Hva er en vinkel?

Veslemøy Johnsen

Det har vært gjort mange undersøkelser om elevers utvikling av matematiske begreper. Hensikten med denne artikkelen er å beskrive elevers utvikling av vinkelbegrepet i en bestemt klasse. Vinkler kan oppfattes dynamisk som rotasjoner, statisk som stråler eller de kan analyseres ved måling.

Forskning viser at elever har begrepsmessige problemer med å oppfatte vinkler der ingen av vinkelbeina er orientert horisontalt, sammenlikne vinkler med samme måltall, men med ulik lengde på vinkelbeina, oppfatte vinkler som er større enn 180 grader, og at de har enda større problemer med å oppfatte en vinkel på 180 grader.

Undervisningen som vi observerte, viste at læreren la vekt på elevenes egen utforsking og at samspillet mellom dynamiske og statiske erfaringer med vinkler var grunnlaget for begrepslæringen. Læreren fokuserte på de vanskelige vinklene (0, 180 og 360 grader), på hvor stor en vinkel kan bli og på hvor mange vinkler vi kan finne.

Elevene arbeidet også med hvilken vinkel som skal måles (v eller 360° – v), når vinkelen er større enn 180 grader. Elevene hadde problemer med det statiske perspektivet på vinkler, med måling av vinkler, og med vinkler større enn 180 grader - særlig når konteksten ikke var praktisk. Men det var få elever som hadde problemer med å gjenkjenne vinkler med forskjellig orientering eller å sammenlikne vinkler med ulik lengde påvinkelbeina.

Forord

I løpet av de siste par tiår har elevers begrepsutvikling innenfor ulike deler av matematikken blitt gjenstand for omfattende undersøkelser. Et eksempel på oppfølging av Piagets banebrytende arbeid er CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science), se Hart (1981). Her undersøkes begrepsutviklingen innenfor måling, talloperasjoner, plassverdi og desimaler, brøker, positive og negative tall, forhold, algebra, grafer, speiling og rotasjon samt vektorer og matriser. Vi vil følge denne typen forskning ved å se på vinkelbegrepet og hvilke oppfatninger barn kan ha om vinkler.

Spesielt vil vi se på hvordan begrepene kommer til syne, bevisstgjøres og utvikles gjennom diskusjoner i et klasserom. Dette er dynamiske aspekt som vanskelig fanges opp ved kvantitative tester, men som vi ved nøye observasjoner kan analysere.

***Veslemøy Johnsen** er ansatt som høgskolelærer ved Høgskolen i Agder, Kristiansand, Norge, og holder på med å avslutte hovedfag (mai 1996) i matematikkdidaktikk innenfor begrepsutvikling i geometri og bruk av Cabri geometri.*

Hoveddelen av artikkelen omhandler klasseromsobservasjoner. Vi observerte en 6. klasse i fem timer, tre delingstimer og to timer i full klasse og valgte ut de delene av timene som behandlet vinkelbegrepet eksplisitt. Bortsett fra den første observasjonen, ble de andre timene tatt opp på lydbånd, analysert og skrevet ned. Vi har i eksemplene her foretatt noen mindre normaliseringer av dialektbruk, for eksempel. når det gjelder personlige pronomen, erstattes "han" med "den" når det ikke refereres til personer. Ingen av disse normaliseringene berører det matematiske innholdet. Vi betegner alle elevene med "elev", og skriver "elev" på nytt, når det er en ny elev som sier noe. Vi hadde ikke anledning til å observere oppsummeringstimene. I stedet fikk vi et skriftlig referat fra læreren. Læreren ble også intervjuet. Vi vil gi et kort referat og en analyse av de delene av intervjuet med læreren som er direkte knyttet til artikkelens innhold. Hensikten med intervjuet er å finne ut hva læreren mener og tenker om matematikkfagets innhold, undervisning og læring og hvordan dette kommer til syne i den praktiske situasjonen.

Vi sammenholder våre observasjoner med tidligere forskning. Til slutt prøver vi å bruke våre observasjoner til å besvare noen av spørsmålene som stilles i innledningen.

1 Innledning

1.1 Vinkelbegrepet

Vinkler må betraktes som et begrepsmessig ytterst vanskelig emne – både i innledende og videregående undervisning. Dette gjelder uansett om det er snakk om vinkler mellom kurver, plan eller "bare" mellom linjer eller stråler.

Matematisk kan en vinkel i planet defineres på flere måter bl. a. slik som det er gjort av James & James (1976):

- En *geometrisk vinkel* er en mengde av punkt som består av et punkt P og to stråler som går ut fra P.
- Når de to strålene ikke faller sammen eller er motsatt rettet, utgjør punktene mellom strålene det *indre* av vinkelen eller *vinkelområdet.*
- *Måltallet* til en vinkel defineres slik at 360 grader svarer til en omdreining langs sirkelen.
- En *rotasjonsvinkel* består av en *rettet* vinkel og et positivt eller negativt måltall knyttet til vinkelen. Vanligvis betyr *vinkel* rotasjonsvinkel.

I motsetning til James & James behandler Post (1992) vinkelbegrepet didaktisk ut fra tre forskjellige hovedperspektiver. Disse passer med vårt angrepspunkt i denne artikkelen:

- Rotasjoner eller vridninger er naturlig for yngre barn, og disse tidlige erfaringene barna har, kan brukes som utgangspunkt for arbeidet med vinkler. Denne dynamiske måten å se vinkler på, må starte tidlig og vedvare gjennom hele skoletiden.
- Faste figurer henviser til barns erfaringer med hjørner på bygninger, møbler, skråninger, trapper og til og med skispor. Denne statiske måten å se vinkler på (hvor en vinkel oppfattes som to stråler som går ut fra et punkt) er mindre naturlig, men det er på denne måten de fleste lærebøker framstiller vinkelbegrepet.
- Å måle er kanskje den mest unaturlige måten for barn å arbeide med vinkler på, og den som forårsaker flest problemer. Vanligvis brukes en gradskive – og den brukes ofte feil – til å måle vinkler som statiske objekter. Det forventes av elevene at de skal kunne klassifisere vinklene i henhold til målinger, som spisse, stumpe og rette vinkler, også noen ganger som like vinkler.

Disse tre perspektivene gir utgangspunkt for våre spørsmål: Hvordan utvikles barns vinkelbegrep i en bestemt undervisningskontekst – som vektlegger elevenes aktive begrepsdannelse og egen utforsking og oppdagelse? Hvilke misoppfatninger kan oppstå? Skyldes disse misoppfatningene undervisningen elevene har fått, eller er det erfaringer fra dagliglivet? Hvilke konsekvenser får det at elevene til vanlig har erfaringer med vinkler i rommet, mens skolens geometri tar opp vinkler i planet? Hvilke irrelevante egenskaper kan ligge i barns vinkelbegrep?

Kan undervisningen legges slik opp at misoppfatninger oppdages, og at elevene får anledning til å utvikle et sikkert vinkelbegrep?

Vi vil gjøre nøyaktige observasjoner, analysere dem, intervjue læreren og se dette på bakgrunn av annen forskning. Vil vi finne de samme utviklingstrekk som andre har påvist?

