Modelkompetencer

Nina Skov Hansen,

Christine Holm & Kristin Troels-Smith

I denne artikel præsenterer forfatterne et begrebsapparat, der beskriver en række modelkompetencer, dvs. de kompetencer der kan være involveret i arbejdet med at opbygge og analysere matematiske modeller. Set i en større sammenhæng kan kompetencerne opfattes som helt generelle problemløsningskompetencer. Men fokus i denne artikel ligger på kompetencernes indhold specifikt i forhold til matematisk modelleringsarbejde. Med udgangspunkt i et undervisningsforløb i matematiske modeller for nogle 1.års universitetsstuderende eksemplificeres og beskrives i alt 9 forskellige modelkompetencer. Begrebsapparatet omfatter for eksempel matematiseringskompetence, stategikompetence og refleksionskompetence. Begrebernes sammenhæng og anvendelighed bliver diskuteret generelt. Formålet er at komme nærmere på en forståelse af, hvad det egentlig er for kompetencer som kan udvikles gennem arbejde med matematiske modeller i undervisningen. Og hermed bidrage til at forbedre grundlaget for diskussion af modelarbejdets rolle og placering på forskellige undervisningsniveauer.

Indledning

Matematiske modeller er et emne, der er på læseplanen på stort set alle niveauer af matematikundervisningen i Danmark. Alle matematikanvendelser bygger på brug af matematiske modeller, og derfor er det vigtigt at elever og studerende lærer at behandle og forholde sig til matematiske modeller (Niss, 1989). Men hvad er det så man skal kunne for at behandle matematiske modeller, hvad er det for viden og færdigheder vi ønsker at bibringe eleverne gennem matematikundervisningen? Hvad er det for kompetencer de skal beherske?

Arbejdet med matematiske modeller kræver mange forskellige slags kompetencer, og dem mener vi, det er vigtigt at få beskrevet og præciseret. Dette kan medvirke til at styrke diskussionen om, hvad det er vi ønsker eleverne skal lære gennem undervisningen, og hvordan det kan gøres. Dette synspunkt bygger naturligvis på en

---

Alle tre forfattere er kandidater i matematik fra IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Danmark. Artiklen er skrevet på baggrund af specialerapporten "Modelkompetencer - udvikling og afprøvning af et begrebsapparat" (Hansen et al, 1996).

antagelse om, at det er muligt at udvikle generelle modelkompetencer, som er fælles for mange slags matematiske modeller. Det mener vi, er muligt. Samtidig er det dog vigtigt at være opmærksom på at alle færdigheder i deres udgangspunkt er bundet til konkrete erfaringer fra indlæringssituationen. Her mener vi, at beskrivelser af kompetencerne netop kan være med til at belyse, hvad der er det almene og generelle i en konkret undervisningssituation, der behandler én matematisk model. Således kan de kompetencer vi præsenterer også genfindes i generel problemløsning, men vi vil med vores beskrivelse se på hvordan disse ser ud i tilknytning til undervisning i matematisk modellering.

Der er skrevet meget om matematisk modelleringsarbejde i undervisningssammenhæng. Fra ICME og ICTMA[1] er der adskillige proceedings som omhandler modellering, og de rummer mange beskrivelser af konkrete undervisningsforløb. Se for eksempel (Lange et al., 1993), (Niss et al., 1991) og (Blum et al., 1989). Kendetegnende for disse er, at de rummer meget få beskrivelser af de modelleringsaktiviteter der har været i gang, og dermed er det ikke muligt at læse, hvad det er for kompetencer der er udviklet i forløbet. Vi har ikke kunnet finde nogen, der mere generelt har forsøgt at beskrive, hvad modelkompetencer kan bestå i.

Vi vil i denne artikel præsentere et begrebsapparat, der rummer de forskellige slags kompetencer, som er knyttet til arbejdet med matematiske modeller. Vi har opstillet og beskrevet 9 forskellige modelkompetencer for der igennem at sætte fokus på de mange forskellige aspekter, som findes i modelarbejdet.

Udviklingen af begrebsapparatet er sket i en vekselvirkning mellem teoretiske litteraturstudier og analyser af konkrete modelleringsforløb på universitetets første år. Det empiriske materiale har været skriftlige opgavebevarelser om Lotka-Volterra modellen fra et modelleringskursus samt en rapport fra et længerevarende projektarbejde i modellering. Den mere teoretiske litteratur har været af forskellig karakter. Vi har beskæftiget os både med matematisk tænkning og problemløsning generelt og mere specifikt med matematisk modellering. Se specielt (Schoenfeld, 1985, 1992), (Skovsmose,

[1] ICME står for: International Congress on Mathematical Education. ICTMA står for: International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Application.

1988, 1994), (Clements, 1989). Se iøvrigt vores specialerapport (Hansen et. al., 1996). I opbygningen af kompetencebegreberne har vi taget udgangspunkt i den teoretiske beskrivelse af modelleringsprocessen, hvor vi har set på karakteren af de aktiviteter, som den må indeholde. Det empiriske materiale har vi brugt til at vise at kompetencerne kunne genfindes i praksis, og hvordan de konkret kan tage sig ud. Vores empiriske materiale stammer fra undervisningssituationer, men vi mener at vores begreber på grund af deres baggrund i teoretiske overvejelser dækker bredere end undervisningssituationer alene.

Resultatet er et begrebsapparat bestående af 9 modelkompetencer. Når vi har valgt at have så mange begreber, er det fordi vores vigtigste mål har været at komme med en nuanceret beskrivelse af modelarbejdet og de mange forskellige færdigheder, der er involveret. Det gør også at begreberne ikke kan - eller skal - være helt skarpt adskilt fra hinanden. Vi mener dog, at begrebsapparatet er overskueligt nok til at kunne fungere som analyseværktøj. I det følgende vil vi præsentere vores begrebsapparat, og vi vil illustrere begreberne og give dem et konkret indhold ved at bruge opgavebesvarelserne om Lotka-Volterra modellen som gennemgående eksempel. Det skal understreges at det empiriske materiale knyttet til Lotka-Volterra modellen ikke har spillet en så dominerende rolle i vores udviklingsarbejde, som det gør i nærværende artikel. Specielt er de kompetencer, der relaterer sig til den indledende systemafgrænsning og formulering af den matematiske beskrivelse mere inspirerede af anden empirisk materiale.

Besvarelse af en model-opgave

På et kursus i matematiske modeller ved Roskilde Universitetscenters naturvidenskabelige basisuddannelse i foråret 1996 blev de studerende stillet en større opgave om Lotka-Volterra modeller[2]. Opgaven bestod

---

[2] Lotka-Volterra modellen er en differentialligningsmodel, der beskriver et samspil mellem en population af rovdyr og en population af byttedyr, hvis størrelser er indbyrdes afhængige. Den italienske matematiker Vito Volterra opstillede i 1920'erne modellen for at kunne forklare hvorfor den procentvise andel af rovfisk i fiskefangster i middelhavet ændredes under 1. verdenskrig. Amerikaneren Alfred Lotka opstillede den samme model, for at kunne forudsige den tidsmæssige udvikling af bla. los- og harebestande. Baggrunden var bla. en statistik over sådanne bestande, hvor man kunne iagttage nogle voldsomme udsving i størrelserne, som fremkom med jævne mellemrum. Se f.eks. (Heefelt, 1990) og (Blomhøj, 1996) for en nærmere beskrivelse af modellen og dens udbygninger.

hovedsageligt i at analysere Lotka-Volterra modellen både i sin mest simple udgave og i to mere komplicerede udbygninger [3]. Det første spørgsmål de studerende støder på lyder:

> *"Redegør kort for forudsætningen for denne model og for fortolkningen af de indgående parametre"* *(Blomhøj, 1996).*

og det sidste spørgsmål lyder

> *"Hvad kan man efter jeres mening bruge de behandlede populationsmodeller til?"* *(Blomhøj, 1996).*

For at illustrere, at der er mange forskellige kompetencer involveret i arbejdet med en sådan matematisk model, vil vi starte med at gengive en gruppes besvarelse af det første spørgsmål:

