Gymnasieelever undersöker ett matematiskt begrepp med grafräknare

Tomas Bergqvist

Artikeln beskriver ett försök där gymnasieelever får undersöka faktorisering av andragradspolynom med hjälp av grafiska representationer av funktioner. Eleverna leds in i ett för dem nytt arbetssätt, där de tillsammans med en lärare får arbeta med ett antal uppgifter med hjälp av en grafräknare. Resultaten visar att eleverna kommer med egna hypoteser och använder grafräknaren på eget initiativ i vissa situationer. Resultaten visar också att eleverna i försöket i viss mån kunde använda grafräknaren i ett undersökande arbetssätt.

1. Inledning

Är grafritande miniräknare en del av matematikundervisningen i gymnasieskolan för sin egen skull eller finns det områden i matematiken som grafräknaren kan ge eleverna ökad möjlighet att arbeta med? Finns det arbetsmetoder som grafräknaren möjliggör? Förändrar grafräknaren elevens inlärningsmiljö? Kan det vara så att grafräknaren finns i skolan för att det ligger i tiden att utnyttja tekniska hjälpmedel? Har de ''teknikfrälsta'' tagit kommandot utan att bli ifrågasatta?

I Sverige har de flesta eleverna inom de matematikintensiva programmen tillgång till en grafritande miniräknare; en grafräknare. Detta kraftfulla verktyg har införts som hjälpmedel i matematikundervisningen eftersom många matematiklärare och matematikdidaktiker tror att det kan underlätta elevers matematikinlärning i stor utsträckning. Den tekniska utvecklingen och ekonomiska intressen har också bidragit till att grafräknarna nu är en självklar del av gymnasieskolans matematikundervisning.

Tomas Bergqvist *är doktorand i matematik med inriktning mot matematikdidaktik vid Umeå Universitet, Sverige.*

Det är mycket svårt att avgöra om elever presterar bättre om de får använda en grafräknare än om de arbetar utan detta hjälpmedel. Svårigheterna grundar sig framför allt på att det finns så många andra faktorer som också påverkas om grafräknare införs i undervisningen. Denna studie kommer därför inte att jämföra elever som arbetar med respektive utan grafräknare utan istället beskriva vad som händer när grafräknaren används i gymnasiematematiken.

För att det matematiska innehållet ska vara relativt nytt för eleverna och lämpa sig för en liten undersökning, har en liten del av gymnasiematematiken, nämligen faktorsatsen, valts ut. Anledningen till detta är att faktorsatsen kan beskrivas i flera olika representationsformer där grafiska och algebraiska representationer är de viktigaste men där även numeriska representationer kan användas. En intressant fråga är också om elever måste ha ett fungerande funktionsbegrepp för att kunna tillgodogöra sig faktorsatsen. I en lärobok för gymnasiet (Björk, Brolin, 1996) formuleras Faktorsatsen så här:

Ett polynom $f(x)$ har faktorn x-a om och endast om $f(a)=0$.

De flesta elever brukar inse att vänstra ledet medför det högra ledet, men ha betydligt svårare med omvändningen. Detta projekt går ut på att ta fram en undervisningssituation där elever får arbeta med den svårare delen av faktorsatsen. Undervisningsmodellen bygger på att studenterna använder ett undersökande arbetssätt med visualiseringar av funktioner med hjälp av grafräknare. Ett mål är att eleverna ska kunna formulera faktorsatsen för andragradspolynom. Det kan tänkas att vissa elever också kan generalisera resonemanget till den allmänna faktorsatsen. Eleverna skall alltså genom att arbeta självständigt under viss handledning komma fram till någonting som liknar detta:

Ett andragradspolynom kan skrivas som produkten av två förstagradspolynom om andragradspolynomet har två nollställen.
Om andragradspolynomet $p(x)$ har två nollställen, a och b,
så kan $p(x)$ skrivas så här: $p(x)=(x-a)(x-b)$.

Detta är ingen fullständig beskrivning av faktorsatsen eller ens av vad faktorsatsen innebär för andragradspolynom, men om eleverna har kommit fram till detta till stor del på egen hand kommer den delaktigheten i arbetet att ge en större förståelse än om faktorsatsen presenteras på det sätt som beskrivs i gymnasiet läroböcker i matematik.

Ett mål är också att eleverna ska utveckla en viss förtrogenhet med ett undersökande arbetssätt. Se kapitel 2.2 för en noggrannare diskussion om begreppet undersökande arbetssätt.

2. Teori

Det är svårt att få fram tydliga resultat om grafräknarens effekter. Viss forskning har visat positiva resultat, men det finns också forskning som visar på motsatsen. Penelope Dunham och Thomas Dick pekar i sin artikel (1994) på tre undersökningar som påvisade skillnader till förmån för elever som använde grafräknare, tre som inte kunde hitta några skillnader alls och en som påvisade skillnader till förmån för de elever som inte använde grafräknare. I artikeln ''The Graphics Calculator in Mathematics Education: a Critical Review of recent Research'' (1996) menar Marina Penglase och Stephen Arnold att man i många försök inte kan skilja effekterna från grafräknarna från de som beror på undervisningen, miljön, kursens uppläggning, lärarens inverkan och liknande. De skriver också:

> *One might expect that, after so much enthusiastic rhetoric and so many studies specifically intended to explore the effectiveness and limitations of the graphics calculators as a tool for teaching and learning of mathematics, we might enter the second decade of their use well-prepared.*
>
> ...
>
> *Sadly, the answers offered by research to these questions at the end of this first decade remain elusive and conflicting. (p.59)*

Flera forskare anser också att det handlar mer om att avgöra hur man ska utnyttja den nya tekniken än att avgöra om den i sig själv förbättrar eller försämrar elevens möjligheter att lära sig matematik. Ett exempel är Lucia Grugnetti och François Jaquet (1996, p 629) som skriver

> *''It is no longer a question of accepting or rejecting the new technology, but rather of determining its place in the teaching of mathematics''.*

Kaput och Thompson (1994) varnar för de okritiska positiva åsikterna om teknikens förträfflighet och för att detta kan leda till att teknik används i matematiken för dess egen skull. Galbraith och Haines (1998) inleder sin artikel med att fastslå att det finns gott om entusiastiska påståenden om teknikens möjligheter och dess positiva påverkan på matematikundervisningen men att det är betydligt svårare att hitta systematiska analyser av teknikens användningsmöjligheter.

Denna artikel syftar till just detta; att belysa teknikens möjligheter och svårigheter, att ge exempel på en annorlunda undervisningssituation och att ta fram en systematisk analys av elevernas och lärarens arbete.

2.1 Frågeställningar

Den övergripande didaktiska frågeställningen i detta projekt är

Kan elever lära sig någonting *svårt* som normalt behandlas rent algebraiskt genom att arbeta

- visuellt, dvs. använda grafiska representationer av funktioner
- med en grafräknare, dvs. utnyttja modern teknik
- med ett undersökande arbetssätt, dvs. tillsammans med läraren leta sig fram till den kunskap och förståelse som krävs?