2 Annen relevant forskning

Greenes (1979) peker på at når en geometrisk figur forandrer posisjon, så tror barn ofte at figurenes egenskaper (form, størrelse) forandrer seg også. Han gir som eksempel en elev (9 år) som blir konfrontert med tre trekanter, der den ene er skrått orientert. Eleven sier at denne figuren ikke er noen trekant fordi den "faller over".

Likeledes argumenterer Kerslake (1979) i en undersøkelse som involverer barn fra 5 til 11 år, med at den vanlige måten å presentere figurer på i undervisning, er at "grunnlinja" i figuren er orientert horisontalt i forhold til arket. Det er vanskelig for barn å generalisere begreper som rett vinkel, trekant, kvadrat, parallelle linjer, o.l., hvis de aldri ser figurer som er orientert på en annen måte. Eleven knytter altså irrelevante egenskaper til et objekt.

Kent (1978) gir et eksempel på en gutt som hadde misoppfattet vinkelbegrepet. Dette ble ikke oppdaget før han fikk problemer med derivasjon og trigonometriske funksjoner. Læreren skulle demonstrere en vinkel større enn 360° ved å tegne spiral. "Hvor er linjene?" spurte Richard. "Hva mener du?" "Til vinkelen." Forskeren forsto ikke hva Richard mente, og Richard forklarte at en vinkel er *avstanden mellom to linjer*. For Richard var ikke to vinkler med ulik lengde på beina like store, selv om de har samme måltall.

Post (1992) anbefaler at elevene skal få erfaringer med rotasjoner og vridninger, og at de bør tegne de figurene de roterer. Til slutt bør elevene bruke gradskive for å måle vinklene og rotasjonene som de lager. På denne måten kan elevene knytte sammen alle tre sidene ved vinkelbegrepet, og det dynamiske perspektivet blir ikke utelatt.

Cope & Simmons (1990) undersøker hvordan bruk av Logo påvirker elevers (9 - 12 år) grunnleggende vinkelbegrep. I Logo styres en peker ved å oppgi gradtallet for den *ytre* vinkelen når pekeren skal forandre retning. Det vil si at hvis en elev for eksempel skal tegne en likesidet trekant, må han gi kommandoen "høyre" ("eller venstre") 120, mens vinklene i trekanten jo er 60°. Dette fører til at noen av elevene blir forvirret, og får uklare begreper om vinkler og vinklers størrelse.

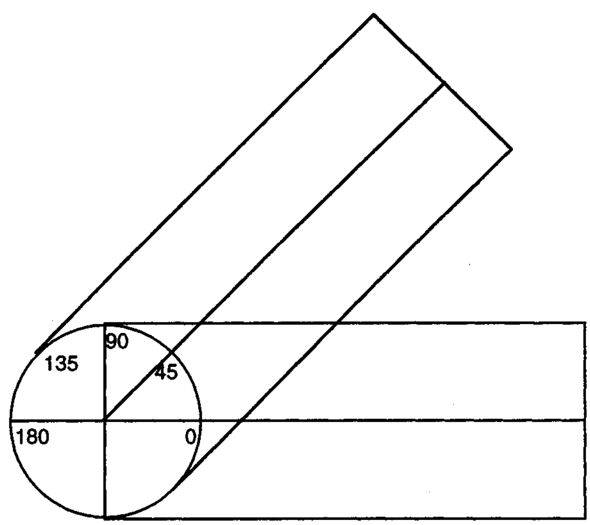
Magina & Hoyles (1991) kartlegger vinkelbegrepet hos elever fra 6 til 15 år. Disse forskerne har et konstruktivistisk utgangspunkt og ønsker å undersøke

- Hvordan konstruerer barn sitt vinkelbegrep?
- Hvilken mening legger barn i vinkelbegrepet innenfor forskjellige læringsmiljø?
- Hvordan påvirker omgivelsene barns oppfatning av vinkelbegrepet?

I en av oppgavene (som tester læringsmiljøets betydning) skal elevene "kjøre bil" i Mini City eller flytte pekeren i Logo. Her har elevene størst problemer med vinkler mindre enn 90 grader. Dette står i motsetning til tidligere undersøkelser med papir og blyant (for eksempel Close, 1982) som finner at barn har mindre problemer med spisse vinkler enn med vinkler større enn 180 grader. Magina & Hoyles gir en forklaring basert på "figur versus bakgrunn". På papiret er det vanskeligere å "se" en vinkel v som er større enn 180 grader, fordi v da kan oppfattes som bakgrunnen til $360^\circ - v$. Når det gjelder mer konkrete sammenhenger som bilkjøring og Logo, så er det vridningen som er i fokus. Elevene gjør det bedre med Logo enn med papir og blyant på alle oppgavene. To forklaringer foreslås her: Logo-oppgavene kommer etter oppgavene med papir og blyant, og elevene kan derfor ha lært noe. Og de utvikler begrepet mens de samhandler med Logo.

Betydningen av presentasjonsformen testes også. Elevene skal finne like store vinkler. De fleste elevene fra 4. klasse og oppover løser denne oppgaven når vinkelbeina er like lange, selv om de er orientert forskjellig. Når lengden på vinkelbeina varierer, har de engelske elevene størst problemer med denne oppgaven, mens de brasilianske ikke har de samme problemene. Dette gjelder både med papir og blyant og med Logo. Her bemerkes det at vinklene blir presentert forskjellig: ved siden av hverandre i England og den ene inne i den andre i Brasil (Magina & Hoyles, 1991).

Rubenstein m. fl. (1993) arbeider med et prosjekt, "Empowering students through connections", ved Michigan State University som går på å utvikle materiell for klasse 6 - 8. Dette prosjektet beskriver hvordan vinkelbegrepet kan bygges opp ved hjelp av sammenheng med andre områder i matematikken; rasjonale tall, sirkler og areal, koordinater, tallteori, mønster og funksjoner. Det konkrete materiellet som er utgangspunktet, er sjabloner av ulike figurer som regulær trekant og sekskant, rombe, parallellogram, trapes og kvadrat. Dessuten har de utviklet et måleredskap som kalles et *goniometer*, se figur, som brukes i stedet for gradskive. Disse forskerne hevder at dette måleredskapet egner seg bedre enn vanlig gradskive. For eksempel når åpningen er 30 grader, kan elevene se at de to "armene" danner en vinkel på 30 grader med hverandre. Elevene kan også tegne en 30 graders vinkel direkte ved å tegne langs innsiden av



Figur 1. Goniometer

"armene". Ved at goniometeret beveger seg, illustreres den dynamiske siden av vinkelbegrepet.

Ved hjelp av forskjellige aktiviteter skal elevene bli svært godt kjent med 30, 60, 90, 120 og 150 graders vinklene, og bruke disse som utgangspunkt for å bedømme størrelsen på andre vinkler. Forskerne anbefaler også at elevene skal arbeide med vinkelsummene i de forskjellige polygonene for eventuelt å komme fram til en formel for vinkelsummen i en n-kant og for vinkelen i en regulær n-kant. Her anbefaler de videre at elevene skal komme fram til at denne vinkelen ikke kan overskride 180 grader, og at dette kan være én innfallsport til begrepet *grense*. Elevene bør også kjenne til mulige årsaker til hvorfor babylonerne innførte at en sirkel deles i 360 grader.

