Matematikkens sproglighed som didaktisk potentiale

Carl Winsløw

Med udgangspunkt i klassiske og nyere matematikfilosofiske synspunkter redegøres kort for hvorledes matematik som fænomen kan beskrives i sprogteoretiske termer. Derpå diskuteres konsekvenserne af en sådan beskrivelse for to grundlæggende matematikdidaktiske problemkredse: Hvordan begrundes matematikundervisning? Hvordan kan matematikundervisning sætte den lærende i stand til at udvikle kreative (i modsætning til automatiske) kompetencer i udøvelse og anvendelse af faget?

I den danske gymnasieskole vælger eleverne fra starten mellem to linier: den sproglige og den matematiske — i folkesproget: om de vil være "sproglige" eller "matematikere". Denne dualisme er dækkende for en meget udbredt opfattelse af det akademiske univers som hvilende på to hovedpiller: den humanistisk-samfundsvidenskabelige, og den matematisk-naturvidenskabelige. Den første tænkes så i meget bred forstand at have "kulturen", det menneskeskabte, som genstandsområde, mens den anden dyrker den kvantitativt-empiriske beskrivelse af "naturen", vor fysiske omverden. Man beskriver også ofte forskellen vha. de videnskabelige metoder, som anvendes, og selvom denne beskrivelse er (endnu) mere problematisk, er den grundlæggende ide den, at det lærende/forskende subjekt i højere grad tænkes sat i baggrunden i den matematisk-naturvidenskabelige metode.

I denne dualisme opfattes faget matematik som det mest rendyrkede eksempel på "inhuman" akademisk praksis: genstandsområdet er kvantitativt-geometriske abstraktioner, der er strengt adskilt fra den menneskelige subjektivitet, og som samtidig er et nødvendigt redskab til at beskrive en lang række naturfænomener. Det faktum, at matematikken ikke er opstået af sig selv — uafhængigt af menneskelig vilje og tankevirksomhed — kommer i meget ringe grad til udtryk i den traditionelle præsentation af faget. Fagets videnskabsteoretiske problemstillinger kommer kun indirekte frem, fx. når matematikkens historie behandles som en serie af "opdagelser"

Carl Winsløw *er lektor ved Matematisk Afdeling, IMFKI, Danmarks Lærerhøjskole, København, Danmark*

af konkrete sammenhænge, og den underliggende platonisme — som blot er en af flere mulige matematik-filosofier (cf. afsnit 1) — gøres normalt ikke til genstand for problematisering, endsige diskussion. Matematik opfattes af de fleste elever — og vel også af flertallet af matematiklærere og matematikere — som et fag, hvor subjektivt præget diskussion ikke hører hjemme, hvor forståelse drejer sig om at tilegne sig et givet sæt begreber og færdigheder, og hvor intersubjektivitetens rolle indskrænker sig til informationsudveksling (fx. nyt stof, forklaring, skriftlige opgaver) i forbindelse med denne indlæring.

Det er nærværende artikels udgangspunkt, at denne traditionelle præsentation af matematikken er mangelfuld, selvom den kan siges at repræsentere nogle væsentlige aspekter ved faget; dette skyldes, at matematikkens *sociale karakter*, både i aktuel og historisk forstand, negligeres. Vi skal argumentere for, at matematikkens sociale karakter, såvel som dens specifikke egenart, kan indkredses nøjere gennem analyse af det særlige *sproglige register*, matematikken betjener sig af, og at denne analyse er perspektivrig både i beskrivelsen af fagets rolle i uddannelsessystemet og samfundet i øvrigt, og i fagets konkrete didaktiske problemstillinger. Matematikken står altså ikke uden for, endsige i modsætning til, det sproglige, men kan tværtimod beskrives og formidles i kraft af sin specifikke sproglighed. (Dele af artiklens indhold er yderligere uddybet i Winsløw (1998a).)

Hvad er matematik?