> *"Lotka-Volterra modellen beskriver forholdet mellem byttedyr og rovdyr... Modellen ser således ud:*
>
> $$x' = ax - bxy$$
> $$y' = -cy + dxy$$
>
> *hvor x' er ændringen i byttedyr og y' er ændringen i antallet af rovdyr. De fire parametre er alle positive. Tilvæksten i byttedyrbestanden er således proportional med antallet af byttedyr (ax) - flere dyr føder flere unger - dette led giver en eksponentiel vækst. Faldet i antallet af byttedyr styres både af byttedyr der kan fanges og af antallet af rovdyr der kan fange. Tilvæksten i antallet af rovdyr er proportional med både antallet af byttedyr og rovdyr. Konstanten c er en naturlig dødsrate for rovdyrene."*

De studerende forstår her at udnytte deres viden om de matematiske begreber, som symbolerne henviser til, i deres fortolkning af de samme symboler i forhold til byttedyr-rovdyr systemet. Dette forhold ses i deres tolkning af symbolerne x' og y'. Matematisk set er de differentialkvotienter og dermed udtryk for en væksthastighed. Denne viden overfører gruppen til byttedyr-rovdyr systemet, hvor x' og y' så bliver et udtryk for en ændringsrate[4] for henholdsvis antallet af rovdyr og antallet af byttedyr. Et andet sted, hvor evnen til at udnytte og fortolke viden om det matematiske system viser sig tydeligt, er i gruppens bemærkning om, at byttedyrene ville vokse eksponentielt, hvis der ikke var nogen rovdyr i systemet. En sådan konklusion bygger

---

[3] Arbejdet med at løse opgaven foregik i mindre grupper. En stor del af arbejdet foregik foran en computer, da numerisk løsning af differentialligningssystemet var en væsentlig del af opgaven. Opgaven var relativt omfattende, så de studerende arbejdede med den gennem 3-4 kursusgange.

[4] Gruppens forståelse af begrebet differentialkvotient er imidlertid ukorrekt idet de omtaler x' og y ', som ændringer og ikke ændringsrater.

på et kendskab til løsning af differentialligninger og en evne til at overføre dette kendskab til modelverdenen.

Til det sidste spørgsmål om hvad modellen kan bruges til reflekterer samme gruppe:

> *"Lotka opstillede modellen med det primære formål at forudsige en losbestand udfra dataindsamling. Dette kan dog kun kvalitativt lade sig gøre. Udfra modellen kan man se, at rovdyrbestanden topper lige efter at antallet af byttedyr har været på sit højeste ... Groft set passer dette med de målinger, der er vist på grafen i opgaveoplægget. Men hvor stor bestanden bliver fra år til år, kan modellen ikke udtale sig om, da det ses at de to bestande nogle gange topper samtidig, nogle gange når samme maximum og at der nogle gange er stor forskel mellem antallet af hhv byttedyr og rovdyr."*

- og gruppen konkluderer:

> *"Vi mener ikke at modellen kan bruges kvantitativt, dertil er der alt for mange påvirkninger og faktorer der ses bort fra (årstider, andre dyr osv). Den er nok mest anvendelig i undervisningsøjemed..."*

Her kan man sige, at viden om forskellige modeltyper giver gruppen et redskab til at vurdere modellen, idet de skelner mellem *kvantitative* og *kvalitative* beskrivelser og taler om et *forudsigende* formål, der kan sættes overfor bla. *forklarende* formål. Se f.eks. (Saaty & Alexander, 1981), (Davis, 1991). Derudover har gruppen en evne til at skelne mellem, hvad der er modeldata og hvad der er data fra den virkelige verden, og en evne til at vurdere relationerne mellem disse. Deres sidste bemærkning om, at modellen nok er mest anvendelig i undervisningsøjemed viser, at de studerende er meget bevidste om, at deres arbejde med opgaven foregår inden for de særlige rammer, som et matematikkursus giver.

Som citaterne ovenfor antyder, er det karakteristisk for en modelanalyse, at den involverer mange forskellige kompetencer. Ordet *kompetence* definerer vi, som det man har, når man kan sætte viden og erfaringer i sving i nye situationer. Kompetencen er altså at kunne udføre forskellige aktiviteter på baggrund af viden og erfaringer[5].

---

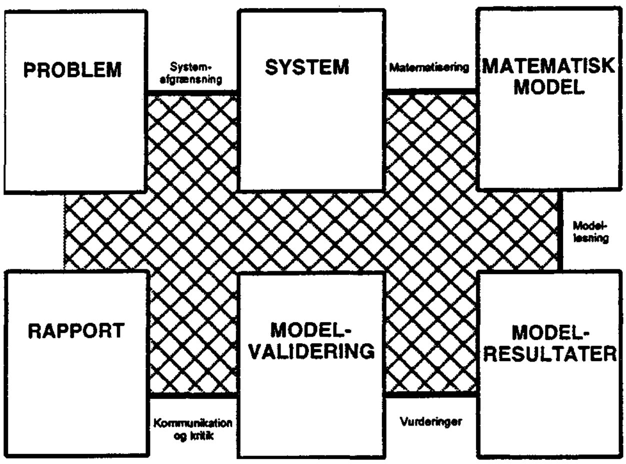
[5] I både uddannelsesøkonomiske og pædagogiske sammenhænge, hvor man har et behov for at sætte ord på, hvad det er folk skal kunne, bruges begrebet kompetence meget bredt som betegnelse for faglige, almene og personlige kvalifikationer, se f.eks. (Schnack, 1993) og (Undervisningsministeriet 1997). Vi ønsker at se på de specifikke kompetencer, der er involveret i arbejdet med matematiske modeller.

Modelleringsprocessen

Arbejdet med en matematisk model vil ofte gennemløbe nogle forskellige karakteristiske stadier, og kan beskrives som en modelleringsproces. Denne proces er beskrevet på mange måder, se f.eks. (Blomhøj, 1992), (Clements, 1989), (Mason, 1984) og (Skovsmose, 1990). Vi vil her kort give vores fremstilling af modelleringsprocessens struktur, idet den har været udgangspunkt for udviklingen af vores modelkompetencer. Modelleringsprocessens generelle struktur vil vi eksemplificere ved en gennemgang af Lotka-Volterra modellen.

Vi vil for anskuelighedens skyld gennemgå strukturen trin for trin. I konkrete modelleringsprocesser vil modelbyggeren gå frem og tilbage mellem trinene, og der vil ofte blive arbejdet samtidigt med forskellige trin. Som det også er illustreret på figuren skal man derfor forestille sig et kompliceret net af forbindelser mellem de forskellige trin i modelleringsprocessen.

Udgangspunktet for en matematisk model vil være et problem, som ønskes anskueliggjort og løst matematisk. Problemet er indlejret i et virkelighedsudsnit og skal som det første beskrives.



Figur 1: Strukturen af Modelleringsprocessen. Resultatet af de enkelte trin i processen er angivet i kasserne. I mellemrummene er der angivet hvilke aktiviteter, der fører frem til de forskellige trin. Det underliggende net af streger skal illustrere, at de enkelte trin i modelleringsprocessen er relateret til hinanden på kryds og tværs. Dog er der en underforstået rækkefølge af trinnene, selvom den ikke er tydeliggjort med pile. Rækkefølgen afspejles i angivelsen af aktiviteterne mellem trinene. (Hansen et al., 1996, s. 41) Kasserne er placeret således, at de to kasser der er placeret over hinanden, kan siges at tilhøre det samme univers. Problem *og* rapport *kan relateres til den virkelige verden;* system *og* modelvalidering *kan relateres til en slags systemverden imellem den virkelige og den matematiske verden, og* matematisk beskrivelse *og* model-resultater *kan relateres til det matematiske univers. (Mason, 1984, s.228)*

Det *problem* der fører til opstilling af Lotka-Volterra modellen kan være at forklare nogle kvalitative træk ved udviklingen af indbyrdes afhængige populationer af byttedyr og rovdyr, f.eks. at populationerne kan svinge kraftigt og relativt regelmæssigt over tid uden at de ydre rammer ændrer sig nævneværdigt. Men problemet kunne også være at forudsige populationernes størrelse til et bestemt tidspunkt. Formålet med modelopstillingen kan altså både være kvalitativt og kvantitativt.