Vi vil også se litt på beskrivelser av mere generelle arbeidsmåter som kan være relevante i forhold til våre observasjoner.

Lampert (1990) beskriver et forsknings- og utviklingsprosjekt som undersøker om det er mulig å bringe skolematematikken og matematisk forskningsmiljø nærmere sammen og på hvilken måte dette eventuelt kan foregå. I dette forsøket endres rollene til lærer og elever. For å endre oppfatningen av hva det vil si "å vite" og "å kunne" i skolesituasjonen, tar læreren initiativet til og oppfordrer til diskusjon med utgangspunkt i elevenes hypoteser og påstander. Lampert henviser til Lakatos (1976) som mener at matematikk utvikler seg gjennom en prosess med formulering av hypoteser om sammenhenger mellom størrelser og former. Bevis utvikles gjennom en sikksakkprosedyre som går mellom hypoteser, undersøkelser av forutsetninger og moteksempler. Produktet av den matematiske aktiviteten kan bekreftes ved et deduktivt bevis, men dette produktet viser ikke prosessen elevene har gjennomgått for å tilegne seg den aktuelle kunnskapen.

Schoenfeld (1992) definerer begrepet *enculturation* som det å komme inn i og oppfatte verdiene i en spesiell kultur. Dette betyr at perspektiv og synspunkt er sentralt i kunnskapsbegrepet. Han peker videre på verdien av å tenke matematisk, det vil si å se verden slik matematikere gjør. Han sier dette slik (p. 344, min oversættelse:

> "Jeg husker at jeg diskuterte med noen kolleger, tidlig i vår karriere, hva det vil si å være matematiker. Til tross for individuelle forskjeller, hadde vi alle utviklet hva vi kan kalle et matematisk synspunkt, en bestemt måte å tenke om matematikk på, hvilken verdi dette har, hvordan det blir gjort etc. Det som vi hadde oppfanget, var mye mer enn et sett med ferdigheter; det var en måte å se verden og vårt arbeide på. Vi innså at vi hadde gått gjennom en tilpasning til et kulturfellesskap som vi var blitt medlemmer av og hadde akseptert verdiene til. Som et resul-

tat av en lang læretid i matematikk, hadde vi blitt matematikere i videste forstand, i syn på verden så vel som ved vår yrkesbetegnelse."

Med bakgrunn i andres forskningsresultater ønsker vi å se nærmere på utviklingen av vinkelbegrepet i en bestemt klasse.

3 Egne observasjoner

3.1 Skolen

Skolen der vi observerer, er en privatskole med elever fra 1. til 9. klassetrinn, i regi av en menighet. Den har mange entusiastiske lærere, og lærerne kjenner de fleste foreldrene også utenom skolesammenheng. Ressursene her er nok noe større enn det som er vanlig i norsk grunnskole. Blant annet er skolen godt utstyrt med datamaskiner.

3.2 Klassen

Det er 24 elever (ca. 12 år) i klassen, 13 gutter og 11 jenter. To elever som ikke har utbytte av den vanlige matematikkundervisningen, er ute av klassen de fleste timene. Det er ellers en jevn fordeling av elever på ulike prestasjonsnivå i klassen. Av praktiske årsaker er klassen delt slik at guttene og jentene har en time adskilt hver uke. Klassen er med i et forskningsprosjekt ("Datamaskiner og forståelse i matematikk. En undersøkelse om undervisning av desimaltall.") og er derfor vant til å ha andre personer inne i klasserommet som observerer. Det virker heller ikke som om noen av elevene lar seg affisere av lydbåndopptakeren, selv om vi plasserer den midt foran dem. Protokollene fra timene ble da også på nærmere 50 sider.

3.3 Timene

Vi går inn i geometriundervisningen der læreren starter med temaet vinkler.

Observasjon 1, delingstime, guttegruppa:

Lærer: Hvis du skal skyte et veldig fint mål, hvor vil du plassere ballen (tegner et fotballmål på tavla)?
Elev: I vinkelen.
Lærer: Hvorfor heter det det?
Elev: Fordi det går sånn (tegner en rett vinkel på tavla).
Lærer: Hva er en vinkel?
Elev: 90 grader.
Elev: Det behøver det ikke være.

(Etter denne åpningen følger en diskusjon om en *vinkel* nødvendigvis må være *rett*. De fleste elevene mener at en vinkel må være 90°. Ved siden av tavla henger et brett med blant annet en 30-60-90 graders vinkelhake. En elev tar denne og tegner en 60 graders vinkel på tavla. Klassen blir etter hvert enige om at dette også må kalles for en vinkel, og at denne vinkelen er *mindre* enn en rett vinkel. En elev vet også at denne vinkelen kalles for en *spiss* vinkel.)

Læreren har her funnet et konkret utgangspunkt. Hvor finner vi vinkler i guttenes verden? Det er også interessant å se at i utgangspunktet er det mange som mener at vinkel er synonym med rett vinkel. Kanskje det skyldes erfaringer fra forming eller husbygging der det ofte snakkes om at noe må være "i vinkel"?

Lærer: Går det an å lage vinkler som er *større*? Kom og tegn.
Elev: Vi kan legge den ut så det blir en butt vinkel (en elev tegner en stump vinkel på tavla).
(En side ved vinkelbegrepet kommer fram når læreren spør hvor mange forskjellige vinkler som fins. En elev svarer "uendelig" og begrunner det med at vi kan ha 90 grader, 90,1 grader, 90,11 grader, 90,111 grader og så videre. Noen av elevene er enige med han, mens andre ser uforstående ut.)

Elevene har arbeidet mye med desimaltallbegrepet. Det kan tyde på at noen av elevene kobler at siden vi kan finne uendelig mange tall mellom to hele tall, kan vi også finne uendelig mange vinkler, ved å se på en vinkels måltall.

(Begrepene spiss, rett og stump vinkel klargjøres. Elevene gjør oppgaver i læreboka. De kan bruke gradskive for å avgjøre om vinkelen er spiss, rett eller stump. En av oppgavene i læreboka er utformet slik at vinkelbeina på figuren ikke er tegnet lange nok til å nå fram til tallene på gradskiva. Flere av elevene har problemer med å forstå at de kan forlenge vinkelbeina og likevel beholde vinkelens måltall.)

Elever som ikke forstår at de kan forlenge vinkelbeina for "å rekke fram til" målene på en gradskive, har et vinkelbegrep knyttet til lengden på vinkelbeina. De tror vi ikke kan måle vinkler med "for korte" vinkelbein.

(En annen av oppgavene går på at elevene skal sammenligne to vinkler og finne ut hvilken som er størst.)
Elev: Hvordan størst eller minst? Er ikke 90 grader størst?
Lærer: Er det ingen som er større? Hvor stor kan en vinkel bli?
Elev: 360
Elev: Det er helt rundt.
Elev: 180
Elev: Da går den tilbake og begynner på nytt igjen.