Projekts inriktning ger också upphov till ett antal mer specialiserade frågor. Dessa behandlar bland annat elevers inlärning, elevers arbete med grafräknaren och det arbetssätt som eleverna tillsammans med läraren använder:

- I vilka situationer använder eleverna grafräknaren, och på vad grundar de beslutet att använda den?
- Hur använder eleverna grafräknaren? Till vilka arbetsuppgifter?
- Kan det arbetssätt som beskrivits ovan ge eleverna en bild av vad faktorsatsen innebär och på så sätt underlätta förståelsen av den algebraiska formuleringen?
- Vilka svårigheter stöter eleverna på när de arbetar på detta sätt vad gäller arbetssätt respektive matematiskt innehåll?
- Vilka nya svårigheter ställs läraren/handledaren inför, svårigheter som inte finns i traditionell undervisning?
- Förekommer deduktiva resonemang i elevernas arbete?
- I vilken utsträckning kan eleverna utföra det undersökande arbetssättet?

Givetvis kommer inte alla dessa frågor att besvaras i denna artikel, men förhoppningsvis kommer flera av frågorna att belysas i någon utsträckning. Beskrivningen av hur eleverna använder grafräknaren och vad som ligger bakom deras sätt att använda den är en central del i analysen av försöket. Att försöka förstå om och i så fall hur grafräknaren hjälper eleverna i arbetet är också mycket viktigt.

Lärarens/handledarens svårigheter och vad som måste beaktas i försökssituationen beskrivs noggrannare i kapitel 3.3.

2.2 Undersökande arbetssätt

För att på ett tydligt sätt kunna redogöra för elevernas arbete behövs ett sätt att strukturera beskrivningen av det. Arbetet kallas i detta försök för ett *undersökande arbetssätt*. Den struktur som i denna artikel används för att beskriva ett undersökande arbetssätt kan relateras till den systematiska beskrivning av beteende vid problemlösning som Alan Schoenfeld ger i sin bok ''Mathematical Problem Solving'' (1985). Han delar in processen i sex steg eller episoder, kort sammanfattat ser beskrivningen ur så här:

Reading: Innefattar att läsa uppgiften högt, begrunda tyst, upprepa vissa delar, läsa tyst med mera.
Analysis: Består av analys av problemet, att försöka förstå problemet fullständigt, att formulera om problemet och att introducera principer och metoder som kan passa.
Exploration: Ett relativt ostrukturerat utforskande av området omkring problemet, ofta en bit ifrån själva frågeställningen.
Planning: Planering av lösningsarbetet. Kan ofta vara svårt att skilja från själva lösningsarbetet.
Implementation: Utförandet av lösningen.
Verification: Verifikation och kontroll av lösningen, kan också innehålla en diskussion om lösningen är realistisk.

Problemlösning skiljer sig på flera sätt från ett undersökande arbetssätt, men man kan ändå se flera paralleller. Den typ av undersökande arbetssätt som behandlas i denna artikel kan delas upp i tre huvuddelar:

- **Visualisering:** Att låta de ingående objekten beskrivas i konkret form när man vill observera olika möjliga samband. En funktion kan beskrivas med ett algebraiskt uttryck, en tabell eller en graf. Visualiseringen är här det tredje alternativet, en graf. I detta försök sker visualiseringarna oftast med hjälp av grafräknaren, genom att eleven ritar en eller flera funktioner. Analys- och utforskande-episoderna i Schoenfeldts beskrivning sker här via visualisering. Visualiseringar används för att ge en representation av objektet, en överblick som stöd för tänkandet.

- **Hypotes:** Ett antagande som är ett förslag till en slutsats eller del av en slutsats. Det kan bygga på någon eller några av de observationer som har gjorts, eventuellt kopplad till tidigare kunskap om närliggande områden eller till sporadiska minnesbilder från tidigare situationer. Hypotesen kan vara ett resultat av utforskandeepisoden och en del av planeringsepisoden. Begreppet är en idé om sammanhang grundat i visualiseringar och diskussioner, ett antagande som bygger på ganska informella principer.

- **Kontroll:** En undersökning av hypotesen. Kontrollen kan ske på mer eller mindre välgrundade sätt, t.ex. att prova ett exempel, att undersöka om den stämmer för andra objekt, om man kan hitta motexempel eller om hypotesen kan bevisas deduktivt. En viktig del är också bedömningen av hypotesens rimlighet. Kontroll sammanfaller med verifikationsepisoden.

Slutsatsen av jämförelsen med Schoenfelds episoder är att beskrivningen av ett undersökande arbetssätt kan passas in i dessa eftersom elevernas arbete är en form av problemlösning. I detta försök fokuseras analysen på vissa aspekter, vissa begrepp som är karakteristiska för det undersökande arbetssättet och därför används den struktur som består av de tre delarna visualisering, hypotes och kontroll.

Hypotesen är enligt denna definition den enskilt viktigaste beståndsdelen i det undersökande arbetssättet, eftersom detta fordrar att man har börjat strukturera sina tankar omkring begreppet. Detta gäller även om hypotesen visar sig vara felaktig. *Kontrollen* innebär att försöka avgöra om hypotesen är riktig. Ett sätt är att undersöka det induktivt, dvs. genom att testa ett antal exempel. Ett annat sätt är att försöka genomföra ett deduktivt resonemang, dvs. att försöka avgöra om hypotesen är riktig genom att diskutera de ingående objektens matematiska egenskaper. Även om det som avses här inte nödvändigtvis är ett bevis i strikt matematisk mening så är det möjligt att ett deduktivt resonemang är mycket svårt att genomföra för eleverna.

En svårighet i detta försök är att avgöra om eleverna har fått en ökad förståelse för begreppet. Därför kommer detta försök att fokusera på om och hur eleverna klarar av det undersökande arbetssättet och då kan en möjlighet vara att se i vilken utsträckning eleverna kan formulera relevanta hypoteser, eftersom detta kräver en viss förståelse. Förmågan att komma med hypoteser skulle också kunna vara kopplad till den matematiska mognad som en elev besitter.
Det finns många olika verksamheter som skulle kunna passa in ovanstående beskrivning. Här följer ett exempel som enligt denna artikels definition är ett undersökande arbetssätt:

För att kunna ange vad som kännetecknar en familj av funktioner, till exempel polynom av grad 3, så undersöker man denna familj genom att först rita ett antal funktionsgrafer och sedan sätta upp en hypotes om familjens egenskaper utifrån grafernas utseende. Denna hypotes ska sen kontrolleras och förhoppningsvis troliggöras genom att hypotesen appliceras på ett antal andra medlemmar ur funktionsfamiljen. Man kan också via ett deduktivt resonemang försöka verifiera de hypoteser man har satt upp.

3. Metod

Eleverna ska i försöket arbeta två och två. På så sätt blir diskussionen runt matematiken i uppgifterna tydligare eftersom eleverna ska hjälpas åt. Försöksledarens uppgift som lärare är att komma med lämpliga ledtrådar för att arbetet inte skall stanna upp eller gå för långsamt. Fem par av elever ingår i studien, elever som går andra året på det naturvetenskapliga programmet där de läser gymnasiets D-kurs. Eleverna har därmed arbetat med funktioner, polynom, ekvationer och fått en första inblick i begreppet derivata. Eleverna är också vana att använda grafräknare i sitt arbete.