Gennem *systemafgrænsningen* udvælges så det *system*, som man vil/kan modellere. I Lotka-Volterra modellen er det afgørende valg, at man afgrænser systemet til kun at bestå af de to populationer, der ønskes undersøgt. Dette betyder at man betragter byttedyrenes død som fundamentalt afhængig af, at de bliver ædt af rovdyrene, der antages at være byttedyrenes eneste fjende. Tilsvarende antages rovdyrspopulationens tilvækst på afgørende vis at afhænge af byttedyrspopulationens størrelse, idet man går ud fra at byttedyrene udgør rovdyrenes vigtigste fødegrundlag. Disse valg er helt afgørende for den videre modellering.

Med *matematiseringen* formuleres en *matematisk beskrivelse*[6] af systemet. I Lotka-Volterra modellen består den matematiske beskrivelse af et differentialligningssystem med to ligninger, som netop modellerer antagelserne om den tætte indbyrdes afhængighed mellem populationsstørrelserne. For at disse ligninger kan opstilles, må de grundlæggende antagelser kvantificeres og forsimples yderligere.

Modelresultaterne kan være nogle beskrivelser af hvordan populationerne vil udvikle sig over tid for et passende valg af proportionalitetskonstanter og startværdier for populationsstørrelserne. Disse resultater nås gennem *modelløsningen*, som i dette tilfælde består i at opbygge et computerprogram, som kan løse differentialligningerne numerisk og dermed simulere, hvordan systemet af byttedyr og rovdyr vil udvikle sig.

Modelvalidering handler om at bestemme om modellen er "god nok", dvs. svarer den tilstrækkeligt godt på problemet, eller skal den ændres, udbygges eller kasseres. Valideringen må bygge både på

---

[6] Vi bruger begrebet *matematisk model*, som en betegnelse for det kompleks af relationer der er mellem den matematiske beskrivelse og det system der modelleres. Når vi her henviser til den matematiske beskrivelse, er det den matematiske kerne i modellen.

matematiske analyser af modellens opførsel, og på en sammenligning mellem modelresultater og empirisk viden om populationernes opførsel.

Modelleringsprocessen skal på en eller anden måde dokumenteres i en form for *rapport*, så andre kan anvende og/eller tage stilling til modellen. Det kræver bla. at der gøres rede for de grundlæggende antagelser i systemafgrænsningen og for begrænsningerne i modellens anvendelsesområde.

I den opgave som de studerende blev stillet overfor, er der tale om at de skal analysere Lotka-Volterra modellen. Udgangspunktet er her selve den matematiske beskrivelse (dvs. figurkassen: matematisk beskrivelse) og ikke et problem ude i virkeligheden. Opgavens spørgsmål om at redegøre for modellens forudsætninger har til hensigt at få blotlagt de grundlæggende antagelser og dermed det system (systemkassen), der ligger til grund for den matematiske beskrivelse. Efter dette føres de studerende vha. spørgsmålene i opgaven mere eller mindre igennem kasserne fra matematisk beskrivelse til rapport. Således indgår der i opgaven, som tidligere nævnt, modelløsning i form af numerisk løsning af modellen ved hjælp af computer. Det sidste spørgsmål vi refererer, om at tage stilling til modellernes anvendelse, ligger på linien mellem modelvalidering og rapport. Dette spørgsmål er, som vi ser det, en opfordring til en kritisk stillingtagen til Lotka-Volterra modellens anvendelse og rækkevidde. Denne modelleringsaktivitet vender vi tilbage til senere i artiklen.

En modelleringsprocesbeskrivelse kan give et godt indblik i de faser der gennemgås ved modellering, og kan på den måde fungere som et værktøj for studerende, der skal i gang med at lære at modellere. Vi ønskede et redskab der kunne mere end dette. Vi ønskede et værktøj til at analysere gennemførte modelleringsprocesser, og at man på baggrund af dette værktøj havde et udgangspunkt for at diskutere de aktiviteter, der har været forbundet med en given modelleringsproces. Udviklingen af dette redskab og beskrivelsen af redskabet i det følgende er følgeligt tæt knyttet til beskrivelsen af modelleringsprocessen.

Struktureringskompetencen

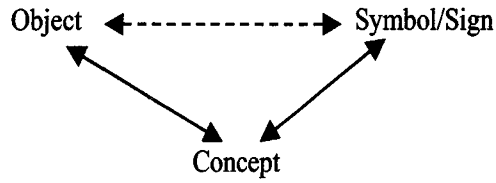
Første kompetence vi vil præsentere har vi valgt at benævne struktureringskompetence. Den er involveret i aktiviteter i forbindelse med strukturering af problemet og dets virkelighedsudsnit. Som før nævnt er problemet udgangspunktet for opbygningen af modellen. Dette er indlejret i den komplekse virkelighed. For ikke at drukne i denne kompleksitet er struktureringskompetencen en nødvendighed. En afgørende del af kompetencen består i at udvælge en formålstjenlig vinkel at anskue problemet udfra og dermed reducere kompleksiteten. Den valgte vinkel udgør et strukturerende greb som skal muliggøre udvælgelsen af de parametre, som er essentielle for problemet, samt danne baggrund for en præcisering af relationerne mellem udvalgte parametre. Det strukturerende greb udgør således udgangspunktet for den øvrige strukturering. Lotka-Volterra modellen er et eksempel på, at et komplekst økologisk system er reduceret til et sammenspil mellem antallet af byttedyr og antallet af rovdyr. Der ses således bort fra påvirkninger fra andre dyrearter, fra mennesker, fra klimaet mv. Denne afgrænsning, sammen med valget af at sammenspillet grundlæggende er styret af fødsels- og dødsrater, er det strukturerende greb i opstillingen af Lotka-Volterra modellen.

Struktureringskompetencen er særligt under indflydelse af de senere omtalte matematiserings-, validerings- og modelløsningskompetencer. Det skyldes at den valgte strukturering vil være påvirket af ens muligheder for at matematisere problemet og senere løse modellen og validere den. Den mere udviklede struktureringskompetence vil således tage flere af de efterfølgende trin i betragtning ved valg af det strukturende greb.

Afmatematiseringskompetence

Lotka-Volterra opgavens spørgsmål om at redegøre for modellens forudsætninger angår trinnet mellem model og system i figur 1. Spørgsmålet foranlediger, som det første citat fra den refererede opgavebesvarelse skulle illustrere, den aktivitet at de matematiske symboler fortolkes som parametre i et rov-, bytte-dyr system. Den aktivitet og den viden dette kræver er en del af det vi har valgt at kalde afmatematiseringskompetencen. Kompetencen består i at tilskrive en matematisk beskrivelse en mening i virkelighedsudsnittet. Væsentlige elementer af meningstilskrivningen er at klarlægge, hvilke parametre og sammenhænge fra virkelighedsudsnittet, det matematiske udtryk symboliserer. Afmatematiseringskompetencen er også en væsentlig kompetence når et modelresultat skal fortolkes, så det giver mening i det virkelighedsudsnit som er modellens udgangspunkt.

Afmatematiseringskompetencen kræver en "fornemmelse" for symboler, dvs. en fornemmelse for hvad et givent symbol i en matematisk beskrivelse kan repræsentere. Vi har været inspireret af Arcavi, der skriver om Symbol Sense i (Arcavi, 1994) ved at opstille en liste af aspekter, men pointerer at "symbolfornemmelse" er så omfattende, at det ikke er muligt at gøre listen udtømmende (Arcavi, 1994, s.31-32). Et nævnt aspekt er at kunne opfatte symboler som bindeled mellem matematiske begreber og objekter udenfor matematikken. Dette forhold kan tydeliggøres ved at benytte en såkaldt epistemologisk trekant (Steinbring, 1989, s.29), se figur 2. I Lotka-Volterra opgaven er det feks. symbolet x', som er bindeled mellem det matematiske begreb om differentialkvotienter og væksthastigheden for antallet af byttedyr i et økologisk system.