(Elevene diskuterer og vil at læreren skal svare dem på spørsmålet om hvilken vinkel som er størst. Men han ber i stedet elevene om å tenke på dette problemet til neste gang.)

Læreren ønsker her at elevene skal tenke grundig gjennom spørsmålet. De må finne argumenter for sitt syn. Ved å la spørsmålet stå ubesvart til neste time får de god tid på seg. De ser at i matematikk er deres egne hypoteser og deres egen argumentasjon viktig, slik også for eksempel Lampert (1990) og Lakatos (1976) understreker.

Observasjon 2, delingstime jentegruppa

(I jentegruppa skjer undervisningen på en annen måte.)

Lærer: Vi skal se på noe som heter vinkler, og det håper jeg dere husker litt av i hvert fall. Dere har fått utlevert en spesiell linjal. Vet dere hva vi kaller den?
Elev: Gradskive.
Lærer: Eller vinkelskive. Den bruker vi til å måle vinkler med, men før vi kan begynne med det, så må vi jo vite hva en vinkel er. Kari og alle dere andre forsøk å skrive noen ord i boka deres om hva en vinkel er. Du kan også prøve å tegne en vinkel.
(Læreren skriver på tavla: "Hva er en vinkel?", "Tegn en vinkel.", "Finn vinkler i klasserommet".)

(Elevene diskuterer:)
Elev: Det må være noe rett.
Elev: En vinkel er ikke det to linjer som aldri møtes?
Elev: 90 grader.
Lærer: Er det noen som har lyst til å si hva en vinkel er?
Vivi: To linjer som aldri møtes.
Lærer: Vi kaller det for *Vivis teorem*. Matematikerne kaller det ofte for setninger eller teoremer når de finner opp noe. Så vi kaller dette for Vivis teorem. Nå skal vi tegne en vinkel ut fra ditt teorem. (Tegner to parallell linjer.) Der har jeg en vinkel og de møtes aldri. Må vi ha med noe mer?
Vivi: De møtes i vinkelen, men ikke etterpå.
Guri: Det er ei linje med en brekk på.
Lærer: Du tenker på ei linje, men så er det en brekk på, en veldig spiss sånn brekk?
Guri: Ja, men den trenger ikke være spiss en gang.
Lærer: Kan den være sånn? (Tegner en buet linje)
Guri: Nei, det går ikke.
Lærer: *Guris teorem*: linje, vinkel, det er ei linje med en brekk, vil du at jeg skal skrive spiss brekk?
Guri: Nei, bare skriv brekk.
Lærer: Med en brekk så skjønner vi det (skriver på tavla: "Linje med en brekk").
Elev: Det behøver det jo ikke, for hvis den er 180 grader, så brekker den jo ikke.
Elev: Men da er det ikke noen vinkel.
Elev: Jo, det er det.

Elev: Det er en rett vinkel.
Lærer: Nå skal vi teste ut Guris teorem litt. Der er det en som det ikke er en brekk på. Er det en vinkel (tegner ei rett linje med et punkt på)?
Elev: Ja, hvis du setter punkt midt på.
Lærer: Kan ei rett linje være en vinkel?
(Elevene er uenige her, og læreren ber dem om å tenke litt på det.)

Igjen er det elevenes oppfatning av vinkel som er utgangspunktet. De prøver å komme fram til en definisjon på en vinkel, selv om læreren snakker om "teorem". Her er det viktig å merke seg at læreren henviser til hvordan matematikere arbeider og prøver å "sosialisere elevene til et matematisk miljø" (Schoenfeld, 1992). Deres egne forklaringer brukes i den videre prosessen. Problemet med 180 grader dukker opp for første gang.

(Etter en liten stund gjentar læreren spørsmålet, og en elev går fram til tavla og viser på linja, mens han forklarer:)
Elev: Jo vinkelen kan gå sånn (viser fra det ene endepunktet og til midtpunktet av linja) og så derifra og dertil (viser videre fra midtpunktet og til det andre endepunktet, samtidig som at hun mumler noe om grader som vi ikke oppfatter).
Lærer: Nå kobler du inn ordet grader.
Sissel, du har et annet teorem.
Elev: Hvis du setter opp en 90 graders vinkel sånn (viser med den ene armen horisontalt og den andre rett opp).
(Læreren tegner en 90 graders vinkel på tavla, med markeringen for rett vinkel, og forteller at det går an å måle hvor stor den er, det vil si hvor stor åpningen er. Han forteller videre at en slik vinkel kalles for 90 grader eller "rett", og skriver til slutt ordet "rett" på vinkelen.)
Elev: Hva kalles 180 grader for da.
Lærer: Fins det andre vinkler da?
Elever: 180, 70, 79, 79.9, ... (mange forslag mindre enn 180 grader).
Lærer: Hvordan ser en vinkel på 360 grader ut? (tegner en sirkel på tavla) Er det en vinkel?
Elev: Nei, det er en sirkel.
Lærer: Dette er vinkler (peker på vinklene bortsett fra den rette streken og sirkelen), men ikke denne (streken) eller denne (sirkelen).
(Elevene er tydeligvis uenige her. Problemer med vinkelbegrepet for 180 og 360 grader gjelder en statisk representasjon av begrepet. En elev spør om vi ikke kan tegne vinkelmarkeringen videre helt rundt, for da ville vi fått 360 grader. Læreren tar det opp og presiserer hvordan han mener denne eleven tenker.)
Lærer: Kari spør: Kan vi ikke begynne her (tegner en spiss vinkel) og lage forskjellige vinkler. Tenk nå at vi har en pinne som vi kan sveive rundt, åpne mer og mer (en større spiss vinkel). Når den kommer opp her, så har vi 90 grader (tegner en strek rett opp). Når den kommer ned hit (vinkelbeina danner 180 grader), så er den
Elev: 180 grader

Lærer: Det ligner da voldsomt på ei rett linje.
Elever: Ja (flere elever ler).
Lærer: Så går den videre nedover (til 270 grader, og læreren visker ut de andre vinklene på figuren, mens han tegner 270 graders markering). Så går vi litt til (viser videre nesten til 360 grader).
Elev: Ja, en runding, den blir 360
Elev: Den skarpeste vinkelen?
Elev: Men det er ikke rundingen som er vinkelen.
Lærer: Så spørsmålet er: Går det an å finne en vinkel som 360 grader i det hele tatt?
Elev: Det går i hvert fall an å finne en som er 300.
(Elevene diskuterer videre. De snakker om rundinger og halvrundinger og ser på gradskiva som bare går til 180 grader.)

Her ville mange ha tenkt at det i starten ville være best å konsentrere seg om vinkler mindre enn 180 grader og unngå problemer som 180 og 360 grader. Denne læreren tar sjansen og går videre med en gang, noe som er interessant didaktisk, blant annet ut fra Dienes' "deep end principle", Dienes (1963). Læreren prøver ikke på å omgå vanskelighetene. Det utfordrer elevene til å bli bevisst sitt vinkelbegrep. Det kan skape kognitive konflikter der vinkelbegrepet er intuitivt og ufullstendig, noe som kan være hensiktsmessig med tanke på langsiktig og fleksibel kunnskap, se Bell m.fl. (1985). Han henleder også elevenes oppmerksomhet på den dynamiske siden av vinkelbegrepet. Dette er ifølge Post (1992) en mere naturlig måte for barn å oppfatte vinkler på, enn den statiske. Det bidrar til et rikere vinkelbegrep.