Valet av elever har skett i samråd med lärare på en gymnasieskola. Eleverna har en viss spridning vad gäller studieresultat, av de fem paren bedömer deras lärare att eleverna i tre par troligen kommer att få betyget VG (Väl Godkänt), ett par betyget G (Godkänt) och ett par betyget MVG (Mycket Väl Godkänt). Eleverna valdes ut och parades ihop innan de blev tillfrågade. Dokumentationen av försöket har skett via videoupptagning i en studio. Denna dokumentation-smetod användes också i ett tidigare pilotprojekt (Bergqvist, 1998). Försöket videofilmades alltså med hjälp av en dokumentkamera, en specialkamera med hög upplösning som är placerad rakt ovanför en rektangulär skiva på vilken ett rutat A4-papper är placerat. Eleverna kunde skriva på pappret, lägga upp en grafräknare när de ville använda en sådan och även peka och diskutera runt uppgifterna, grafräknaren eller sina egna anteckningar. Elevernas samtal togs också upp av inspelningen.

3.1 Försöket

Eleven och läraren skall tillsammans utföra det undersökande arbetssättet. Läraren ska leda eleven på rätt spår genom att ta fram lämpliga visualiseringar (om inte eleven själv föreslår sådana), se kapitel 3.2 som beskriver de uppgifter som eleverna skall arbeta med. Eleven ska förhoppningsvis vara den som ställer hypoteserna och utför kontrollen. Detta kan vara svårt i vissa situationer och för att kunna kontrollera hur mycket läraren leder eleverna finns i kapitel 3.3 en i förväg definierad beskrivning av hur läraren skall handleda eleverna.

Eleverna har inte full frihet att själva utföra det undersökande arbetssättet. De får till exempel inte själva välja vilka andragradspolynom de skall arbeta med. Detta är nödvändigt av följande orsaker:

- delar av det matematiska innehållet riskerar att gå förlorat, till exempel kan fallet med dubbelrot bli helt förbigånget.
- om eleverna själva skall ange andragradspolynomen är det sannolikt så att de väljer andragradspolynom med förhållandevis komplicerade nollställen i stället för heltalsnollställen.
- en stegvis ökad svårighetsgrad underlättar betydligt för eleverna eftersom de då inte behöver formulera hypoteser som innehåller flera komponenter, utan kan utöka hypoteserna lite i taget.

En aspekt där försöket tydligt skiljer sig från en verklig undervisningssituation är tiden. I en klassrumssituation har man som regel en tidsram som man måste hålla sig inom. Så var inte fallet här, utan försöket fick ta den tid det behövde. De tillfällen då eleverna arbetade mycket länge med något som inte kunde leda till någon intressant hypotes avbröts genom att läraren gick in och styrde eleverna ut ur svårigheterna med hjälp av lämpliga frågor eller annan typ av handledning. I direkt anslutning till försöket intervjuades eleverna om försöket. Intervjun omfattade frågor som behandlade situationen, arbetssättet och matematiken.

3.2 Uppgiften

Målet med undervisningssituationen är att eleverna ska formulera någon del av faktorsatsen för andragradspolynom. Det kan tänkas att vissa elever också kan genrealisera resonemanget till den allmänna faktorsatsen. I kapitel 1 gavs ett exempel på den typ av formulering eleverna förhoppningsvis ska komma fram till. För att klara detta skall eleverna arbeta med en uppgift som är uppdelad i flera delar där varje deluppgift byggs på med en svårare eller mer generaliserad deluppgift. Eleverna har gymnasiets C- och D-kurs aktuella, vilket borde betyda att de är någorlunda vana vid att arbeta med polynom av grad ett och två och att rita grafer på grafräknaren. Uppgifterna ser ut så här:

1. Om $f(x)$ och $g(x)$ är förstagradspolynom, hur kan då $f(x)$ och $g(x)$ se ut om $f(x) \cdot g(x)=x^2+x-6$?
2. Kan ni lösa uppgiften om $f(x) \cdot g(x)=x^2-3x-4$ i stället?
3. Vad händer om $f(x) \cdot g(x)=x^2-4x+4$?
4. Vad händer om $f(x) \cdot g(x)=x^2-2x+3$?
5. Vad händer om $f(x) \cdot g(x)=x^2-4x+1$?
6. Gå tillbaks till uppgift 1.

   Kan $g(x)$ och $f(x)$ vara något annat än det ni fick fram i ert svar?
7. Skriv en instruktion som förklarar hur man ska göra för att faktorisera ett allmänt andragradspolynom i två förstagradspolynom.

Tanken med att dela upp uppgifterna på detta sätt är att eleverna ska arbeta med uppgifter med stigande svårighetsgrad, för att sen kunna generalisera arbetsuppgifterna steg för steg. Normalt kommer eleverna troligen att lösa uppgift 1 genom att gissa faktoriseringen. Om eleverna efter de första två uppgifterna inte har börjat leta efter alternativa metoder kommer de att få extrauppgifter av samma typ som uppgift 1 och två, men med mer och mer komplicerade nollställen. När de till sist fastnar kommer en diskussion om möjliga arbetssätt att inledas. De blir också uppmanade att rita graferna efter varje uppgift. Uppgift 6 och 7 är svåra eftersom de är generaliseringar som kräver ett abstrakt tänkande.

3.3 Handledning

I handledningssituationen uppstår ett klassiskt problem eftersom försöksledaren är både lärare och forskare. Problematiken behöver inte innebära en alltför stor svårighet eftersom målet med studien är att undersöka och beskriva en undervisningssituation, inte att mäta elevernas prestationer.

Handledningen av eleverna kan ge upphov till svårigheter eftersom försöksledaren (F) måste tänka på ett flertal aspekter under hela försöket:

- Balansen mellan att göra för lite och att göra för mycket är svår. Om F är för aktiv blir det han som utför arbetet och är F för passiv kan eleverna fastna i ett tidigt skede av försöket.

- F ska i stor utsträckning ifrågasätta elevernas påståenden, både när de är felaktiga och när de är korrekta. På så sätt kan diskussionen mellan eleverna bli tydligare och underlätta beskrivningen av situationen.
- F måste använda ett korrekt matematiskt språk i samtalet med eleverna samtidigt som han måste avdramatisera situationen med lämpligt ''småprat''.

Viss del av handledningen kan bestå av ledtrådar som har formulerats i förväg. Några av dessa är allmänna idéer medan andra är kopplade till speciella deluppgifter. Här följer en lista på tänkbar handledning:

- Gissa och prova er fram.
- Rita upp funktionerna.
- Vad skiljer från föregående uppgift?
- Rita $f(x)$, $g(x)$ och andragradspolynomet i samma fönster.
- Det kan vara praktiskt att använda grafräknaren.
- $f(x)=x-2$ (uppgift 1)
- Kan $f(x)=x+5$ användas? (uppg. 2)
- Kan ni säga någonting om funktionernas nollställen?
- Hur menar du då?
- Kan du beskriva tydligare hur du menar?
- Kan du visa?