Overskriftens spørgsmål er emnet for den akademiske disciplin, der går under betegnelsen *matematikkens filosofi* (cf. Benacerraf (1983), Ernest (1992), Tymoczko (1986) for generelle referencer), men som måske snarere burde betegnes *matematikkens videnskabsteori*. To problemkredse, der optræder i enhver videnskabsteoretisk undersøgelse, er:

- Beskrivelse af fagets genstandsområde (ontologiske spørgsmål),
- Beskrivelse af fagets metode (epistemologiske spørgsmål).

Disse spørgsmål er langt fra trivielle for matematikkens vedkommende. Spørgsmålet om, i hvilken forstand fagets genstandsområde i det hele taget findes, er fx. oplagt vanskeligere for matematik end for fag som geologi eller litteraturvidenskab; det andet spørgsmål, hvorledes (og i hvilken forstand) vi opnår erkendelse og ny viden om fagets genstande, afhænger naturligvis af det første. På denne baggrund kan det umiddelbart forekomme paradoksalt, at praktiserende matematikforskere og matematikundervisere i almindelighed ofrer disse spørgsmål ringe opmærksomhed; forklaringen synes at være, at man ikke er i tvivl om *hvordan* man i praksis skal udøve faget, og at den filosofiske diskussion kan synes fjernt fra fagets egentlige gøremål. Det er næppe heller uvæsentligt, at videnskabsfilosofiens metoder og tænkemåde kan føles meget fremmede for den akademiske kultur, som matematikeren er uddannet i, ligesom matematikken i mindre grad end fx. de humanistiske fag har været under pres for at forklare og legitimere sin virksomhed (se fx. Thomassen (1981)). Vi skal argumentere for legitimeringsproblemets relevans for matematikken i næste afsnit.

Det spiller også en stor rolle, at matematikken i en lang periode — fra antikken og indtil forrige århundrede — i det store og hele blev betragtet som noget perfekt og afsluttet, en gang for alle formuleret i Euklids elementer. Matematikundervisning bestod således i overlevering af en færdig, klassisk tradition. Mens alle matematikere (forhåbentlig!) i dag er klar over, at matematik er et fag i rivende udvikling — og dermed et fag, som er under konstant forandring — — så er diskussionen af fagets natur og legitimitet foregået i en ret snæver kreds af interesserede matematikere, filosoffer og sprogvidenskabsfolk; den udvikling og erkendelse, som herved er opnået, er det langt fra lykkedes at formidle til hele den matematiske kultur.

Faktisk har en lang række fremtrædende matematikere, gennem hele fagets historie — særlig i de perioder, hvor det har udviklet sig stærkest, dvs. i antikken og i de seneste 2-3 århundreder — forsøgt at nærme sig de spørgsmål, som er skitseret ovenfor. Ikke mindst de grundlagsteoretiske overvejelser, som matematikkens eksplosive udvikling bragte i fokus i de første årtier af dette århundrede, satte disse mere overordnede spørgsmål i et nyt lys. Vi skal her give en meget grov skitse af den udvikling i matematikkens filosofi, som vi mener har fundet sted, på trods af, at synspunkter, som nedenfor vil blive beskrevet som forældede, til stadighed har seriøse tilhængere. Mere udførlige gennemgange findes i litteraturen, fx. Ernest (1992).

Man kan, som et simplificeret resumé af diskussionen i dette århundredes første halvdel, identificere flg. klassiske hovedretninger:

- *Logicismen,* i flg. hvilken matematikkens grundlag er en absolut og almen gyldig logik, som det gælder om at opdage og beskrive så fuldstændigt som muligt (cf. fx. Frege (1967) og Russell (1919)).

- *Formalismen,* i flg. hvilken matematikken er en leg med symboler efter regler (aksiomatiske systemer) vi selv vælger; de matematiske begreber og slutningsregler tillægges ingen almen gyldighed, men gennem den aksiomatiske metode kan man reducere matematikken til kæder af tautologier (cf. fx. Jessen (1945)).