(Læreren peker på teoremene som to av elevene kom fram til tidligere i timen. (De står fremdeles skrevet opp på tavla.) Elevene prøver selv på å løse sine begrepsmessige problemer.)
Elev: Det går ikke an å si det sånn: "De kan aldri møtes." De møtes i krysset.
Lærer: Du får lov å føye dette til. Det er sånn matematikere gjør – de føyer til noe mer når det er noe de ikke er fornøyd med.
Elev: Klokka er akkurat 12. Det er 360 grader.
Elev: Når den har gått rundt en gang, så er det akkurat det samme.

Igjen viser læreren til hva matematikere gjør – elevene oppfordres til å arbeide som "ordentlige matematikere", Schoenfeld (1992). De siste elevene ser for seg en praktisk kontekst, klokka. Vinkel koples til bevegelse av urviseren.

(Timen avsluttes med at elevene går rundt i klasserommet og finner rette, spisse og stumpe vinkler, og læreren sier helt til slutt at neste time skal de se på om Vivis og Guris teorem holder.)

Observasjon 3, hele klassen

(Neste time er med hele klassen. Læreren tegner opp noen vinkler på tavla, og begrepene spiss, rett og stump vinkel, fra forrige time repeteres. En av vinklene har læreren tegnet med åpningen nedover. Dette reagerer en av elevene på og spør om ikke den vinkelen er tegnet gal vei. Læreren svarer at dette var et godt spørsmål, og at de skal ta det opp litt seinere. Han går videre på begrepet rett vinkel, hvordan det markeres og at denne vinkelens størrelse er 90 grader. Deretter spør han om hvilken vinkel som er størst av to 90 graders vinkler, der den ene vinkelen har lengre vinkelbein enn den andre. Her er det tydelig at elevene (flere svarer i munnen på hverandre) mener at det ikke har noe å si. Deretter går han tilbake til den eleven som spurte om ikke det var en vinkel som sto gal vei.)

Lærer: Kan vi tegne vinkler hvordan vi vil?

Elev: Ja, for det er jo hjørnene som teller.

Lærer: Hvis dere skulle ha målt denne vinkelen, hadde dere klart det?

Elev: Det er jo ikke noe problem. Det er begge veier på gradskiva.

Her ser det ut som om de fleste elevene er på vei bort fra de mest vanlige misoppfatningene når det gjelder vinkler: Lengden på beina avgjør størrelsen på vinkelen, og alle vinkler må ha et bein orientert horisontalt. Vi vil også peke på hvordan elevenes dagligspråk utnyttes her. Eleven som sier at det er hjørnene som teller, uttrykker seg på ingen måte presist, men hun har forstått viktige egenskaper ved en vinkel.

(Etter denne innledende delen, tar læreren opp igjen spørsmålet om hva en vinkel er, og skriver opp Vivis og Guris teorem, slik at guttene også skal kunne ta stilling til disse.)

Lærer: Guris teorem var slik: "En vinkel det er ei rett linje med en brekk på." Hvis vi ser på vinklene som vi har her på tavla, så stemmer det. (Peker på de enkelte vinklene som er tegnet opp på tavla)

Elev: 180 grader er jo også en vinkel.

Elev: Nei, det er ei rett linje.

Lærer: Vivi, hun sa det sånn: "En vinkel det er to linjer som aldri møtes." "Kun i den ene enden," sa hun etter en stund.

Elev: Det var ikke noe rart hun sa det.

Elev: For de møtes jo.

Lærer: Den linja og den linja, de møtes aldri, bare i den ene enden. Det stemmer for den vinkelen og den og den.. (viser på vinklene på tavla).

Lærer: Hvilket av disse teoremene syns dere vi skal ta? Er dere enig i dette? Eller kan vi ikke bruke dem?

Elev: Guris.

Lærer: Kan dere finne et moteksempel? En vinkel som ikke passer?

Elev: Jeg har ett – 180 graders vinkel passer ikke. Det er en rett strek.

(Etter dette følger en diskusjon om ei rett linje kan oppfattes som en vinkel. Elevene argumenter med at en vinkel bare kan bli 179,9999.... grader. Det er en vinkel. Hvis vi kommer forbi 180 grader, så begynner det på nytt igjen. Læreren gir ikke noe svar nå, men lar elevene gruble videre. Han skriver opp en definisjon på tavla:

"En vinkel er to stråler som går ut fra et felles punkt." Elevene diskuterer og kommer fram til at dette ligner mest på Vivis teorem.)

Her er elevene inne på dype begreper. Det er tydelig at de har god forståelse for desimaltall, og at vi kan finne en vinkel så nær opp til 180 grader som vi bare vil, bare ikke akkurat 180 grader. Vi kan kanskje si at de også har en intuitiv forståelse av begrepet *grense*. Vi kan komme så nær 180 vi vil ved å ta med mange nok 9-siffer og tilsvarende over 180. En elev sier også at hun bare kan ta halvdelen mellom 179 og 180, og så halvdelen av det igjen mange ganger, for å forklare at han kan komme nærmere og nærmere 180 grader.

(Deretter tar læreren opp igjen spørsmålet om hvor stor en vinkel kan bli og om den kan bli 180 grader. Elevene diskuterer og de fleste mener at vi må hoppe over 180 grader.)

Elev: Hvis du har ei helt rett linje, og begynner med 180,999.... Da begynner du bare på nytt igjen. Da er det bare å snu vinkelen.

Lærer: Hvor stor mener du en vinkel kan bli da?

Elev: 179,9999....

Elev: Hvis det er 180 grader, vil jeg si at det ikke er en vinkel. Hvis vi tar 181 grader, så er det det samme som 179, bare at den snudd andre veien.

Lærer: Nå sa han noe lurt. Der er 179 grader (tegner en vinkel som er nesten 180°). Og så mente du at hvis vi begynte den veien, og så gikk rundt, så kom vi til 180 grader igjen (markerer resten opp til 360°).

Lærer: Du tenker ikke på den vinkelen som går der (179°), men den som går der (fra 181° til 360°).

Elev: Hvis du går til 179 og så til 181, så blir det det samme som å ha snudd vinkelen.

(Nå følger en diskusjon om hvilken vinkel vi skal se på. Er det den på 179°, eller den på 181°? Er den på 181° egentlig bare 179°, bare at den er snudd?)

Elevene er svært ivrige etter å prøve å finne ut av dette. Det er tydelig at de er i en konfliktsituasjon. Siden de fleste mener at vinkler må være mindre enn 180 grader, tolker de vinkler større enn 180 grader som at vinkelen er snudd. Dette støtter opp om det statiske vinkelbegrepet. Derimot blir en vinkel større og større når vi roterer det ene vinkelbeinet om toppunktet. Da blir det "lengre å dreie", og vi kan fortsette selv om vi passerer 180 grader.