4. Empirisk undersökning

Elevparen som deltog i försöket var Klara och Karro, Kristina och Eldina, Jenny och Nazanin, Haris och Jens samt Fredrik och Johan. Här följer en noggrannare beskrivning av det arbete som två av elevparen utförde. Alla elevparens arbeten finns beskrivna i en utförligare artikel (Bergqvist, 1999).

4.1 Kristina och Eldina

Kristina och Eldina är två elever med mycket goda studieresultat, betyg MVG. De har inga som helst svårigheter att lista ut hur faktoriseringarna av andragradspolynomen ska se ut. De reagerar inte nämnvärt när försöksledaren (F) ber dem rita graferna till funktionerna. F fortsätter då och ger dem andragradspolynom ur extrauppgifterna. De har inga problem med dessa förrän F ger dem en extrauppgift: $f(x) \cdot g(x)=x^2-1/3\ x - 2/3$. De inser att produkten av konstanterna i $f(x)$ och $g(x)$ ska vara -2/3 och provar med -2 och 1/3 utan framgång. De testar även att förlänga hela uttrycket och sedan bryta ut en faktor utan att komma närmare en korrekt faktorisering. När eleverna har varit tysta en längre stund (ca 30 sekunder) kommer följande samtal:

Eldina ritar funktionen på grafräknaren.

Kristina: Men vänta, där den skär x-axeln, där y är noll.
Eldina: Ja, annars kan vi lösa ut ... andragradsekvationen.
Kristina: Ja, då får vi ju samma. Vi får ju svaren direkt om vi gör med räknaren.
F: Hur menar du då?
Kristina: Om vi kollar var den skär x-axeln så får vi fram dom möjliga x-en vi kan ha.
F: Varför då?
Kristina: Det känns rätt.

Nu löser Eldina andragradsekvationen och får fram rötterna 1 och -4/6. Efter en kort tvekan sätter de in rötterna i (x-1)(x+4/6) och kontrollerar genom att utföra multiplikationen. Efter detta börjar F fråga ut eleverna om varför denna metod fungerar. De har mycket svårt att svara på det. De verkar ha svårt att överhuvudtaget förstå vad som frågas efter, de har ju visat att metoden fungerar. Till slut kommer följande samtal:

F: Varför är det just rötterna till andragradsekvationen man ska sätta in?
Eldina: För då får man fram funktionerna.
Kristina: Men om vi kollar på räknaren, hur går dom här linjerna?
Kristina ritar funktionerna på grafräknaren.
Kristina: Då går dom ju... precis där den skär x-axeln skär ju också linjerna. När det här uttrycket [andragradspolynomet] blir noll... När y blir noll här... Ja, jag vet inte...
Mer diskussion
Kristina: När den [andragradskurvan] skär x-axeln har vi sagt att den ena delen av den här[faktoriseringen] har blivit noll. Antingen $f(x)$ eller $g(x)$ har blivit noll.

Nu har eleverna kommit fram till en relativt korrekt förklaring till varför metoden fungerar. För att se om eleverna har kontroll över hur förstagradspolynomen ska tecknas ger F dem en uppgift till, $f(x) \cdot g(x) = x^2+5x+6$. Med hjälp av räknaren hittar de nollställena -2 och -3 och skriver direkt ner den felaktiga faktoriseringen (x-2)(x-3). Då säger Eldina:

> *Just det. Och liksom, på kurvan, om det är +3 så måste det vara x-3 för att x ska vara 3 så att det ska bli 0. Om vi får på kurvan att x ska vara 3, då måste det bli -3 här för att x ska vara 3 och det här ska bli 0.*

Kristina accepterar förklaringen. Hon ändrar till (x+2)(x+3) och de två kan nu gå vidare till uppgift 3, 4 och 5. Uppgift 3 löser de utan större problem. I uppgift 4 påstår de nästan genast att uppgiften inte går att lösa eftersom ekvationen saknar lösning. När F utmanar dem genom att fråga om det inte kan finnas två förstagradspolynom ändå blir de dock osäkra. De provar då med sin ursprungliga metod, att gissa faktoriseringen, utan framgång. De kommer i förklaringen fram till att förstagradspolynomen aldrig blir noll, vilket är ganska nära en korrekt förklaring eftersom ett förstagradspolynom utan nollställe inte existerar. I uppgift 5 inser de snabbt att räknaren inte ger exakta värden på nollställena och att de måste lösa andragradsfunktionen. De gör detta och faktoriserar polynomet korrekt. Uppgift 6 sätter igång en ganska livlig verksamhet där eleverna försöker hitta alternativa lösningar till uppgiften. När de misslyckas kan de inte förklara varför, men de kommer gång på gång tillbaka till att *"det finns bara två nollställen till andragradsfunktionen och därmed bara två möjliga x-värden"*. Sista uppgiften går ganska bra förutom att de återigen får problem med hur de ska behandla tecknen. Arbetet resulterar i följande instruktion:

> Hur kan vi skriva andragradspolynomet $p(x)$ i två förstagradspolynom $g(x)$ och $f(x)$?
>
> På miniräknaren:
> 1. Rita kurvan
> 2. Ta reda på nollställena (dvs. $y=0$)
> 3. Om nollställena är $x_1=a$ och $x_2=b$ då är $f(x)=x-a$ och $g(x)=x-b$
>   Om inte kurvan skär x-axeln så finns det inga nollställen och alltså inga lösningar.

4.2 Haris och Jens

Haris och Jens har båda två goda studieresultat i matematik, betyg omkring VG. Den första uppgiften (efter uppmjukningsuppgiften) löser Haris direkt. När F ber dem rita upp graferna på räknaren ritar Jens $Y_1=x+3$, $Y_2=x-2$ och $Y_3=Y_1 \cdot Y_2$. De kör sen fast lite på uppgift 2 eftersom de inte ser att -4 kan faktoriseras i $(-4)\cdot 1$. De forsätter på samma sätt och löser snabbt tre extrauppgifter utan problem. De rita också graferna utan kommentarer. Den fjärde extrauppgiften tar lite längre tid eftersom det inte är så lätt att se faktoriseringarna när polynomet har rationella koefficienter. När eleverna får sin femte extrauppgift tar det stopp. Följande samtal äger rum:

F: Skulle man kunna använda räknaren? Ha nytta av den på nåt sätt?
Jens: Inte vad jag vet... Men vänta... Jag ska se...
Ritar andragradspolynomet på räknaren
Jens: Sen kollar man på vilka ställen där den skär x-axeln...

De avläser skärningspunkterna på räknaren, 3 och 1,5, och skriver upp en faktorisering: $(x+1/2)(x-3)$. Denna faktorisering innehåller dels fel tecken och dels 1/2 i stället för 3/2. Haris upptäcker att Jens har skrivit fel tal och de inser tillsamman att de måste byta tecken i båda parenteserna. När F ber om en förklaring på vad de har gjort säger de:

Jens: Hur vi använde miniräknaren? Kollade var den skar x-punkterna för då får vi reda på vilka två ...
F: Varför får man det?
Haris: Jaa... Varför får man det...
Jens: Jamen ... Då får man ju reda på vilka x-värden som gäller för y.
F: För vaddå? För y?
Jens: För den här ekvationen, *[$x^2+3/2\ x$ - $9/2$]* vilka x-värden då y är 0.
F: Jaa... Varför ska dom x-värdena stå här? *[Pekar på parenteserna]*
Haris: Men...
Jens: Därför att ...
Haris: Man tar den typ så här *[Skriver $y=0$ under $(x+3)$]* och sen om man ska skriva $0=x+$ den som du vet inte, och sen x=siffran du har här.
F: Varför ska den vara 0 då?
Jens: Man sätter den här *[$(x-3/2)$]* som 0 sen också. Då får du ju två ställen det här är ju liksom en faktor, det är ju som $x \bullet x$, om du sätter den här *[pekar på vänstra x-et]* till noll så får du ut den andra, värdet här *[pekar på högra parentesen i faktoriseringen]*, och sen sätter man den andra till 0. Det händer ju på två ställen, när den skär... y-axeln ...