- *Intuitionismen,* i flg. hvilken matematik er ren tankevirksomhed, hvis begreber er mentale konstruktioner, og hvis almene gyldighed kan henføres til den fælles-menneskelige intuition (cf. fx. Brouwer (1952)).

Intuitionismen lider af den svaghed, at store dele af den moderne matematik — specielt moderne analyse — ikke opfylder dens strenge krav til legitime mentale konstruktioner, som fx. udelukker indirekte bevisførelse. Den må altså afskrives som deskriptiv matematikfilosofi, og som preskriptiv filosofi må den i dag betragtes som yderst eksotisk.

Formalismens projekt — at reducere beskrivelsen af al matematik til aksiomatiske systemer — led i teknisk forstand skibbrud med Gödels ufuldstændighedssætninger (Gödel (1931)). Løst formuleret siger de, at

1. et aksiomatisk system, som omfatter de naturlige tal, enten er inkonsistent (dvs. man kan bevise en påstand såvel som dens negation), eller er for svagt til at enhver sand påstand om naturlige tal kan udledes fra aksiomerne,

2. hvis et aksiomatisk system, som omfatter de naturlige tal, er konsistent, så kan dette ikke bevises indenfor systemet.

Det er også et problem, at formalistisk deduktion fra aksiomsystemer ikke er en god beskrivelse af hvordan, eller hvorfor, faget matematik udøves; der er tale om en (for mange formål nyttig) efterrationalisering.

Logicismens projekt er vel det mest ambitiøse, og trods mange uventede vanskeligheder — såsom Russells berømte paradoks (se fx. Russell (1967)) — er problemerne her mere af filosofisk end af teknisk karakter. Når man skal argumentere for, at der findes en forud for menneskelig tankevirksomhed given logik, ender man i en form for mysticisme, der tit betegnes som *platonisme*; det bliver vanskeligt at redegøre for, hvad det matematiske subjekts forhold til den evige, ideelle logik egentlig er, hvordan matematisk viden og erkendelse overhovedet er mulig. Den filosofiske skole, som kan siges at fortsætte denne tradition, synes netop at være kørt fast i forsøget på at løse disse problemer (se fx. Benacerraf (1983)).

De skitserede synspunkter har det til fælles, at de søger at etablere forestillingen om, at matematikken er "absolut sikker", eller i hvert fald kan bibringes et absolut sikkert teoretisk grundlag, som er uafhængigt af den menneskelige individualitet. Det er netop denne forestilling, som de nyeste retninger i matematikkens filosofi — som ofte sammenfattende betegnes *sociale matematikfilosofier* — gør op med. Hovedpointen er her, at matematikken ikke kan betragtes som uafhængig af de sociale sammenhænge, i hvilken den konstrueres — heraf det gængse (og noget forslidte) prædikat *socialkonstruktivisme*. Det nybrud, som først og fremmest Imre Lakatos (Lakatos (1976)), og siden folk som Reuben Hersh (Hersh (1979)) og Paul Ernest (Ernest (1994)) har bibragt disciplinen, består kort sagt i opgivelsen af preskriptive, absolutistiske fordringer til matematikkens grundlag, og i erkendelsen af, at matematikken er menneskabt — er et socialt, intersubjektivt fænomen på linie med fx. litteratur, jura eller musik, omend ligeså forskellig i udtryk fra disse, som disse er det indbyrdes. Med denne erkendelse bliver det matematiske subjekts forhold til fagets genstandsområde ganske uproblematisk. Man kan næsten sige, at det nye matematiksyn er skuffende indlysende — de absolutistiske ambitioner søger simpelthen efter noget, som ikke kan findes. Erkendelsen (eller måske snarere indrømmelsen) af, at matematikken er et produkt af human tankevirksomhed og interaktion, kalder på en mere konkret beskrivelse af, hvad der, trods alt, gør matematikken til en helt speciel menneskelig aktivitet.