Figur 2. I den epistemologiske trekant indgår Object, der hidrører fra den konkrete kontekst/anvendelsesområde, Symbol, det der ved nedskrivning repræsenterer begrebet, og Concept, selve det matematiske begreb. Steinbring vil med figuren fokusere på at man i indlæringen af et matematisk begreb skal kunne skelne mellem begrebets symbol-repræsentation og begrebets mening sådan som det er konstitueret gennem referencen til et givent anvendelsesomåde (Steinbring, 1989). Vi har taget figuren med her for at illustrere hvordan symbolet kan opfattes som bindeled mellem begreb og objekt, når figuren læses med fokus på symbol.

En væsentlig del af afmatematiseringskompetencen er således at kunne opfatte symbolerne både som matematisk begreb med tilhørende begrebsbygning, og som konkrete objekter fra det pågældende anvendelsesområde. Det er klart at de to typer fortolkning kan støtte hinanden, men at afmatematiseringskompetencen ikke fungerer hvis kun den ene type kan gennemføres. Det vil sige, hvis det alene var en fortolkning af symboler som repræsentanter for matematiske begreber, ville afmatematiseringskompetencen ikke bidrage til en forståelse for det objekt som var modelleret.

Matematiseringskompetencen

Et væsentligt aspekt af symbolfornemmelse er i følge Arcavi at kunne benytte symboler som et meningstilskrivende værktøj. Symbolerne er således vejen til at formulere og formalisere objektet så matematiske begreber kan anvendes på det. Med værktøjet kan man bla. vælge en passende symbolrepræsentation af et givet objekt (Arcavi, 1994, s. 31). Dette aspekt af symbolfornemmelse er essentielt for den kompetence vi har benævnt matematiseringskompetencen. Matematiseringskompetencen indeholder evnen til at matematisere størrelser der oprindeligt er udtrykt i hverdagssprog. Kompetencen er i særlig grad beherskelse af det matematiske sprog og af matematiske begreber og teorier. Matematiseringskompetencen bruges både til at gøre problemet fra virkelighedsudsnittet til et matematisk problem og til at foretage yderligere skærpelser af problemet. En del præciseringer og forsimplinger af problemet er kun mulige, fordi problemet nu er et matematisk problem. Et simpelt eksempel på dette i Lotka-Volterra modellen er, at konstanten a dækker over en lang række forhold i det økologiske system som f.eks. den naturlige fødsels- og dødsrate for byttedyrene. Disse forhold kan også udtrykkes matematisk, se f.eks. (Heefelt, 1990). I Lotka-Volterra modellen har de dog kun betydning for de matematiske løsninger i form af en konstant faktor, og den matematiske beskrivelse kan derfor forenkles. Ofte er kraftige forsimplinger af problemet nødvendige, for at modellen overhovedet kan løses, og man kan derfor sige, at viljen til at simplificere er en væsentlig del af matematiseringskompetencen.

Vi har valgt at adskille aktiviteterne omkring afmatematisering og matematisering i to kompetencer, da vi er af den opfattelse at den danske undervisning i matematisk modellering traditionelt lægger størst vægt på afmatematisering. Vi vil med denne opdeling bringe fokus på, at der er en anden kompetence som ikke bliver trænet på samme måde, nemlig den hvor udgangspunktet er et struktureret problem som skal beskrives matematisk. Afmatematiseringskompetencen er den der bringer processen fra matematisk beskrivelse til system, mens matematiseringskompetencen anvendes når processen skal fra system til den matematiske beskrivelse.

Modelløsningskompetencen

Udgangspunktet for Lotka-Volterra opgaven er differentialligningssystemet, som de studerende gennem opgavens første spørgsmål har fået forbundet til et rov- og byttedyrs system. Men hvilke løsninger har dette system og hvad siger modellen om dyrebestandens tidslige udvikling? Det er her modelløsningskompetencen kommer ind. Kompetencen er hovedsageligt at kunne opnå resultater af den foreliggende model. Det indebærer dels at man er i stand til at analysere hvilke relevante resultater, der er mulige at opnå ud fra en given model, og dels at man er i stand til at udføre de nødvendige matematiske operationer for at opnå de pågældende resultater.

Med hensyn til det første er det relevant at løse systemet, så det bliver muligt at få en fremstilling af dyrebestanden som funktion af tiden. Et andet relevant resultat, som ikke ligger helt så lige for, er en undersøgelse af Lotka-Volterra modellens kvalitative opførsel. Denne undersøgelse kan tage sit udgangspunkt i en identifikation af ligevægtspunkter (punkter hvor begge dyrebestande har nulvækst), idet man ud fra ligevægtspunkternes placering i et faseplot kan sige noget om, hvilke kriterier der skal være opfyldt, for at populationsstørrelserne f.eks. ikke bliver negative. Denne metode bygger på en matematisk viden om kvalitative analyser, hvordan de kan udføres og deres betydning. En sådan modelløsning vil således ikke nødvendigvis bygge på viden om virkelighedens økologiske system.

Hvad angår evnen til at udføre de matematiske operationer, der kan give resultater, er det i Lotka-Volterra modellens tilfælde nødvendigt at inddrage numerisk løsning. Dette tilfælde er ikke enestående og numerisk løsning er ofte forbundet med opbygning og/eller benyttelse af programmer, der kan udføre de nødvendige computerberegninger. Derfor kan en algoritmisk tankegang være inkluderet i modelløsningskompetencen. I algoritmisk tankegang ligger det at kunne give en detaljeret beskrivelse af den procedure, der skal gennemløbes for at løse modellen.

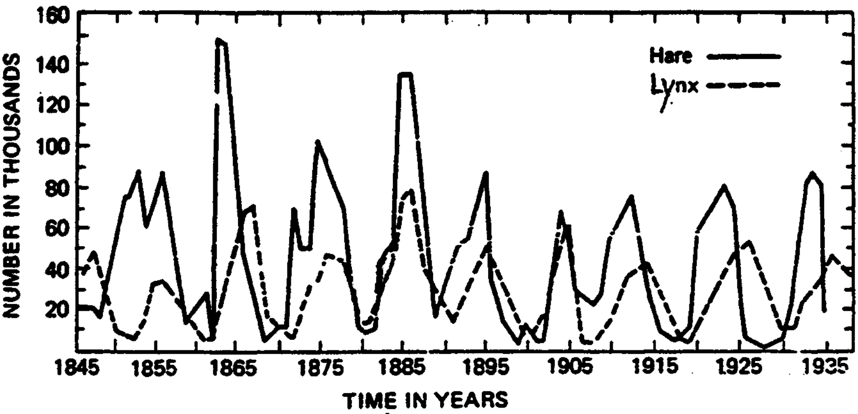
Endnu et element i modelløsningskompetencen kan være parameterbestemmelse. I Lotka-Volterra modellen vil det f.eks. dreje sig om fastsættelse af værdierne for konstanterne a,b,c og d (se ligningerne, side 3). For at finde løsninger til en model skal værdien af modellens indgående parametre være bestemt således at resultaterne bliver relevante i forhold til virkelighedsudsnittet. En sådan bestemmelse af parameterværdien kan indebære mange aktiviteter der ikke alle vil være af matematisk karakter. Typisk er der tale om enten at fastlægge parameteren ved hjælp af empiriske data, simpel prøven sig frem, statistiske beregninger eller i visse gunstige tilfælde ved hjælp af naturkonstanter.

Den "operative" side af kompetencen, altså at kunne udføre selve de matematiske operationer for at opnå resultater, er velkendt og aktiviteterne forbundet med dette er beskrevet i mange lærebøger, men der er også en anden side af kompetencen. Den angår aktiviteterne omkring at fastlægge et relevant løsningsrum, fremprovokere interessante analyser der bibringer information om det givne problems løsninger.