Diskussionen fortsätter med att F ifrågasätter om linjerna alltid kommer att skära parabeln på x-axeln. De är mycket osäkra och F ber dem undersöka om det var så i uppgift 1. De finner att så var fallet och är direkt övertygade om att det alltid är så. F ber återigen om en förklaring utan att de kan svara. Haris säger *"Det är svårt att förklara matte"*.

Nu är det dags att eleverna ska få faktorisera med hjälp av den metod som de har kommit fram till. I nästa uppgift hittar de två nollställen, -3 och 2. De skriver ner en faktorisering, $(x-3)(x+2)$ men upptäcker att den är felaktig när de utför multiplikationen. De byter tecken och får en riktig faktorisering. F frågar ännu en gång om varför man ska byta tecken och nu säger Haris:

> *Detta är kanske dumt men ... om vi har* f(x)=x-2 *och skriver istället* f(x)=0, *det ska bli* 0=x-2 *och sen om vi flyttar* x *till vänstra sidan får vi* -x=-2. *För att vi ska få bara* x *vi måste typ gångra med -1 så att vi får* x=2 *och den är positiv.*

Eleverna får nu fortsätta med uppgift 3,4 och 5. Uppgift 3 går ganska bra, de kommer fram till att det bara finns ett nollställe och efter ett tag kommer förslaget att förstagradspolynomen ska vara lika. Andragradspolynomet som saknar reella rötter (uppgift 4) ställer till mer problem. De är genast övertygade om att det inte går att faktorisera men kan inte förklara varför. När eleverna arbetar med uppgift 5 ser de snart att räknaren bara ger närmevärden. De löser då andragradsekvationen och sätter in rötterna i förstagradspolynomen. Efter lite diskussion blir också tecknen de rätta. När F frågar om faktoriseringen stämmer ritar de tre funktioner på räknaren och anser att det stämmer. Nu får eleverna uppgift 6. De kommer först med förslaget att lösa andragradsekvationen. De löser den, får lösningarna 2 och -3. Då säger Jens *"Nej, det gick inte"*. När F tar upp tråden om andragradspolynomets nollställen ska återfinnas i förstagradspolynomen föreslår Jens *"-x, men det är ju lite dumt. Dom går ju uppifrån och ner'*. De kommer inte så mycket längre men F visar på möjligheten att faktorisera polynomet i $(-x+2)(-x-3)$. I sista uppgiften ska eleverna skriva en instruktion. De behöver lite hjälp för att komma igång, de har svårt att lägga instruktionen på en lämplig nivå. På försöksledarens uppmaning lägger de till ett exempel och tar upp fallet när inga nollställen finns. Så här ser deras instruktion ut:

- Använd miniräknaren, vid problem: utnyttja andragradsekvations-formeln. (för att få ut eventuella nollställen)
- Byt tecken på värdena för nollställena
- Sätt in värdena i 2 st. förstagradspolynom

ex. $x_1=2$ (-2)
$(x-2)(x+3)$
$x_2=-3$ (3)

4.3 Intervjuerna

Intervjuerna som följde i direkt anslutning till varje försökstillfälle gav inte den typ av information som förväntats. Idén var att eleverna skulle kunna diskutera de matematiska begrepp som de hade arbetat med under försöket. Det visade sig att eleverna hade mycket svårt att säga någonting om detta. Det kan vara så att steget från att arbeta med ett begrepp till att diskutera sin egen förståelse av begreppet är mycket stort. Den information som ändå framkom under intervjuerna handlar i huvudsak om elevernas uppfattningar om matematik, grafräknaren och skolan.

5. Analys och resultat

Grunden för analysen består i de frågeställningar som formulerades i kapitel 2.1:

Kan elever lära sig någonting svårt som normalt behandlas rent algebraiskt genom att arbeta

- visuellt, dvs. använda grafiska representationer av funktioner
- med en grafräknare, dvs. utnyttja modern teknik
- med ett undersökande arbetssätt, dvs. tillsammans med läraren leta sig fram till den kunskap och förståelse som krävs?

5.1 Kan eleverna arbeta visuellt, kan de arbeta med grafräknare

Det vill säga kan eleverna använda grafiska representationer av funktioner? Hur använder de grafräknaren i dessa situationer? Varför väljer de att använda grafräknaren?

De olika sätt som grafräknaren används på kan delas in i några olika varianter:

- *Rita en eller flera grafer*

  Att rita grafer medför inte några som helst problem för någon elev. De visar alla god förtrogenhet med detta.

- *Undersöka nollställen*

  Alla eleverna börjar med att använda ''zoom''-funktionen. På så sätt kan de alla gissa vilken rot de undersöker så länge som de arbetar med andragradspolynom med heltalsnollställen. När detta inte fungerar visar försöksledaren eleverna ''zero''-funktionen som tar fram ett mycket noggrant närmevärde till ett nollställe. Flera elever kan direkt använda funktionen, andra elever behöver en kort förklaring. Alla elever använder funktionen utan problem vid slutet av försöket.

  Några elever insåg att produkten av nollställena ska vara lika med konstanttermen i andragradspolynomet och att det därför räcker att ta fram ena nollstället med räknaren.

- *Numeriska beräkningar*

  De numeriska beräkningar som förekommer är av tre typer:

  - Undersöka om ett decimaltal (från ''zero''-funktionen) är ett bråk.
  - Undersöka om $(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=1$ för att kontrollera faktoriseringen i uppgift 5.
  - Annat, till exempel för att beräkna $(-2)^2$.

Motiv till att eleverna använder räknaren varierar. För alla grupper gäller att de första gången använder räknaren på försöksledarens inrådan, F ber dem rita upp alla de tre aktuella funktionerna i uppgift 1. När det gäller att undersöka nollställen varierar dock orsakerna:

- Klara och Karro gör detta efter att Karro har fört fram hypotesen att man kan hitta förstagradspolynomen genom att titta på andragradspolynomets nollställen.
- Kristina och Eldina fastnar på en extrauppgift och tar fram räknaren på eget initiativ.
- Jenny och Nazanin använder nollställena för att faktorisera efter det att F har frågat om det är möjligt, men redan i ett tidigare

skede såg Nazanin att de hade skrivit in funktionerna fel genom att titta på funktionernas nollställen.

- Jens och Haris fastnar på samma uppgift som Kristina och Eldina, men de tar till grafräknaren först sedan F har frågat om man kan använda den på något sätt.
- Fredrik och Johan tittar på funktionernas nollställen efter en lång diskussion där F visar eleverna att andragradskurvan och linjerna skär x-axeln i samma punkter.