Det er på dette trin, at den *lingvistiske model* kommer på banen som den påstand, at matematikken — både som undervisningsfag, og som videnskabelig disciplin — er at beskrive ved sin ganske særlige form for sproglighed, ved det specielle sproglige *register*, som den benytter sig af. Denne ide går helt tilbage til arbejder af Peirce og Wittgenstein, men er særligt blevet en levende del af feltet indenfor de seneste 10-20 år. Bemærk, at et "sprogligt register" her skal forstås i meget vid forstand, nemlig som "menneskeligt udtryksform"; det verbale register (sprog som anvendt i daglig tale, aviser etc.) bliver herved parallelt til fx. det musiske, det matematiske eller det arkitektoniske register.

Udgangspunktet synes igen (forfatteren) umiddelbart indlysende: matematikken betjener sig af et helt specielt sprogligt register[1], udviklet i den matematiske kulturs sprogspil gennem flere tusinde år (og er altså ikke et "kunstsprog" som fx. esperanto): det *matematiske*

[1] Et sprogligt register kan kort defineres som en systematisk brug af sprog i en specifik sammenhæng, som i computerfagsprog eller i poesi. Med vores udvidede sprogbegreb bliver der også tale om registre i ikke-verbal sammenhæng, såsom dans, musik, tøjmode etc. En uddybende beskrivelse af det matematiske register findes i Winsløw (1998b).

register. Man behøver blot at iagttage en tilfældig episode af mundtlig eller skriftlig kommunikation i dette register for at få et indtryk af den særegne blanding af *verbalsprogligt* og *symbolsk* inventar, som udgør dets overfladestruktur; man vil herunder bemærke, at det verbalsproglige inventar spiller en underordnet rolle, der er helt anderledes end i fx. daglig tale, og at det symbolske inventar — formler, diagrammer, geometriske figurer osv. — indtager en central, begrebskonstituerende rolle, som specielt nødvendiggør at mundtlig kommunikation suppleres med skriftlig. Endelig vil man bemærke, at selvom man måtte forstå det anvendte verbalsproglige inventar *i det verbalsproglige register*, så er meddelelser i dette register ligeså uforståelige som tale på et ukendt fremmedsprog, med mindre man kender det anvendte inventars semantik og syntax *i det matematiske register*.

Det matematiske register nødvendiggøres af, at verbalsproget ikke kan give præcis og utvetydig beskrivelse af vore almenmenneskelige (og i et vist omfang omverdensbestemte) forestillinger om kvantitet og form. Ligesom i ethvert andet sprogligt register bliver de gloser, der i første omgang opstod som udtryk for noget meget konkret, konstituerende for nye og mere abstrakte begrebslandskaber. Et eksempel: antal, højder, priser etc. udtrykkes i det matematiske register ved tal; abstrakte tal og deres syntax (kompositionsregler) er den elementære sproglige konstituent for den matematiske disciplin algebra. Den nye tegnverden, som herved skabes, er ikke bundet til sit konkrete ophav. I en semiotisk beskrivelse (cf. Rotman (1988)) er et iøjnefaldende særtræk ved den matematiske tegnverden netop, at matematiske tegn kun refererer til andre matematiske tegn — de kan ikke referere til eksterne objekter.

Samtidig med denne formelle lukkethed er matematikken i sit væsen *kommunikativ*, idet den som nævnt muliggør artikulation af kvantitative og geometriske begreber, som kun kan beskrives vagt og flertydigt i andre registre (såsom det verbale). Matematisk modellering består kort sagt i at fortolke et stykke af vor sociale eller fysiske virkelighed ind i det matematiske register, og så behandle det resulterende matematiske problem heri, uden eksterne referencer eller anden "støj". I det omfang den nævnte fortolkning er fornuftig (og det må altid betvivles!), kan denne proces føre til afgørende indsigt, som ellers ikke var mulig. Denne teknik udnyttes i rigt omfang af såvel naturvidenskaberne som en række tekniske og samfundsvidenskabelige discipliner (se fx. Davis (1986)).

