, to offer a new basis of the reasoning, to reduce the complexity of the problem and to urge forward the problem solving process.