(En elev kommer opp på tavla og tegner et hus med to fløyer som står vinkelrett på hverandre. Han peker på hjørnene i huset som er 90 grader og kommer så til vinkelen der de to fløyene møtes. Hvor stor er denne? Elevene diskuterer om denne vinkelen kan måles på utsida. Da er den 90 grader. Men dette mener noen ikke er riktig, siden de andre vinklene i huset ble målt inne i huset. En elev foreslår 270 grader. Noen protesterer, for vinkler kan ikke bli større enn 180 grader. Andre forsvarer dette, men kommer opp i et annet problem.)

Elev: Jo, for hvis du måler på midten, så er vinkelen 180, så hopper du over en. Da kan den bli 358,9999..
Elev: Nei, 359,9999..
Elev: Nei, 358, for du hoppet jo over en vinkel på en grad.
Elev: Men går det an å måle en vinkel sånn? Må du ikke måle den inne i brekket?
Elev: Da kan jo en vinkel være to slags grader. Den kan både være 90 og 270.

Vi ser igjen konfliktsituasjonen for dem som mener at vinkler ikke kan bli større enn 180 grader og heller ikke lik 180 grader. Hvordan skal 270 graders vinkelen inne i huset oppfattes? Vi vil her si at læreren fikk en "gavepakke" fra eleven som tegnet opp huset. Problemet med 180 grader dukker opp igjen, og det er interessant å se hvilke forestillinger elevene har. På den ene siden synes det som om de har et forholdsvis godt desimaltallbegrep som går på måling. Men på den andre siden så vil de hoppe over **en** grad, nemlig den på 180 grader. Den siste eleven mener at det alltid er vinkelen $v < 180^\circ$ som skal måles og ikke vinkelen $360^\circ - v$.

(Læreren viser nå på overhead en gradskive med skala til 360° og forteller at babylonerne, når de skulle måle vinkler, så brukte de denne oppdelingen av en sirkel i 360°. Deretter tegner læreren en vinkel (ca. 40°) på tavla.)
Lærer: Hvis vi skal måle vinkelen, må vi finne ut hvor stort det er mellom der og der (peker på vinkelen). Det er i alle fall 10 grader.
Elev: 40
Lærer: Der er 10, 20, 30, 40 grader. Så den vinkelen er 40 grader. Så tenkte vi videre, hvis vi har en rett vinkel. Hvor stor er den?
Elev: 90
Lærer: Nå begynner vi å nærme oss noe spennende, for nå begynner vi å nærme oss 180 nemlig. Hva tror dere babylonerne mente om 180 grader?
Elev: En strek er også 180°. Men alle vinkler har to...
Lærer: Men husk vi har sagt at en vinkel skal ha et punkt. Den skal begynne på et punkt.
Elev: Det skal gå to stråler.
Lærer: Så går den ene strålen der, så går den andre. Vi kan bevege den. (Viser med penn på overhead). Den andre strålen kan stå sånn..
Elev: Men det er ikke noen vinkel.
Elev: Jo, for de går ut fra et punkt.
Lærer: Den vinkelen er 180°.

Det er først nå at læreren bekrefter at en vinkel kan være 180 grader. Det er interessant å se argumentasjonen til elevene her. Den siste eleven viser at han kan argumentere ut fra en definisjon, nemlig den som læreren ga. "Teoremene" som elevene hadde foreslått, dekker ikke tilfellet med 180 grader, som noen av elevene også har pekt på.

Ny undervisningssekvens:

(Læreren kommer så tilbake til huset igjen, og henviser til hvordan han tror babylonerne ville ha tenkt. De ville ha rotert den ene strålen videre til 270 grader. Elevene diskuterer og kommer fram for å vise hva de mener ved å tegne på tavla eller bruke tusj på transparenten med gradskive som ligger på overhead. De diskuterer følgende problemstillinger:)

- Hvordan kan vi vite hvilken vinkel vi skal måle? Elevene kommer selv fram til at vi skal måle på den siden vinkelmarkeringen står, og læreren sier at hvis det ikke er noen markering, så er vi blitt enige om at vi skal måle den minste vinkelen.
- Hvordan kan vi måle (med gradskive) en vinkel som ikke begynner på 0, som ikke har det ene beinet orientert horisontalt og med åpning mot høyre? De kommer inn på at de for eksempel kan måle vinkel som "vender nedover" ved å måle fra 0 og fram til det første vinkelbeinet (i dette tilfellet 270°), så fra 0 og til det andre vinkelbeinet (320°). Vinkelens størrelse blir da differensen mellom disse vinklene. En elev sier at vi bare kan flytte gradskiva slik at det ene vinkelbeinet begynner på 0.
- Går det an å lage 0°?

Dette er en lang sekvens og mange elever får komme fram med sine synspunkter. Det er bare sporadiske forsøk på å forklare 0 grader, en elev sier noe om at når vi "sveiver helt rundt" så er det 360 grader, og det er det samme som 0 grader. Læreren styrer noe, men han tar hele tiden utgangspunkt i elevenes utsagn, og henviser til det elever har sagt for å presisere viktige poeng. Elevene bruker også her sitt dagligspråk. Det er lite formelt språk. Hensikten er å belyse flest mulig sider av vinkelbegrepet. Men så skjer det noe:

Elev: Jeg spurte pappa hvor stor en vinkel kan bli.
Lærer: Hvor stor kunne den bli?
Elev: 179 grader.
Elev: Men det stemmer jo ikke.
Elev: Jo, det gjør det.

Da startet diskusjonen igjen. Elevene og læreren kommer etter hvert fram til at faren egentlig mente det riktig. Vi fikk ikke med oss hele argumentasjonen, men vi tror nok det var mest for ikke å blamere faren. Dette viser at elevene tar med seg problemene hjem og diskuterer dem med foreldrene, noe som i seg selv er interessant, selv om læreren da kan komme opp i litt vanskelige situasjoner.

(Til slutt i denne timen tar læreren opp en ny utvidelse:)
Lærer: Hvor stor kan en vinkel bli? Kan den bli større en 360°?

(Elevene diskuterer og er svært uenige, men så er det en elev som har et forslag.)
Elev: Jo, vi kan lage gradene mindre, og så legge dem tettere, så går det an.
(Læreren kommenterer ikke dette siste utsagnet, men forteller at han går på videreutdanning på lærerhøgskolen, og der har de bruk for vinkler som er større enn 360 grader. Han forklarer det dynamisk – at hvis vi for eksempel skal ha 375 grader, så "snurrer" vi rundt en gang og så opp til 15 grader. Han sier videre at selv om det er vanskelig å se denne vinkelen for seg, så går det an å snakke om slike vinkler.)
Elev: Du kan bare tegne den 15 grader, og så tegne en runding og så opp igjen.
Elev: Kan du tegne en vinkel som er større ....
Elev: En vinkel – kan den være uendelig stor? En vinkel som er 1000 grader?
Lærer: Jeg kan bare tegne det samme som den. Jeg må bare vise at den har gått en gang rundt (viser på figuren på tavla).
Elev: Tegnet dere det?
Lærer: Vi tegnet det ikke så mye. Vi brukte det. Det er ikke så lett å tegne det.
Elev: Men hva er i grunnen vitsen med det?
Lærer: Noe som heter trigonometri, da er det veldig bra å bruke.
Elev: Kan en vinkel bli uendelig stor?
Elev: Ja, en vinkel kan bli uendelig stor.
Elev: Da fins det uendelig mange vinkler.
(Læreren forteller at han nettopp har lest i en dansk bok at en vinkel på 360 grader heter "Perigon".)
Elev: Er det bare en strek, og så med en runding på?
Lærer: Bare den kommer tilbake til starten.
Lærer: Det er som Rita sier: Vi har et punkt, og så har vi en stråle ut sånn og så går vi med den andre, og så kommer den helt rundt sånn.
Elev: Kan en gå så mange ganger en vil?