Det er ved at fokusere på analysen af matematikfagets kommunikative egenskaber at vi kan komme videre fra erkendelsen af, at matematik i bund og grund er et socio-kulturelt produkt. Vi skal i resten af artiklen skitsere modellens anvendelse, eller måske rettere nogle mulige anvendelser af modellen, på to grundlæggende matematik-didaktiske spørgsmål.

Hvorfor matematik?

Matematik indtager en central rolle i alle udviklede landes uddannelsessystemer. Der undervises i faget fra skolens tidligste trin, og i de almene skoleforløb set under et er matematik blandt de to-tre fag, der tildeles mest tid. Samtidig er det almindelig kendt, at matematik er vanskeligt at lære, og dette giver jævntligt anledning til offentlige diskussioner af, hvordan indlæringen kan forbedres. Det legitime i fagets dominans indenfor de almene uddannelser drages derimod sjældent i tvivl, på trods af at de fleste mennesker faktisk aldrig får konkret brug for matematiske færdigheder udover elementær regnefærdighed og talforståelse (se fx. Fitzgerald (1985)).

En analyse af matematikfagets berettigelse er påkrævet af flere grunde. Matematikkens rolle i samfundet, såvel som matematikken selv, har undergået en fantastisk udvikling og ekspansion i dette århundrede (se fx. Davis (1986) og Kline (1972)). Et andet aspekt er computerens udbredelse og overtagelse af en lang række af de beregnings- og analysefunktioner, som tidligere kunne legitimere undervisningen i matematik (se fx. Kemeny (1988)). Det er således nødvendigt at indkredse, om, og i hvilken forstand, undervisning i matematik — udover elementær regnefærdighed og talfornemmelse — er ønskelig for alle.

Vor (kortfattede) analyse af det matematiske register, sidst i det forgående afsnit, peger på en lang række begrundelser. For det første sætter det matematiske register os i stand til at udtrykke nogle almenmenneskelige forestillinger; det er i den forstand en ligeså naturlig ting at lære som det verbale register, selvom det (i hvert fald på de indledende trin) kræver et mere bevidst og målrettet læringsarbejde at tilegne sig det matematisk register end det verbale. Den almenmenneskelige erfaring opnås ikke kun gennem elementære aritmetik; det matematiske registers indskrænkning til intern reference gør det nemlig *internationalt* og *interkulturelt* i en forstand som verbale registre oplagt ikke er, og muliggør således menneskelig kommunikation og samvirke på tværs af kulturelle og nationale skel. Et blik på matematikkens historie demonstrerer tydeligt denne pointe; i det omfang, undervisningen i det matematiske register kan demonstrere dets potentiale for "støjfri" menneskelig interaktion, har man her et væsentligt argument for post-elementær matematikundervisning.

Det er klart, at fraværet af indirekte og upræcise referencer i matematiske tekster indskrænker dets udtryksmuligheder betydeligt; man kan fx. ikke udtrykke meninger eller følelser i matematiske termer. Erfaringen af disse grænser fordrer selvsagt et bredt kendskab til dets inventar, og er endnu et væsentligt argument for at et sådant kendskab er ønskeligt, fordi man i den offentlige debat ofte inddrager matematiske modeller i argumentationen for rent politiske synspunkter (se fx. Nissen (1994)).