Valideringskompetencen

For at bedømme hvad rækkevidden af resultaterne er, deres styrker og svagheder og dermed rækkeviden af modellen, skal der udføres en validering af modellen. Der er hovedsageligt to typer af valideringer, den ene bygger på matematiske analyser den anden på empiriske analyser. Sidstnævnte vil bestå i at sammenligne modelresultater med resultater indsamlet fra "virkeligheden". Til matematiske analyser kan høre det at undersøge hvilken effekt det har på modelresultaterne, hvis man varierer på værdien af de parametre, som i deres natur er svære at fastsætte nøjagtigt. I nogle tilfælde vil det være muligt at undersøge, hvilke begrænsninger de valgte idealiseringer og antagelser må få på modellens resultater og for dens anvendelsesmuligheder.

En vigtig del af denne kompetence er at kunne vurdere hvilke krav en model skal leve op til og dermed valideres op imod. Hvis man står overfor en første simpel modeludgave, vil det være andre typer af vurderinger der skal foretages end med den endelige model. Også modeltypen vil have betydning for valideringen, modeller der først og fremmest skal belyse kvalitative træk ved det virkelige system, vil man stille andre krav til end til modeller, som skal forudsige en præcis kvantitativ opførsel. Lotka-Volterra modellen kan både opstilles ud fra et kvantitativt og et kvalitativt formål. Hvis den opstilles med det formål at give præcise forudsigelser af populationernes størrelse har den et kvantitativt formål. Mens den vil være kvalitativ hvis man er ude efter at undersøge generelle træk ved udviklingen og samspillet mellem størrelserne af de to dyrearter. Begge modeller kan sammenholdes med empiriske data, men det vil blive gjort på forskellig vis. I figur 3 er grafer over størrelsen af henholdsvis hare og lospopulationer fra år 1845 til 1935.



(Kilde: Southwick, 1972)

Figur 3. Måleserie over hare og los bestande i Canada fra år 1845 til 1935 (Blomhøj, 1996, s.20).

Hvis Lotka-Volterra modellen er opstillet med det formål at forudsige kvantitative træk, vil det være et krav til modelresultaterne, at de kan eftervise størrelser som de lokale maksima og minima samt de tidsmæssige afstande mellem de lokale ekstremumspunkter på graferne over de empiriske data. Hvis modellen derimod er opstillet udfra et kvalitativt formål, vil man interessere sig for at eftervise udsvingene men ikke størrelsen af dem.

Når det gælder matematiske analyser bygger valideringskompetencen på mange af de samme matematiske teknikker og vidensområder som modelløsningskompetencen. Et eksempel på dette gives i det følgende citat fra en gruppes opgavebesvarelse. I Lotka-Volterra opgaven er der et spørgsmål, som har til hensigt at give de studerende indsigt i begrænsningerne ved de løsninger modellen kan give. Denne indsigt skulle de opnå igennem en analyse af ligevægtspunkterne. Svaret lød således:

"Den udbyggede model ser således ud:

$x' = ax(1-x/N) - bxy$

$y' = -cy + dxy$

Her står N for byttedyrenes bærekapacitet.

Denne model har selvfølgelig også et ligevægtspunkt, som kan beregnes ved at sætte x' og y' lig 0. Dermed fås følgende:

$x = c/d$

$y = (a/b)(1-c/dN)$

Isocliner: For at finde ud af hvordan løsningskurven vil bevæge sig igennem planen mod ligevægtspunktet, foretages en fortegnsanalyse. ...

dermed fås to isocliner, som skærer hinanden i ligevægtspunktet.

$$x' = 0 \Rightarrow y = a/b - (a/bN)x$$
$$y' = 0 \Rightarrow x = c/d$$

... Hvis de to isocliner skærer hinanden i 2. kvadrant, dvs. hvis $N < c/d$, *så vil modellen ikke have noget ligevægtspunkt hvor begge arter er tilstede. Rovdyrene vil uddø.*

Hvis $N = c/d$ *når byttedyrene deres bæreevne præcis når rovdyrene uddør."*

Gruppen får tillagt en mening til deres undersøgelse af ligevægtspunkterne (afmatematiseringskompetencen) og får dermed mulighed for på længere sigt at vurdere modellens begrænsninger for beskrivelse af rov-byttedyr systemer. De matematiske overvejelser har således været en vigtig del i afgrænsningen af modellens gyldighedsområde.

De kompetencer vi har beskrevet hidtil har været tæt relateret til de enkelte trin i modelleringsprocessen og aktiviteterne, der bringer processen fra det ene trin til det næste. I det følgende vil vi beskrive 4 kompetencer, der er relateret til hele modelleringsprocessen eller som kan indgå på flere forskellige trin i processen.

Kommunikationskompetencen

Kommunikationskompetencen indgår i slutningen af modelleringsprocessen i forbindelse med dokumentering af modellen, men også undervejs i forløbet hvor kommunikation mellem opgavestiller og modelbygger kan være afgørende for processens forløb og resultat. Essensen af kommunikationskompetence er således at kunne sætte ord på og videreformidle færdige såvel som foreløbige resultater.

Det næste skridt er at kunne målrette denne kommunikation mod forskellige grupper. Disse grupper kan i princippet være af hvilken som helst karakter, hvorfor kommunikationen kan have både matematikere og ikke-matematikere som målgruppe. Dette kræver en evne til at sætte sig ind i en given målgruppes behov og forståelsesramme.

Kommunikation med ikke-matematikere vil bla. stille krav om at kunne formidle matematiske resultater på en form, der kan forstås uden noget videre kendskab til matematik. I kommunikationskompetence vil der så ligge en evne til at formidle de matematiske abstraktioner og udtrykke matematikken i mere almindelige dagligdagstermer. Formidlingen kan være af både skriftlig og mundtlig karakter, hvilket automatisk indebærer forskellige tekniske færdigheder.

I kommunikationskompetencen er der også en evne til at vurdere hvilke informationer, der vil være nødvendige/fornuftige at videregive i en given sammenhæng. Det drejer sig om at vurdere størrelsen af både informationsmængden og informationsdybden, altså at foretage en samlet vurdering af forståelsesbehovet hos målgruppen samt af forståelseskravet hos en selv. Man kan både forestille sig situationer, hvor mange og grundige oplysninger vil være af "det onde" og andre situationer, hvor det omvendt vil være af "det gode".

Refleksionskompetence

Ved at reflektere over de valg, der træffes undervejs i en modelleringsproces, bringes refleksionskompetencen ind i arbejdet med matematisk modellering. Denne refleksion har til formål at klarlægge de konsekvenser valgene har, så denne viden kan udnyttes til konstruktivt at komme videre i modelleringsprocessen.

Et gennemgående træk er således, at refleksionerne for det første indeholder overvejelser om, hvad forskellige valg betyder for den overordnede problemstilling og dernæst, hvilke konsekvenser disse overvejelser bør føre til. Overvejelserne vil konkret være af typen "Har jeg/vi truffet det rigtige valg?", "Hvad kunne vi ellers have gjort ?", "Hvad betyder det for de næste trin?".

Til de forskellige trin i modelleringsprocessen vil der være knyttet typiske spørgsmål. I den første fase vil det dreje sig om refleksioner over hvilke parametre, der er nødvendige at medtage i modellen og hvilke, der kan opfattes som så underordnede, at de med god samvittighed kan skæres bort. Senere vil der bla. være overvejelser om, hvordan en given model både med fordel og med rimelighed kan testes og til sidst i processen hvad modellen kan bruges til. Refleksionskompetencen, som vi har beskrevet den, er inspireret og indeholder dele af begrebet *refleksiv viden*, som det er introduceret af Ole Skovsmose (Skovsmose, 1988, 1994), men der er dog ikke tale om identitet mellem de to begreber[7].

Vi har valgt at beskrive refleksion som en selvstændig kompetence og ikke reducere det til en overbygning på de øvrige kompetencer. Med denne prioritering vil vi opnå at der bringes fokus på denne aktivitet, en aktivitet hvis betydning og dyrkelse ofte glemmes i jagten på målet, nemlig at opnå en matematisk beskrivelse og dernæst en løsning af denne. Reflektionskompetencen er central i indlæringssituationen og når en professionel modelbygning skal analyseres.