När det gäller de numeriska beräkningarna sker de flesta på eleverna egna initiativ. När eleverna i uppgift 5 får fram ett decimaltal försöker Klara och Karro omvandla detta till ett bråk med ''Frac''-funktionen. Fredrik och Johan är också inne på att det kan vara ett bråk och gör samma sak sedan F har påpekat att en sådan funktion finns. Jenny och Nazanin tycker att det verkar konstigt att $(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=1$ och kontrollerar detta med grafräknaren.

Att eleverna har nytta av de grafiska representationerna syns tydligt flera gånger under försöket. I samtliga fall utom ett användes miniräknaren för att ta fram de grafiska representationerna. Undantaget var en skiss i samband med uppgift 7 som Jenny och Nazanin ritade. Här följer några exempel på situationer när eleverna utnyttjade visualiseringar:

- Kristina och Eldina (kapitel 4.1) ritar en funktion och utbrister *''Men vänta, där den skär x-axeln...''*

  Genom att titta på grafen kan eleverna formulera sin hypotes om hur förstagradspolynomen ska se ut.
- Jens (kapitel 4.2) ritar andragradspolynomet på räknaren och säger *''Sen kollar man på vilka ställen ... där den skär x-axeln...''* Han faktoriserar polynomet genom att avläsa parabelns nollställen och sätta in dessa i förstagradspolynomen.

Både Kristina och Jens använder andragradspolynomets nollställen för att faktorisera. Resonemanget bakom detta verkar mycket osäkert. Det skulle kunna vara så att de har en svag minnesbild av något som de har sett i läroboken eller som deras lärare har visat på tavlan och när de ser nollställena så kopplas detta mer eller mindre undermedvetet till minnesbilden och de ''känner'' att de är på rätt spår. Detta sätt att arbeta kan vara framgångsrikt i gymnasiematematiken. Är detta något som kännetecknar elever som lyckas bra i skolan?

Å andra sida förekommer det också att eleverna inte använder de grafiska representationerna i situationer då detta hade varit både enkelt och effektivt. Detta gäller oftast då eleverna kommer i en situation de inte riktigt kan hantera, till exempel i uppgift 6, när de söker andra lösningar till uppgift 1. När de arbetar med uppgift 6 har de flesta eleverna någorlunda klart för sig att nollställena måste vara de samma i andragradspolynomet som i faktoriseringen, men de verkar ha mycket svårt att använda den kunskapen. De återgår då till den första metoden, gissa och prova, trots att flera av dem har formulerat och använt en metod för att faktorisera. En kort diskussion utifrån grafen till polynomet i uppgift 1 skulle direkt kunna visa eleverna att enbart två nollställen är möjliga. Några elever för också ett resonemang i denna riktning, men de har mycket svårt att utnyttja sin kunskap.

Det förekommer också att eleverna inte kan dra några egna slutsatser genom att titta på graferna utan att slutsatserna grundas på en diskussion med försöksledaren och på den hjälp de får. Johans hypotes i slutet av följande situation är ett exempel på detta:

> Nu försöker försöksledaren leda in eleverna på att använda räknaren och titta på nollställen. F ber dem beskriva graferna och de säger saker som att *"linjerna är parallella"*, *"dom går diagonalt"* och *"dom korsar vid x-axeln"*. Genom att fråga var andragradskurvan skär x-axeln visar F eleverna att den skär på samma ställen som linjerna. Då säger Johan *"Man skulle kunna använda det till att lösa uppgiften."*

Johans hypotes kommer först efter det att försöksledaren har gjort honom uppmärksam på att andragradskurvans nollställen är desamma som linjernas nollställen. Hypotesen grundas troligen till en mycket liten del på den grafiska representationen och i betydligt större utsträckning på samtalet med F.

Att använda grafräknaren för att ta fram visualiseringar av funktioner verkar vara mycket naturligt för eleverna. Grafräknaren bereder dem inga egentliga problem och hanteras på ett ganska självklart sätt. När det gäller att utnyttja visualiseringarna är skillnaderna mellan eleverna betydligt större. Vissa elever verkar inspireras av graferna så att de utgående från dessa snabbt kan komma med hypoteser medan andra inte verkar ha någon nytta alls av visualiseringarna. Vad denna skillnad kan bero på är svårt att säga. Kanske kan det vara så att grafräknaren inte fungerar så bra för vissa elever, eller att visualiseringar är så komplexa att somliga elever helt enkelt inte kan tillgodogöra sig all den information som finns i en graf.

5.2 Undersökande arbetssätt

I kapitel 2.2 beskrevs ett undersökande arbetssätt som bestående av tre huvuddelar: *visualisering*, *hypotes* och *kontroll*. Begreppet visualisering och hur eleverna arbetade med detta har beskrivits ovan. Detta avsnitt kommer att beskriva elevernas förmåga att formulera egna hypoteser med hjälp av dessa visualiseringar och hur hypoteserna kontrollerades.

Det finns flera tillfällen när eleverna mycket tydligt kunde formulera egna hypoteser och de flesta hypoteser som beskrivs har sin grund i visualiseringarna av de aktuella funktionerna. Kontroll av hypoteserna utfördes nästan uteslutande genom att testa den aktuella uppgiften. Det finns också ett antal exempel när eleverna inte kunde komma med någon som helst idé.

Ett exempel på hur eleverna formulerar hypoteser är när Kristina och Eldina kör fast på en extrauppgift. Efter en stunds tystnad säger de:

Eldina: Om vi ... man kollar på miniräknaren.
Kristina: Ja, gör det. Sätt in den där *[pekar på x^2-1/3 x - 2/3]*
Eldina ritar funktionen på grafräknaren.
Kristina: Men vänta, där den skär x-axeln, där y är noll ....
Eldina: Ja, annars kan vi lösa ut ... andragradsekvationen.
Kristina: Ja, då får vi ju samma. Vi får ju svaren direkt_ om vi gör med räknaren.
F: Hur menar du då?
Kristina: Om vi kollar var den skär x-axeln så får vi fram dom möjliga x-en vi kan ha.

Kristina formulerar hypotesen i sitt sista uttalande. Dessförinnan har hypotesen varit underförstådd, båda eleverna verkar vara på det klara med vad som gäller. Hypotesen verkar inte vara en direkt följd av visualiseringen av funktionen, men när de får se graferna kan de nästan direkt lösa uppgiften som de tidigare fastnat på. Det tyder på att visualiseringen hade en avgörande betydelse för att hypotesen formulerades. Detta samtal resulterar alltså i att eleverna tänker använda en idé om att faktorisera genom att titta på funktionens nollställen. När försöksledaren frågar varför det borde fungera kan de dock inte styrka hypotesen med något resonemang, Kristina svarar att ''det känns rätt'' att göra på detta sätt. De kontrollerar hypotesen genom att utföra multiplikationen och se att faktoriseringarna blir korrekta. Det vill säga de kontrollerar inte hypotesen utan enbart de konkreta tillämpningarna av hypotesen. Denna typ av kontroll är mycket naturlig eftersom eleverna endast är ute efter att lösa uppgifterna och inte efter att formulera någon regel eller något samband. I allmänhet kan man säga att *kontrollen* alltid utfördes på detta sätt, genom test av de konkreta, aktuella uppgifterna.