Dette er naturligvis legitimt sålænge man vedstår, at kun en del af argumentet foregår i det (støjfri) matematiske register, og at denne del i sig selv ikke kan godtgøre politiske synspunkter. Det er i "oversættelsen", fortolkningen, af fx. en økonomisk problemstilling, at kritikken må sættes ind, hvilket er en umulig opgave, hvis man ikke behersker de anvendte dele (og gerne mulige alternativer!) af det matematiske register. Rationel modelkritisk skepsis forudsætter i hvert fald, at man har kendskab til ikke-trivielle eksempler på matematisk modellering, hvilket igen forudsætter kendskab til større afsnit af det matematiske register. Da store dele af den moderne teknologiske kultur bygger på matematiske modeller og tankegange, bliver beherskelse af det matematiske register en afgørende nøgle til at orientere sig i den kulturskabte omverden. En sådan orienteringsevne må ikke forholdes den almindelige borger i et åbent, demokratisk samfund.

Også i forhold til vor naturskabte omverden har det matematiske register vist sig at være en hovedvej til indsigt. Når mennesket i dag er i stand til at udnytte, kontrollere og også ofte forkludre naturens mest indviklede processer, er det ikke mindst i kraft af, at vi er blevet i stand til at beskrive disse processer vha. det matematiske register. Man kan måske undre sig over, at naturens processer i så høj grad lader sig beskrive — og forudsige — vha. en social konstruktion som matematik, men som Hersh (1979) så udmærket formulerer det:

> *our mathematical ideas fit the world for the same reason that our lungs are suited for the atmosphere of this planet. (s.45).*

(vore matematiske ideer passer på verden af samme grund som vore lunger egner sig til denne planets atmosfære). Naturens fysiske aspekter lader sig i så høj grad fortolke i den abstrakte matematiske tegnverden fordi denne som udgangspunkt har menneskets behov for en sådan fortolkning. Dette elementære behov berettiger almen uddannelse i matematisk sprogfærdighed til så højt et niveau som man — skoleverdenens rammer og andre faglige behov taget i betragtning — kan opnå, og peger (sammen med de øvrige argumenter) videre mod det sidste spørgsmål, vi skal berøre her: Hvordan udvikles matematisk sprogfærdighed?

Hvordan matematik?

Vi har set, hvordan fagets videnskabsteori i stigende grad betragter matematikken som en social konstruktion, og dermed forlader forestillingen om matematikken som noget uforanderligt eller eviggyldigt, som lever sit eget liv uafhængigt af de mennesker, der søger at "afdække" det. Mere specifikt har vi beskrevet faget vha. dets sproglige register, og argumenteret for det moderne menneskes behov for at kunne både forme og forstå meddelelser i dette register.

Vi beskrev i indledningen den traditionelle matematikundervisnings mål som tilegnelse af et givet sæt begreber og færdigheder; en stor del af vor skole- og gymnasietids matematikundervisning gik jo faktisk med at træne meget konkrete færdigheder, såsom multiplikation, division, procentregning, løsning af ligninger, integration og funktionsundersøgelse. Der fokuseredes i vidt omfang på *metoder*, der skulle anvendes på tilsvarende *typeopgaver*.

Den oplagte fremmedsprogspædagogiske analog til dette er indlæring af visse standardsætninger, som er anvendelige i visse situationer (*'Hvad koster den'*, *'Jeg elsker dig'*, etc.). Ligesom de standardiserede matematiske løsningsstrategier, kan et sådant inventar af standardsætninger naturligvis være have en vis nytte — men ingen ville drømme om at lade den almene fremmedsprogsundervisning forme sig som slet og ret en progressiv udvidelse af et sådant inventar. Kritisk litteraturlæsning, kulturforståelse, sproghistorie og træning i egen "fri" udtryksfærdighed bliver hurtigt vigtige og integrerede dele af undervisningen.