Strategikompetencen

Essensen af strategikompetencen er at kunne planlægge og kontrollere arbejdsprocesser. Kompetencen har både en *kontroldel* og en *strategidel*. Vi har været inspireret af (Schoenfeld, 1985, s.97-143, 1992, s.352-358) til indholdet i disse dele. Strategikompetencen har som mål både at styre mindre arbejdsprocesser og hele modelleringsprocessen opfattet som en samlet proces. Kontroldelen af kompetencen dækker bla. over det at kunne vælge mellem strategier og at kunne stoppe en ufrugtbar proces.

En vigtig baggrundsviden for at kunne kontrollere hele modelleringsprocessen er viden om de enkelte trin, som en modelleringsproces kan karakteriseres ved (se figur1). Dette er en forudsætning for at kunne koordinere de enkelte aktiviteter med hinanden. Herudover kræver strategikompetencen viden om forskellige typer af strategier, der kan tages i brug.

---

[7] Ole Skovsmose opstiller tre forskellige videnstyper: matematisk viden, teknologisk viden og refleksiv viden, som led i en undersøgelse af hvad *matematikkompetence* overordnet må bestå i, og hvad der må ligge i *kritisk matematikundervisning* (Skovsmose, 1994). Disse videnstyper sætter han også mere specifikt i relation til modelarbejde (Skovsmose, 1990). De tre videnstyper er alle nødvendige for at handle matematisk kompetent og beskriver hver især forskellige, væsentlige sider ved en sådan kompetence. Ideen med at ville beskrive matematikkompetence har vi således tilfælles med Skovsmose, men hans inddeling er anderledes og langt mere overordnet end vores. Vores modelkompetencer indeholder forskellige blandinger af matematisk og teknologisk viden samt af refleksioner, og vores opdeling i kompetencer går således på tværs af Skovsmoses videnstyper. Ideerne i Skovsmoses begreb om refleksiv viden har også mere direkte været inspiration til udviklingen af refleksionskompetencen og kritikkompetencen. For en nærmere diskussion af videnstyperne i forhold til vores kompetencebegreber henvises til (Hansen et. al., 1996, s.73-80).

En strategi kan f.eks. være at simplificere et givent udgangsproblem og ved at løse dette mere overskuelige problem få en ide om, hvad man kan gøre ved det egentlige problem. Dette gør modelbygningen meget mere overskuelig og letter dermed arbejdsprocessen. Denne strategi kan genfindes i Lotka-Volterra opgaven. Opgaven lægger ud med den simple model, der beskriver det simple sammenspil mellem de to variable x og y, vha. de fire konstanter a,b,c,d. Efter at have løst og valideret denne model går man videre. Det man vil benytte modellen til er at undersøge hvordan en begrænsning som ikke er forbundet til sammenspillet vil påvirke det økologiske system. En sådan begrænsning kunne være byttedyrenes fødegrundlag. For at nå frem til en model for dette er strategien igen at vende tilbage til struktureringen og indpasse dette i den simple model og dernæst matematisere og løse dette. Implementeringen af parameteren for byttedyrenes bærekapacitet (dvs. den øvre begrænsning for populationens størrelse, som er afhængig af naturlige vækstbetingelser) komplicerer differentialligningssystemet yderligere. I opgaven implementeres parameteren, således at byttedyrenes vækst (uden tilstedeværelse af rovdyr) ikke længere beskrives som en eksponentiel vækst men derimod som logistisk vækst. Strategien her er altså også at starte med den simple model og få denne til at fungere, for dernæst trinvist at udbygge modellen til den kan beskrive det niveau af kompleksitet man ønsker.

Ved analyse af et afsluttet modelleringsforløb kan det være svært at indfange om strategikompetencen har været i anvendelse. Kompetencens synlighed vil ved analyse af en skriftlig besvarelse være meget afhængig af kommunikationskompetencen.

Kritikkompetencen

Vi vil nu vende tilbage til det sidste spørgsmål i opgaven, som lyder:

> "Hvad kan man efter jeres mening bruge de behandlede populationsmodeller til?".

Spørgsmålet lægger op til, at besvareren foretager nogle kritiske vurderinger af modellerne som helhed. Denne færdighed har vi inkluderet i en kritikkompetence.

Lad os se på hvilke vurderinger, der kan ligge bag besvarelsen som den citerede gruppe gav. Gruppen lægger ud med følgende overvejelser:

> *"Lotka opstillede modellen med det primære formål at forudsige en losbestand ud fra dataindsamling... ".*

Gruppen afdækker således den oprindelige modelbyggers intentioner med modellen. Opgavens opfordring til at gruppen skal give deres egen vurdering af hvad modellen kan bruges til, har således fået dem til at reflektere over, hvad der oprindeligt var formålet med den. Herefter skriver de:

> *"Dette kan dog kun kvalitativt lade sig gøre".*

Gruppen fortsætter således tankerækken med at reflektere over holdbarheden af det oprindelige formål, og foretager her en skelnen mellem at komme med henholdsvis kvantitative og kvalitative forudsigelser. Bag disse overvejelser ligger der en del forskellige spørgsmål og dermed en evne til at formulere disse spørgsmål. Eksempelvis må gruppen have spurgt sig selv:

> *"Hvad må man kræve af modellen for at den kan leve op til formålet?"*

og

> *"Hvilket formål kan en model i det hele taget have?".*

En stor hjælp til sidstnævnte spørgsmål vil være et kendskab til forskellige modeltyper[8]. Dette vil give et redskab i form af forskellige begreber til at finde en models karakteristika og deraf dens "ømme punkter".

Generelt har vi tillagt kritikkompetencen den funktion at forholde den afsluttede modelleringsproces kritisk til den eller de kontekster, hvor den givne model skal anvendes. Det vil sige at vurdere modellens anvendelighed i forskellige sammenhænge. Kritikkompetencen er essentiel når man skal undgå en ukritisk anvendelse af modeller, som man ikke selv har stået for opbygningen af. Afgørende elemen-

[8] Vi har skitseret modelleringsprocessen som værende generel for alle typer af matematiske modeller. Alle matematiske modeller har på den måde nogle fællestræk, på den anden side er det også ganske klart at matematiske modeller kan have vidt forskellig karakter og videnskabelig status. Der er ikke nogle endegyldig opdeling i modeltyper, men der er i litteraturen mange forslag til inddelinger i modeltyper (Kapur, 1988), (Jensen, 1980), (Blomhøj, 1992), (Saaty og Alexander, 1981), (Davis, 1991) de er diskuteret i (Hansen et al, 1996, s.80-89).

ter af kompetencen er at kunne afdække en given models historie (har den f.eks. haft forskellige formål gennem dens udvikling) med den hensigt at afklare modellens status og ud fra dette vurdere modellens styrker og svagheder i en bestemt sammenhæng.

Kritikkompetencens aktivitet omkring at stille spørgsmål kan også genfindes i refleksionskompetencen. Der hvor de to kompetencer adskiller sig er ved at kritikkompetencen er i funktion, når en modelleringsproces opfattes som afsluttet. Den er altså ikke et værktøj, som refleksionskompetencen, til at komme videre i en modelleringsproces ved at stille spørgsmål til delene i processen. Men den er en kompetence der bruges til at reflektere over modellen som helhed, og de refleksioner og den validering der ligger til grund for denne.