Alla elever i försöket kunde formulera någon typ av hypotes, men dessa var underbyggda på olika sätt. Förmågan att formulera relevanta hypoteser verkar överensstämma med den matematiska förmåga som elevernas lärare anser att de besitter. De elever som enligt läraren hade betyget MVG kunde i betydligt större utsträckning formulera egna hypoteser och klarade av ett deduktivt resonemang bättre än de som hade betyget VG eller G. MVG-eleverna var också de elever som bäst klarade av att förklara varför metoden med nollställen fungerar.

5.3 Kan elever lära sig någonting svårt

Att besvara frågan om eleverna kan lära sig någonting svårt är mycket besvärligt. Vad menas med att kunna något? Till vilken nivå ska eleverna ha nått för att man ska kunna säga att de har tillägnat sig ett begrepp? I detta försök kan jag peka på ett antal situationer som indikerar att flera av eleverna har höjt sin kunskapsnivå vad gäller faktorsatsen, eller i varje fall varit i situationer som gett tillfälle till inlärning, men det är i stor utsträckning spekulationer som förs fram.

Eleverna med betyg MVG och VG verkar ha förstått varför satsen fungerar och G-eleverna kan använda satsen och grafräknaren för att utföra faktoriseringar på nytt sätt. Grunden för dessa påståenden ligger i de beskrivningar som finns i kapitel 4. Jag anser att Kristina och Eldina, eleverna med betyget MVG, har nått en viss förståelse om varför faktorsatsen fungerar. Detta grundar jag på bland annat Kristinas uttalande på sidan 45:

> *När den [andragradskurvan] skär* x*-axeln har vi sagt att den ena delen av den här [faktoriseringen] har blivit noll. Antingen* f(x) *eller* g(x) *har blivit noll.*

Kristina menar alltså att om polynomet $p(x)$ har ett nollställe a, det vill säga $p(a)=0$, så är $f(a)=0$ eller $g(a)=0$. De har tidigare faktoriserat ett polynom genom att hitta polynomets nollställen och skriva $f(x)=(x-a)$ och $g(x)=(x-b)$, där a och b är polynomets nollställen. De har då i stort sett visat att om $p(a)=0$ så är $(x-a)$ en faktor i polynomet $p(x)$. Det är just faktorsatsen från höger till vänster (se sidan 36) som Kristina beskriver här, även om det är ganska osäkert och inte helt korrekt formulerat. I slutet av försöket kan också Eldina motivera förstagradspolynomets utseende när hon säger *"Motsatt tecken, eftersom vi vill att funktionen ska bli noll"*. Dessa situationer tyder på att Kristina och Eldina har nått en viss förståelse om sambandet mellan faktorisering av andragradspolynom och nollställen hos andragradspolynom.

När det gäller eleverna med betyget VG verkar Jenny och Nazanin ha insett varför faktoriseringen utnyttjar nollställena. Följande diskussion äger rum sedan eleverna har insett att andragradspolynomet och förstagradspolynomen har samma nollställen, -2 och 3:

Nazanin:	Andragradspolynomet är noll. Då är $(x+2)(x-3)=0$. Blev vi klokare av det?
Jenny:	Då är dom här också lika med noll *[skriver $0=(x+2)$ | $(x-3)=0$]*
Nazanin:	Nej, så kan man nog inte göra.
Jenny:	Det är ju så vi gör med andragradarna, vi faktoriserar.
Nazanin:	Ja! Nu förstår jag varför det blir ombytta tecken! För att 3-3 är 0 *[pekar på (x-3)]* och ...
Jenny:	-2+2 är noll *[pekar på (x+2)]*

Jenny och Nazanin verkar känna igen resonemanget från situationer där de har arbetat med lösning av andragradsekvationer med hjälp av faktorisering. En möjlighet är att de kopplar denna uppgift till hur de brukar lösa andragradsekvationer av typen $x^2-3x=0$ genom att faktorisera: $x^2-3x=x(x-3)$.

Lite tveksammare är det huruvida Haris och Jens är helt på det klara med varför man utnyttjar nollställena, men Jens sista uttalande i den andra refererade diskussionen i kapitel 4.2 kan tolkas så. Han säger:

> *Man sätter den här* [(x-3/2)] *som 0 sen också. Då får du ju två ställen, det här är ju liksom en faktor, det är ju som* x·x, *om du sätter den här* [pekar på vänstra x-et] *till noll så får du ut den andra, värdet här* [pekar på högra parentesen i faktoriseringen], *och sen sätter man den andra till 0. Det händer ju på två ställen, när den skär...* y-axeln *...*

Uttalandet kan dock tolkas på flera sätt. En möjlighet är att Jens faktiskt vet hur faktoriseringar används vid ekvationslösning, det vill säga att $x \cdot y=0 \Leftrightarrow x=0$ eller $y=0$. Eftersom Jens pekar på det ena x-et och (felaktigt) säger att man då kan få fram det andra, kan det kan också tyda på en stor osäkerhet om vad som gäller när en produkt av två faktorer ska bli noll.

Eleverna med betyget G, Fredrik och Johan, kan använda miniräknaren för att utföra faktoriseringen. Till exempel klarar de en av extrauppgifterna utan problem. De kan dock inte säga någonting om varför metoden fungerar.

Det är uppenbarligen mycket svårt att dra några säkra slutsatser huruvida eleverna verkligen har lärt sig någon matematik under försöket. I denna undersökning kommer jag inte att gå längre än så här i analysen av vad eleverna eventuellt har lärt sig. Däremot vill jag påpeka att flera elever enligt analysen i kapitel 5.1 och 5.2 har kunnat använda ett undersökande arbetssätt. Eleverna har med hjälp av visualiseringar av funktioner på en grafräknare kunnat formulera hypoteser omkring sambandet mellan funktioners nollställen och möjligheten att faktorisera funktioner. De har också kunnat kontrollera dessa hypoteser. Detta är, anser jag, en god indikation på att eleverna faktiskt har lärt sig någonting, eller åtminstone arbetat på ett sådant sätt att de har haft goda möjligheter att lära sig någonting.

6. Diskussion

6.1 Grafräknaren i ett undersökande arbetssätt

Vilka slutsatser kan då dras utifrån det försök som har genomförts? Några iakttagelser är följande:

- Alla elever har lärt sig någonting under försöket. Det kan då tyda på att metoden med ett undersökande arbetssätt är positiv för elevers inlärning, men det är kanske lika troligt att en lärare ensam med två elever i en timme är en viktigare orsak till framstegen.
- Elever med betyget VG verkar vara de som kan dra störst nytta av det arbetssätt som användes i försöket. Är arbetssättet för svårt för elever med betyget G, eller är det uppgiften som är lämpligast för elever med relativt goda prestationer i matematik? Skulle

MVG-eleverna ha kunnat dra större nytta av arbetssättet om uppgiften hade varit svårare?