Igjen ser vi hvordan læreren ønsker å utvide vinkelbegrepet og gi perspektiver videre. Selv om ikke han forklarer hva trigonometri er, gir han elevene en idé om at det de holder på med i sjette klasse, er grunnlaget for det som læreren holder på med i sin videreutdanning. Uendelighetsbegrepet er under utvikling hos elevene. Utsagn som "uendelig stor", "uendelig mange vinkler" og "gå rundt så mange ganger en vil", viser at elevene har en viss intuitiv forståelse her. En elev bringer inn et nytt aspekt som fører til en intens diskusjon:

Elev: Hva kan det være at gradskiven bare er 180 grader?
Elev: Du kan legge den andre veien også. Du kan bare gå rundt en gang.
Elev: Fordi det bare går an å få vinkler som er 180 grader.
Elev: Jo, for hvis det er en vinkel som er 270 grader, så er det jo bare å se der det er 180 grader og så bare måle det som er ned der.
Elev: Du kan bare måle det som er inni og så tar du minus
Elev: Hvis du skal måle vinklene til et hus og vinklene er 90 grader..
Elev: Da kan det jo være både 90 og 270 grader.
Elev: Det kan være noe annet også.
Elev: Så kan du gå en runde til.

Elev: Hvis du står utenfor, så kan du ikke måle det som er inni.
Elev: Det går an å se på den vinkelen (peker på vinkelen utenpå huset).
Lærer: Kan vi alltid, for alle vinkler, finne disse to (en vilkårlig vinkel v og $360^o - v$), hvis jeg tegner en annen vinkel også. Er det to vinkler her også? (tegner en vinkel til på tavla)
Elever: Ja
Lærer: Kan vi gjøre det for alle vinkler?
Elever: Ja, nei... (diskusjon)
Lærer: I tilfelle hvor mye blir disse to vinklene til sammen?
Elev: 360
Elev: Men det er jo klart at vinkelen som er inni er minus.
Elev: Nei det blir ikke alltid 360 hvis du tar vinkelen større (enn 360).

Her kommer det praktiske målespørsmålet inn. Ifølge (Post, 1992) er det å måle vinkler det som er vanskeligst for barn. I denne sekvensen kobler læreren bruk av gradskive til selve vinkelbegrepet. Den siste eleven klarer å sette dette i sammenheng med vinkler større enn 360 grader.

(Læreren spør så om det går an å få en vinkel som er mindre enn null. Ingen av elevene svarer på dette, men en elev har sittet lenge og ventet på å si noe:)
Elev: Hvis vi tar to streker opp sånn. Hvor stor er den vinkelen? (Tegner en rett strek og en sirkel rundt det ene endepunktet av streken).
Elev: Enten er det 0, 180 eller 360
Elev: 360
Elev: Det kommer an på..
Elev: 0, 360 eller flere ganger rundt
Elev: 360 grader på yttersiden og 0 grader på den andre siden.
Elev: Er punktet i den ene enden, eller er punktet midt på?
Elev: Da er det minus 360 eller pluss 360
Elev: Men hvis vi hadde sett bare en rett strek, så kunne vi ikke vite..
Elev: Men det kan jo være midt på, slik at den er 180
(Læreren kommenterer innimellom disse elevuttalelsene, og de blir enige om at problemet er at de ikke kan vite om det bare er *en* strek, eller om det er en til som ligger "oppå". De blir også enige om at punktet (vinkelens toppunkt) er i den ene enden. Han presiserer at det er to forskjellige vinkler når punktet er i den ene enden og når punktet er midt på.)

Her er elevene inne på et vesentlig punkt, nemlig *flertydighet*. Språkbruken i matematikk er ikke alltid entydig, og vi som har holdt på med matematikk en stund, tar en del for gitt. Det dynamiske aspektet kommer også fram her. Elevene tenker seg to stråler ut fra et punkt, og den ene strålen beveger seg mot eller med klokka (minusvinkler) til den legger seg oppå den første. Her ser vi at læreren har gått langt utenfor det som vanligvis er pensum i 6. klasse. Elevene er til og med inne på negative vinkler ved rotasjon i negativ retning.

(Etter at det har ringt ut, fortsetter elevene å diskutere om en vinkel kan bli uendelig stor, og spesielt om det da er uendelig mange vinkler. En elev mener at det innenfor 180° er uendelig mange vinkler. Vi kan bare stadig ta en ny vinkel som er litt mindre enn den forrige.)

Observasjon 4, hele klassen

(I denne timen arbeider elevene med vinkelsummer i trekanter, kvadrater, rektangler og parallellogram. De arbeider i grupper, måler, klipper ut og setter resultatene opp i skjema. Det ser ut som om alle elevene kan måle vinkler, og alle gruppene kommer fram til riktig resultat.)

Observasjon 5, jentegruppa delingstime

(I denne timen skal elevene arbeide to og to sammen med dataprogrammet *Cabri*. Det er på forhånd laget ferdig figurer som elevene skal manipulere med: trekant, kvadrat, rektangel, parallellogram, femkant og sekskant, hvor vinklene er markert og påsatt måltall. Elevene skal hente inn en og en figur ad gangen, forandre på figuren og observere hvordan det går med vinklene og vinkelsummene. De kan bruke lommeregner.)

(Elevene venter at vinkelsummen skal bli 180 grader i trekantene. Siden Cabri runder av til hele grader, blir summen av og til 179 eller 181, og da reagerer elevene. Det samme gjelder vinkelsummene i firkantene. Elevene venter å få 360 grader. Elevene får et problem når det gjelder den generelle firkanten når de ikke lager den konveks. Det viser seg at når elevene drar i et av hjørnene på firkanten slik at vinkelen, v, i dette hjørnet blir større enn 180 grader, så måler Cabri vinkelen $360^\circ - v$. De fleste elevene rekker også å utforske vinkelsummen i femkanter og sekskanter. Læreren avbryter og forklarer at de må lage enkle figurer som er slik at ingen hjørner går innover.)