Begrebsapparatets sammenhæng

Vi har nu præsenteret det begrebsapparat bestående af i alt 9 modelkompetencer, som vi har udviklet. Med disse begreber er det muligt at give en nuanceret beskrivelse af de færdigheder, som er involveret i arbejdet med matematiske modeller i undervisningen. De 9 modelkompetencer er følgende:

1. Struktureringskompetence
2. Afmatematiseringskompetence
3. Matematiseringskompetence
4. Modelløsningskompetence
5. Valideringskompetence

6. Kommunikationskompetence
7. Refleksionskompetence
8. Strategikompetence
9. Kritikkompetence

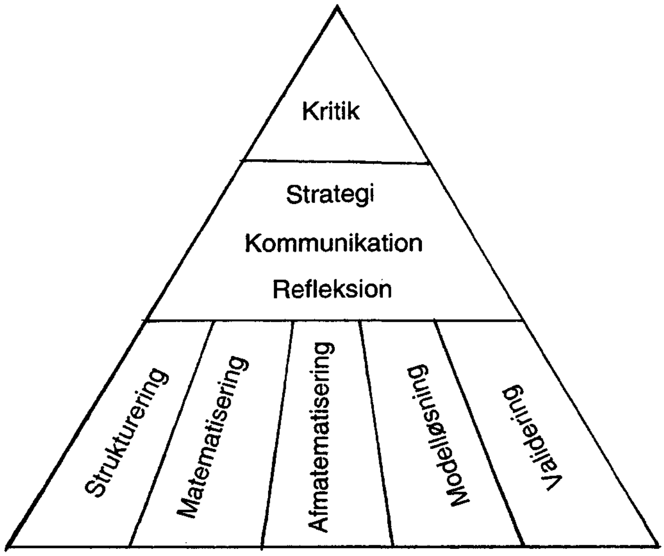
Vi har valgt at inddele kompetencerne i to grupper for at sætte fokus på en væsensforskel. Fælles for de første fem kompetencer er, at de alle kan knyttes til et bestemt trin i modelleringsprocessen. Noget tilsvarende kan ikke siges om de sidste fire kompetencer, der indgår mere bredt i modelleringsprocessen og i større grad kommer til udtryk i et samspil med andre kompetencer.

De førstnævnte kompetencers nære tilknytning til modelleringsprocessen skyldes i høj grad den metode vi har anvendt i udviklingen af kompetencerne, hvor vi benyttede forskellige modelleringsprocesbeskrivelser som inspirationskilde. Denne tilknytning betyder ikke, at kompetencerne i en konkret modelleringsproces vil være begrænset til en enkelt fase. For det første vil en modelleringsproces i praksis aldrig følge den teoretiske beskrivelse trin for trin. Der vil i udbredt grad være tale om at gå frem og tilbage og krydse rundt mellem de forskellige trin. For det andet vil kompetencerne spille sammen og dermed være involveret på andre trin end der hvor de er mest synlige. Særligt tydeligt vil samspillet være mellem kompetencer, der er knyttet til trin umiddelbart efter hinanden i modelleringsprocessen. For eksempel vil valg af strukturering ofte være styret af muligheden for matematisering.

De fire kompetencer i anden gruppe indgår som nævnt mere bredt. Strategikompetencen og refleksionskompetencen indgår i et samspil med de øvrige kompetencer til at planlægge og udvikle arbejdet med modellen. Disse to kompetencer kan i sagens natur aldrig iagttages rent. Når vi alligevel har valgt at medtage dem som særskilte kompetencer, er det fordi vi finder, at de belyser nogle væsentlige aspekter ved matematisk modelarbejde. Kommunikationskompetencen indgår på alle trin i modellerings-processen, hvilket ses særligt tydeligt når flere arbejder sammen med forskellige trin af den samme modelleringsproces. Kommunikationskompetencen er endvidere væsentlig, når den samlede - foreløbige eller færdige - modelleringsproces skal dokumenteres, sådan at det er muligt for udenforstående at kunne tage stilling til den matematiske model. Da sidste kompetence i gruppen, kritikkompetencen, handler om at kunne tage stilling til den samlede model, forudsætter den på afgørende vis alle de øvrige kompetencer.

Den anden gruppe af kompetencer vil ofte have den funktion at de kvalificerer aktiviteter, der udføres på baggrund af andre kompetencer. I praksis betyder det for eksempel, at en modelbygger kan udføre flere komplicerede matematiseringsaktiviteter, hvis vedkommende også besidder f.eks refleksionskompetencen på et vist niveau. En start kan være at være i stand til at forstå forsimplinger og dernæst at kunne foretage matematiseringer i simple situationer. En videreudvikling vil være at kunne sprogliggøre og bevidst reflektere over hvilke forsimplinger, der er hensigtsmæssige i en situation og over deres mulige konsekvenser. Matematiserings-kompetencen kan således - ligesom alle de øvrige kompetencer - være til stede hos den enkelte i varierende grad af udvikling. Det afgørende er her, at de mere brede kompetencer som refleksions-kompetencen og strategikompetencen vil have indflydelse på progressionen i de enkelte kompetencer.

De nævnte sammenhænge mellem kompetencerne er skitseret i følgende figur:



Figur 4: En hierarkisk model af det samlede begrebsapparat. De øverste fire modelkompetencer kvalificerer de aktiviteter der udføres på baggrund af de nederste fem kompetencer. Kritikkompetencen er placeret øverst, da den bygger på alle de andre kompetencer, mens rækkefølgen af strategi-, refleksions- og kommunikations-kompetencen er tilfældig.

De øverste fire kompetencer i figur 3 kan i kraft af de navne vi har givet dem umiddelbart fremtræde som helt generelle kompetencer, dvs. kompetencer der benyttes i alle former for problemløsning. Vi har i imidlertid tillagt disse kompetencer aspekter som er relevante specifikt i forhold til opbygning og analyse af matematiske modeller. De refleksioner, strategier, kritiske spørgsmål og kommunika-tionsaspekter, som vi har lagt i kompetencerne er ikke de samme som ville være på tale ved andre former for problemløsninger.

Fælles for alle kompetencerne er at de involverer en række vidensområder. Man kan tale om, at den enkelte kompetence har et vist vidensindhold. Undervejs i beskrivelsen af de enkelte kompetencer har vi kort berørt det et par gange. For eksempel nævnte vi, at kritikkompetencen blandt andet byggede på et kendskab til forskellige modeltyper. Modeltypeviden er således en del af kritikkompetencens vidensindhold. Viden om den virkelighed der forsøges modelleret, vil være af afgørende betydning for især struktureringskompetencen, men vil også være en fordel for de andre kompetencer og er derfor en del af de fleste kompetencers vidensindhold. Et eksempel på dette er betydningen af et kendskab til økologi for at arbejde med Lotka-Volterra modellen.

Status på begrebsapparatet

Vi vil kort se på rimeligheden i begrebsapparatets størrelse og grænserne mellem kompetencerne. Det er oplagt at spørge; "Hvorfor er der lige 9 kompetencer og ikke for eksempel 10?"

Vores mål var at kompetencerne set som et hele både skulle være til at overskue og samtidig så detaljeret, at det kunne nuancere opfattelsen af, hvad der ligger i matematisk modelarbejde. Vi havde således to idealer, der trak i hver deres retning. Det er klart, at der lige så godt kunne have været 10 som 9 kompetencer. Men da vi mente os i stand til at indfange de væsentligste aktiviteter, som vi stødte på i vores empiriske materiale og i forhold til egne erfaringer, bestod begrebsapparatet af ni kompetencer, og derfor stoppede vi udskilningen der.

En oplagt mulighed for at reducere antallet af kompetencer ville være at lægge refleksionskompetencen, strategikompetencen og kommunikationskompetencen ind i de enkelte kompetencer. Dette ville være i tråd med en argumentation i retning af, at disse færdigheder skal være til stede, for at man i det hele taget kan tale om at "noget" er en kompetence. Når vi ikke har valgt denne løsning, er det fordi vores arbejde også er henvendt til undervisere og elever, og at vi i den forbindelse finder det vigtigt at skabe opmærksomhed om disse sider af modelarbejdet. Direkte henvendt til matematiklærere finder vi at det giver mere gennemslagskraft at sætte aspekterne op hver for sig med benævnelse fremfor at lægge dem ind under kompetencebegrebet.