- Eleverna tyckte att uppgifterna och arbetssättet var intressant och roligt, men ingen hade gjort något liknande förut. I kursplanen för matematik (Skolverket 1994/95) står det bland annat att *''undervisningen skall sträva efter att eleverna skall få uppleva tillfredsställelsen i att upptäcka mönster och samband''*. Trots detta verkar eleverna aldrig ha stött på frågeställningar och arbetssätt av den typ som användes i försöket.

6.2 Elevernas uppfattning om matematik

"Jag älskar min grafräknare" säger Karro, *"jag använder den jämt, utan den känner jag mig så osäker"*. Det finns flera situationer där elever använder grafräknaren utan att egentligen veta varför. Motiven kan vara till exempel att man inte kommer på något annat att göra, att man brukar använda den i liknande situationer eller att man tror att läraren vill att man ska använda den. Den sista anledningen kan vara mer frekvent än undersökningen visar då den outtalade överenskommelsen om hur arbetet i klassrummet ska fungera kan vara mycket starkt. Ett exempel på hur elever kan styras av detta är följande situation:

> När Johan och Fredrik ska lösa uppgift 2 börjar Johan helt korrekt med att skriva upp två parenteser på detta sätt: $(x+\ )(x-\ )$.
> När försöksledaren frågar varför han skriver olika tecken sade Johan *"Jaha!"* och började ändra det han hade skrivit.

Johans reaktion kan vara mycket naturlig utifrån hur hans matematikundervisning har sett ut under de elva år som han har vistats i skolan. När en lärare frågar *"Varför har du gjort så?"* är det ofta någonting som är fel. Vad är det som saknas när denna fråga får en sådan reaktion? Är diskussionen om matematik så ovanlig att den bara förekommer då det är något fel?

Uttalandet om kärleken till grafräknaren gäller endast de tre elevparen med betyget VG. Eleverna med betyg G respektive MVG talar inte om samma beroende. Om detta är en generaliserbar egenskap hos elever i gymnasieskolan, det vill säga om de elever med betyg VG är de som använder grafräknaren mest och de som då troligen också drar mest nytta av tekniken, eventuellt på bekostnad av G- och

MVG-elevernas inlärning, så kan det vara av stor vikt att undersöka effekterna av detta.

Eleverna i denna undersökning var mycket ovana att arbeta självständigt på det sätt som frågorna inbjöd till. Flera kommentarer under försöket eller under intervjun stöder detta och visar även på elevernas föreställningar om vad matematik är. Några exempel:

Haris: Det är så i matten, när man räknar, det är huvudsaken att man får ett resultat, inte hur man tänker. Man frågar inte hur man tänker. Vi som går natur vi gör bara så där och så där, vi vet inte varför.

Jenny: *[Svar på frågan "vad är det egentligen som händer?"]*
Det är såna frågor man aldrig hinner fråga sig på en mattelektion, för att då måste man räkna ikapp och få rätt på uppgifterna.

Om åsikterna bakom dessa uttalanden är representativa för elever i det svenska gymnasiet finns det anledning att diskutera uppläggning och innehåll i matematikundervisningen. Flera initiativ har tagit i den riktningen, till exempel har Bedömningsgruppen för studenternas förkunskaper i matematik, tillsatt av högskoleverket, kommit med sin slutrapport ''Räcker kunskaperna i matematik?'' (Högskoleverket, 1999) där flera frågor om matematikens roll och gymnasieelevers kunskaper diskuteras.

6.3 Slutsats

Att undersöka matematik med hjälp av grafer, tabeller, konkretiseringar, algebra eller något annat är det arbetssätt som matematiker genom historien har använt för att föra den matematiska teoribildningen framåt. Hypoteser om vad som kan hända i olika situationer ska testas, hypoteser som bygger på induktiva tankegångar ska senare bevisas med ett deduktivt resonemang. Det är troligen att begära för mycket av eleverna i gymnasieskolan om det undersökande arbetssättet man ber dem utföra ska fungera på samma sätt som hos historiens matematiska genier, men det är mycket möjligt och kanske också önskvärt att låta elever arbeta undersökande på en lägre nivå och med en viss handledning.

Det är svårt att avgöra vilken effekt elevernas arbete har haft på deras inlärning, men jag anser mig ändå ha fått ett visst stöd för att ett undersökande arbetssätt med hjälp av grafritande miniräknare ger möjlighet för elever att få en bättre förståelse för begreppet faktorisering och för faktorsatsen samt en större insikt i kopplingen mellan grafiska och algebraiska representationer av funktioner och ekvationer (se kapitel 5.3). Hur denna typ av arbetssätt kan användas i det dagliga arbetet i matematikklassrummet och inom vilka matematiska områden det passar in är viktiga frågor som bör bli föremål för framtida forskning.

Referenser.

Bergqvist, T. (1998). Secondary School Students Using Graphing Calculators. *Research reports No2, 1998, in Mathematics Education.* Department of Mathematics, Umeå University.

Bergqvist, T. (1999). Gymnasieelever undersöker ett matematikskt begrepp med grafräknare. *Research reports No2, 1999, in Mathematics Education.* Department of Mathematics, Umeå University.

Björk, L-E. och Brolin, H. (1996). *Matematik 2000, kurs* E. Natur och Kultur.

Dunham, P. och Dick, T. (1994). Research on Graphing Calculators. *The Mathematics Teacher, 87 (6).*

Galbraith, P. and Haines, C. (1998). Disentangling the Nexus: Attitudes to Mathematics and Technology in a Computer Learning Environment. *Educational Studies in Mathematics, 36 (3),*275-290.

Grugnetti, L. and Jaquet, F. (1996). Senior Secondary School Practices. In A.J. Bishop, et al. (Eds*), International Handbook of Mathematics Education,* (pp.615 - 645).

Högskoleverket (1999). *Räcker kunskaperna i matematik?* Bedömningsgruppen för studenternas förkunskaper i matematik, Högskoleverket.

Kaput, J. J. and Thompson, P. W. (1994) Technology in Mathematics Education Reserach: the First 25 Years in JRME. *Journal for Research in Mathematics Education, 25, (6),* 676-684.

Penglase, A. and Arnold, S. (1996). The Graphics Calculator in Mathematics Education: a Critical Review of recent Research. *Mathematics Education Research Journal, 8 (1),* 58-90.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.

Skolverket (1994/95). *Kursplaner -95, Naturvetenskapsprogrammet.* Skolverket, GyVux 1994/95:14.

Abstract

The article describes a study in which year eleven students, working in pairs, explore factorisation of second degree polynomials using graphical representations of functions. The students are guided into a new way of working, where they get to work with a series of questions using a graphing calculator. The results show that the students pose their own hypotheses and use the graphing calculator on their own initiative in certain situations.

Author

Tomas Bergqvist is research student in Mathematic Rducation at Umeå University, Sweden.

Research interest

The impact of graphing technology in upper secondary school mathematics: The change in student behaviour and working methods, students abilities to explore mathematics using graphing calculators and computers.

Address

Tomas Bergqvist
Department of Mathematics
Umeå University
S-901 87 Umeå
Sweden
Phone: +46 (0)90 786 61 39
Fax: +46 (0)90 786 52 22
tomas.bergqvist@math.umu.se
http://www.math.umu.se/~bqt/