På samme måde må matematikundervisningen komme udover "parlør"-stadiet, og — sideløbende med den rent sproglige inventarudvidelse — fokusere på modellering og modelkritik, indleven i den matematiske kultur og dens historie samt udvikling af de lærendes egen kreativitet i brug af det matematiske register. En stor del af det møjsommelige (og rutineprægede) arbejde, som de konkrete færdigheder i matematik tidligere fordrede, er i dag overflødiggjort af computere. Computerteknologiens nye værktøjer til symbolsk manipulation og grafisk repræsentation muliggør i langt højere grad end tidligere, at de lærende kan *eksperimentere* med, og *afprøve*, deres matematiske ideer. Argumentation — der indenfor det matematiske register også kaldes *bevisførelse* — kan på denne måde gøres til en kreativ aktivitet i læringsprocessen, der illustrerer matematikkens konstruktive side i langt højere grad end den traditionelle docering af standardbeviser.

Denne proces skal naturligvis, ligesom verbalsprog-indlæring, foregå under lærervejledning, der skelner mellem individuel forståelse og misforståelse.

Det er af afgørende betydning, at den lærende ikke "fremmedgøres" i forhold til det lukkede matematiske register — at der til stadighed arbejdes på at skabe situationer, hvor den lærende oplever at have øget sine evner til at udtrykke sig i registeret, og erfarer at disse evner sætter ham[2] i stand til at fortolke sin omverden. Matematik har en lang og sørgelig tradition som "hadefag", som et fag, der for mange elever synes utilnærmeligt, virkelighedsfjernt, autoritært og uengagerende (se Nissen (1994) for et prominent udtryk herfor). Fremmedsprogsindlæring som udenadslære af grammatiske remser kan i øvrigt virke på samme måde. Alt for mange får ikke et billede af matematik som det kreative, kommunikative fag det faktisk er; det er den matematiske sprogformidlers fornemste opgave at hjælpe de lærende til at danne sig dette billede på et så kvalificeret niveau som muligt.

Når matematiklæreren altså skal være sprogformidler, må han tage udgangspunkt i de lærendes sproglige forudsætninger i videste forstand. Der må tages bestik af de lærendes sociokulturelle baggrund, deres alder, udviklingstrin, interesser, erfaringer etc.; stof- og metodevalg må baseres på, at disse faktorer observeres i den fortløbende dialog med de lærende. Leg med geometriske figurer kunne fx. tænkes at motivere mindre børn bedre end teenagere, som ofte vil glæde sig over den indsigt i tekniske eller samfundsmæssige fænomener, en simpel matematisk model kan give. Ligesom under indlæring af verbalsprog er det afgørende, at læreren søger at indleve sig i de lærendes aktuelle standpunkt på alle de nævnte områder; det er ikke nok, at nyt matematisk inventar hænger logisk sammen med det kendte. Udvikling af elevens sprogverden betyder udvikling af hans begrebsverden og livssyn, og læreren kan derfor ikke — som da opgaven var transmission af en given overlevering — undlade at engagere såvel elevens som sin egen personlige sproglighed.

Man kan betragte dette projekt som en videreudvikling af såvel Bishops ideer om matematisk dannelse som den forskningstradition, (Bishop 1988), der interesserer sig for specielt verbalsprogets rolle i den konkrete undervisningssituationer (cf. fx. Pimm (1987)). Dannelse forudsætter nemlig sproglig kompetence, og det matematiske register skal sætte den lærende i stand til at skabe forestillinger og forklaringer som — i samvirke med de forestillinger, som skabes af sprogspil i andre registre — muliggør at han kan orientere sig i en stadig mere kompleks omverden.

Lad os afslutningsvist pege på et i nordisk sammenhæng væsentligt aspekt af dette projekt: udformningen af det verbalsproglige inventar i det matematiske register. I betragtning af, at dette register i voksende

[2] Det neutrale pronomen er på dansk *han*, og anvendes altså uden reference til specifikt køn.

omfang er det bærende medium for teknisk-videnskabelig diskurs, er der grund til at interessere sig for betydningen af, at matematisk terminologi forefindes og indlæres på modersmålene såvel som på hovedsprogene (specielt engelsk, men også gerne fransk og tysk). Fra en overordnet synsvinkel kan man i hvert fald sige, at den tendens der — ikke mindst i dansk sammenhæng — er til nødtørftig eller helt fraværende oversættelse af matematisk terminologi til modersmålet, medvirker til at gøre dette til et "andenrangs" sprog. Matematikkens formidlere må også her være bevidste om deres rolle i udvikling af sproglig identitet.