Som nævnt i forrige afsnit er kompetencerne tæt knyttet til hinanden. Alt efter den model man arbejder med kan det være vanskeligt skarpt at afgrænse kompetencerne fra hinanden. Det har heller ikke været vores mål i udviklingen at grænserne mellem begreberne skulle være knivskarpe. Vi har i stedet ønsket at kernen i vores begreber skulle være klare, og at vi gennem beskrivelsen af de ni modelkompetencer kunne vise hvor mange meget forskelligartede aktiviteter, der indgår i modelarbejde. Sidstnævnte ønske har ført til at vi har søgt at gøre begreberne fyldige. Det vil sige, at vi har tilstræbt at indfange mange forskellige facetter af de enkelte kompetencer. Kompetencerne overlapper imidlertid hinanden, så vi må sige at grænserne til en vis grad må opfattes som flydende. Det kan eksempelvis være umuligt at foretage en skelnen mellem hvornår en strukturering slutter og en matematisering begynder. Eller at adskille refleksionskompetencen fra den kompetence, der er involveret i det arbejde, der reflekteres over. Modelkompetencerne peger således i deres definitioner klart på forskellige aspekter af modelarbejde, men når de anvendes på konkrete aktiviteter kan de smelte sammen.

Begrebsapparatets anvendelighed

Til slut vil vi give en række eksempler på, hvad vi mener begrebsapparatet kan anvendes til. Da det ikke er forhold vi har foretaget egentlige videnskabelige efterprøvninger af, skal det opfattes som påstande, vi mener, det ville være givtigt at undersøge nærmere.

Overordnet ser vi en anvendelse i forhold til tre målgrupper: matematikundervisere, elever/studerende og matematikdidaktikere.

Matematikundervisere kan hente inspiration i begrebsapparatet til at fastlægge og beskrive hvad de vil sigte mod at give elever gennem undervisningen. I forlængelse heraf kan det indkredses hvilke typer af aktiviteter, der skal være i undervisningen for at der skabes mulighed for tilegnelse af bestemte kompetencer.

I en konkret undervisningssituation kan begrebsapparatet give inspiration til beskrivende ord der kan bruges i samtale med eleverne om indholdet i undervisningen. Dette gælder i særdeleshed for anvendelse af eksempler i undervisningen, hvor det kan være et problem at få tydeliggjort hvad det pågældende eksempel skal være eksemplarisk for. Her kan kompetencebeskrivelsen gøre det nemmere at sætte fokus på, hvilke kompetencer arbejdet med eksemplet skal være eksemplarisk for.

Vi forestiller os imidlertid lærere kan drage størst nytte af begrebsapparatet som redskab til analyse og evaluering af udførte forløb. Begrebsapparatet vil give læreren mulighed for at få sat ord på, hvilke kompetencer der har været involveret i et givet forløb. Man kan endvidere forestille sig, at det vil være muligt at indkredse hvilke undervisningssituationer, der har skabt grobund for udvikling af den ene eller den anden kompetence.

I en indlæringssituation kan det være en hjælp at få sat ord på, hvad et givet forløb mere overordnet stiler mod at bibringe en. Vi mener derfor begrebsapparatet kan være med til at klargøre for elever/ studerende, hvad målet er med at arbejde med matematiske modeller og derigennem støtte indlæringsprocessen. Idet eleven får mulighed for at hente beskrivende ord (i kraft af lærerens brug af disse), vil betingelserne for at reflektere over egen læring blive fremmet.

Didaktikere vil ligesom matematikundervisere kunne benytte begrebsapparatet som redskab til analyse af undervisningsforløb. Her vil det være nødvendigt at undersøge nærmere hvordan betingelserne er for aflæsning af de enkelte kompetencer alt efter om forløbene er dokumenteret skriftligt, på video eller lydbånd. For eksempel er det oplagt, at der vil være store problemer med at aflæse strategikompetencen i visse typer af materialer.

Mere generelt mener vi, at begrebsapparatet kan kvalificere diskussionen om modelarbejdets stilling i matematikundervisningen. Dette skyldes at en beskrivelse af kompetencerne kan løsrive diskussionen af elevernes kunnen fra at være emnefokuseret til i lige så høj grad at lægge vægt på færdigheder. Derudover kan kompetencebeskrivelserne nuancere diskussionen ved at påpege de mange forskellige aspekter af modelarbejdet.

Referencer:

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in formal mathematics, *For the Learning of Mathematics, 14(3)*, 24-35.

Blomhøj, M. (1992). *Modellering i den elementære matematikundervisning - et didaktisk problemfelt.* PhD afhandling, Matematisk Institut, DLH.

Blomhøj, M. (1996). *Noter til Matematik D, Matematiske Modeller.* Den Naturvidenskabelige Basisuddannelse, RUC.

Blum, W. et al. (Eds.) (1989). *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics.* Chichester, England: Ellis Horwood.

Clements, R. (1989). *Mathematical Modelling.* Cambridge, NY, USA: Cambridge University Press.

Davis, P. (1991). Applied Mathematics as a Social Instrument. I Niss et al. (Eds.), *Teaching of Mathematical Modelling and Applications.* Chichester, England: Ellis Horwood.

Hansen, N.S., Iversen, C. & Troels-Smith, K. (1996). *Modelkompetencer - udvikling og afprøvning af et begrebsapparat.* Tekster fra IMFUFA nr. 321, IMFUFA, RUC, Roskilde, Danmark.

Heefelt, M. (1990). *Dynamiske modeller.* Danmark: Gyldendal.

Jensen, J.H. (1980). Matematiske modeller vejledning eller vildledning? *Naturkampen 18.*

Kapur, J. (1988). *Mathematical modelling.* New Delhi, India: Wiley Eastern.

de Lange, J. et al. (Eds.) (1993). *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications.* Chichester, England: Ellis Horwood.

Mason, J.H. (1984) Modelling: What do we really want students to learn? In Berry, Burghes, Huntley, James & Moscardini (Eds.), *Teaching and Applying Mathematical Modelling.* Chichester, England: Ellis Horwood.

Niss, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curriculua. In Blum, Berry, Biehler, Huntley, Kaiser-Messmer & Profke (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics.* Chichester, England: Ellis Horwood.

Niss, M. et al (Eds.) (1991). *Teaching of Mathematical Modelling and Applications.* Chichester, England: Ellis Horwood.

Saaty, T. L. & Alexander, J. M. (1981). *Thinking With Models.* Oxford, England: Pergamon Press.

Schnack, K. (1993). *Handlekompetence og politisk dannelse.* Didaktiske studier, Danmarks Lærerhøjskole, *2* pp. 5–15.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* London, England: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In Grouws, D.A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* NY, USA: Macmillan.

Skovsmose, O. (1988). *Reflective knowledge and mathematical modelling.* Rapport R pp. 88-13, Afdeling for matematik og datalogi, AUC, Aalborg, Denmark.

Skovsmose, O. (1990). Reflective knowledge: Its relation to the mathematical modelling process. International Journal for Mathematics Education, Science and Technology *21(5)*: pp. 765–779.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics 9(1)*: pp. 24–33.

Undervisningsministeriet (1997). *National kompetenceudvikling: Erhvervsudvikling gennem kvalifikationsudvikling.* Copenhagen, Denmark: Undervisningsministeriets forlag.

Abstract (in English)
Modelling qualifications
In this article we will present a conceptual framework which describes a sequence of modelling skills; skills which can be involved in students mathematical modelling activities. On the basis of a course in mathematical modelling for freshmen, nine modelling skills are exemplified and described. The conceptual framework includes, for example, skill in mathematisations, skill in strategy and skill in reflection. We will discuss how useful these concepts are and the relation between them. The purpose is to reach a better understanding of what kind of skills students can develop through modelling activities in mathematics instruction. This article is based on a master thesis titled: Modelling skills - development and testing of a conceptual framework (Hansen et.al., 1996).

Authors
Nina Skov Hansen, Christine Holm and Kristin Troels-Smith. (MS in Mathematics from Roskilde University)

Address
Adjunkt Christine Holm
Virum Gymnasium
Fuglsangvej 66
2830 Virum, Danmark
christine_holm@fc.skolekom.dk
nina_skov_hansen@hotmail.com
kristin.troels.smith@radiometer.dk