Litteraturliste.

Benacerraf, P. (1983). *Philosophy of mathematics.* Cambridge University Press.

Bishop, A. (1988). *Mathematical enculturation.* Kluwer Dordrecht.

Brouwer, L. (1952). Historical background, principles and methods of intuitionism. *South African Journal of Science* **49**, 139-146.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1986). *Descartes' dream.* Penguin books London.

Ernest, P. (1992). The nature of mathematics: towards a social constructivist account. *Science and Education* **1**, 89-100.

Ernest, P. (1994). *Mathematics, education and philosophy: an international perspective.* The Falmer Press London.

Fitzgerald, A. (1985). *New technology and mathematics in employment: the main report.* University of Birmingham.

Frege, G. (1967). The thought: a logical enquiry. I P.Strawson, *Philosophical logic.* Oxford University Press.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und Vervandter Systeme. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **38**, 173- 198.

Hersh, R. (1979). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. *Advances in Mathematics* **31**, 31-50.

Hilbert, D. & Bernays, P. (1934). *Grundlagen der Mathematik, I*, Springer, Berlin.

Jessen, B. (1945). Den aksiomatiske metode. *Matematisk Tidskrift* A, 37-47.

Kemeny, J. (1988). How computers have changed the way I teach. I AMS-MAA, *Joint lecture series.* Atlanta, Georgia, USA.

Kline, M. (1972). *Mathematics in western culture.* Pelican London.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge University Press.

Nissen, G. (1994). Matematikundervisning i en demokratisk kultur. I M. Blomhøj et al. (Eds). *Hul i kulturen.* Spektrum København.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*, Kegan Paul, London.

Rotman, B. (1988). *Toward a semiotics of mathematics*, Semiotica **72**, 1-35.

Russell, B. (1919). *Introduction to mathematical philosophy.* George Alwin and Unwin Ltd. London.

Russell, B. (1967). *The autobiography of Bertrand Russell.* George Alwin and Unwin Ltd. London.

Skemp, R. (1982). Communicating mathematics: Surface Structures and Deep Structures. I *Visible language* XVI **3**, 281-288.

Thomassen, N. (1981). Dannelse og ideologikritik eller om humaniora og humanisme. I C. Bengt-Pedersen m.fl., *Studier i filosofi*. Odense Universitetsforlag.

Tymoczko, T. (1986). *New directions in the philosphy of mathematics*. Birkhauser, Boston.

Winsløw, C. (1998). A linguistic approach to the justification problem in mathematics education. *For the learning of mathematics*, **18**(1) 17-23.

Winsløw, C. (1998). *On the role of transformations in mathematical discourse*. Fortryk.

Abstract.

Starting from classical and more recent positions and basic problems from the philosophy of mathematics, we scetch an account of mathematics as a communicative phenomenon based on a linguistic viewpoint, identifying the use of a mathematical register as characteristic for mathematical communication as opposed to other sorts of communication. We then discuss the consequences of this account for two central problems in mathematics education:
1) the justification problem: how can the (currently rather dominant) role of mathematics in general education be justified?
2) the implementation problem: how can the teaching of mathematics be devised so as to enable the learner to develop creative rather than automatic compentency in mathematics and its applications?

Author

Carl Winsløw is a lecturer at the Department of Mathematics of the Royal Danish School of Educational Studies.
Research interests:
Mathematical analysis (especially von Neumann algebra theory), mathematics education and philosophy (especially linguistic aspects).

Address

The Department of Mathematics of the Royal Danish School of Educational Studies, Emdrupvej 115B, 2400 Copenhagen NV, Denmark.