Elevene er utrolig raske til å håndtere programmet. De har aldri sett det før. Men det kan kanskje være et problem at Cabri ikke håndterer vinkler større enn 180 grader, da hopper vinkelen over på den andre siden, dvs. vinkelen som er mindre enn (eller lik)180 måles alltid. Her illustreres dataprogrammets begrensninger, men det kan utnyttes som utgangspunkt for en diskusjon om hvilken vinkel som skal måles. Cabri er så "dum" at den ikke skjønner at en vinkel kan bli større enn 180 grader, og dette kan settes i relasjon til spørsmålet om hvor stor en vinkel kan bli. Når vi drar i et hjørne slik at figuren blir konkav – og det blir den ofte når et polygon er laget uten restriksjoner – så blir ikke vinkelsummen riktig på Cabri. Dette kan være forvirrende for elever, men likevel en utfordring. Hvordan kan du finne vinkelsummen i figuren, når det ikke er den "riktige" vinkelen som måles?

Bortsett fra dette, så viser det seg at programmet er velegnet til å jobbe med vinkelsummer. Vi vil anta at elevene vil ha et bedre grunnlag for et godt vinkelbegrep, enn om de bare hadde tegnet figurer på papir og målt med gradskive. Lærerens kommentarer til oss etter timen støtter dette inntrykket.

Oppsummeringstimene, skriftlig referat fra læreren
Den ene av disse timene blir brukt til å oppsummere vinkelsummer. I fellesskap setter klassen opp et skjema over figurene (trekant, firkant osv.) og de tilhørende vinkelsummer. Er det en sammenheng mellom antall kanter og vinkelsummen? De fleste av elevene oppdager nokså fort den rekursive sammenhengen: Vi øker med 180 grader for "hver ny kant" vi lager.

Elevene mener at det er et flott mønster, men en tungvint måte, hvis vi bare er interessert i vinkelsummen i for eksempel en åttekant. Behovet for en *formel* – og en *begrunnelse* – melder seg. Elevene kjenner begrepet "formel" fra arbeid med regneark. Læreren må lede dem på vei mot å dele opp figurene i trekanter og innføre n for antall kanter. Etter en kort tenkepause, sier en av elevene: "Formelen er $n - 2$ ganger 180 grader." Han tegner på tavla og forklarer, og det ser ut som om mange av elevene er med på dette. De forstår og gir uttrykk for begeistring over å finne formelen. Vi ser her en begynnende forståelse for behovet for et *bevis*.

3.4 Intervju med læreren

Nyere forskning (Lerman, 1993) har bekreftet at lærerens holdning og undervisningsfilosofi har stor betydning for elevenes læring. Elevene overtar i stor grad lærerens oppfatninger om hva matematikk er og hva som er viktig å lære i matematikk – det skjulte budskap. Forskning viser også at læreren er sentral når det gjelder utviklingen av elevers evne til metakognisjon og kontroll, noe som igjen er avgjørende for elevers læring.

I et kasusstudium som dette vi tar opp, må vi se på lærerens rolle. Han er 26 år og har undervist i 3,5 år. Han har skolens egen lærerutdanning og holder på med videreutdanning i matematikk. Her vil vi referere fra et intervju vi hadde med læreren umiddelbart etter at undervisningssekvensen i geometri var ferdig.

Matematikk, sier han, er ikke bare teori. Det fins overalt, og det konkrete må være grunnlaget. Vi må lære matematikk fordi det er nyttig, men også fordi det kan være fint og fordi det kan ha et estetisk aspekt. Hans viktigste mål for faget på barnetrinnet er å gjøre matematikken morsom. Da vil en bedre kunne snakke om nytteverdien på ungdomstrinnet. Skolens fagplan er utgangspunktet for undervisningen, oppgaver og aktiviteter velges fra flere kilder, ikke bare fra læreboka, og datamaskinen brukes der det er naturlig.

Samarbeid og aktivitet er viktig. Klassen har planlagt gruppearbeid hver uke, og elevene har lov til å samarbeide i alle timene. Læreren uttrykker dette slik:

> En bør gjøre ting sammen, og da får en ofte i stand en dialog, og det tror jeg er viktig at elevene lærer seg til å sette språk på tankene sine, og presentere matematiske tanker for andre, ikke bare på papiret, men også ved hjelp av ord. Det er viktig at elevene er aktive, ikke bare at de sitter og er mottagende hele tiden.

En god time er ifølge denne læreren, en time som ikke går helt etter planen, men med aktivitet, skikkelig strukturering og ikke minst en oppsummering til slutt, der det er nødvendig.

Læreren mener at det er mange fine aktiviteter i geometri, som kan starte praktisk for så gå trinnvis inn i matematikkens verden. Et godt eksempel er arbeidet med vinkelsummen i en mangekant.

I geometri er målet at elevene skal lære å kjenne navnet på noen ulike figurer og at de skal få et godt arealbegrep. Elevene bør også vite hva en vinkel er, kunne måle den og se nytteverdien av vinkelbegrepet i det praktiske liv. Elevene må få oppleve geometriske erfaringer fra dagliglivet, spesielt anvendelser i kunst.

Diagnostisk undervisning er sentralt i denne lærerens undervisning. Først en beskrivelse av situasjonen med lærerledet diskusjon som fører fram mot det som skal læres. Deretter konfliktspørsmål og situasjoner som vil avdekke eventuelle misoppfatninger og intuitive begreper – og en diskusjon for å løse konflikten. Til slutt øving med ulikt materiell som skal feste den nye kunnskapen. Testoppgaver kan brukes før og etter en slik undervisningsenhet, se for øvrig Breiteig (1986).

Begrepslæring henger sammen med atmosfæren i klassen. Læreren har denne oppfatningen av elevers feil:

> Det er bra det er noen feil, vi skal ikke skyve dem inn under teppet, men heller ta dem fram. De kan bli veldig fruktbare utgangspunkt for en klassediskusjon. Trenger ikke si hvem som gjorde den, men det kan en også lage en kultur for i klassen, et miljø hvor det ikke er så farlig å si en feil. Hvis en begynner tidlig med det, så er det ikke så farlig. Ta fram feilen, og gjerne lage oppgaver som legger opp til misforståelser som skaper en konflikt hos elevene, så kommer de i ubalanse, og hva skal en nå gjøre? Da tror jeg de er veldig mottagelige i den fasen der, da de kommer i opprør. De må stabilisere seg igjen. Da må de velge noe, og så kan en lede dem litt.

Guris "teorem": En vinkel er ei linje med knekk på (det vil si at en vinkel ikke kan være 180 grader), er et godt eksempel på hvordan elevers misoppfatninger, eller skal vi heller si uferdige begreper, kan utnyttes i diagnostisk undervisning, etter denne lærerens mening. Han poengterer videre at mange av elevenes misoppfatninger er "logiske". De kan begrunnes og henger sammen med intuitive erfaringer.

Læreren har daglig uformell vurdering av elevene, skriver personlige kommentarer til innføringer o.l. og har prøver for å teste hva elevene har fått med seg. Han legger vekt på at elevene testes i det som har vært sentralt i undervisningen, og at de skal få vise det de kan, særlig hvis de har gjort spesielle aktiviteter.

Til slutt sier han at han sender jevnlig brev til foreldrene for å fortelle om utviklingen til elevene i hvert enkelt fag. Han prøver også å evaluere sin egen undervisning, gjøre notater om hva som har fungert bra og hva som ikke har fungert og eventuelt hvorfor. Han har til og med filmet sin egen undervisning med et kamera bak i klasserommet.

Vi finner stor overensstemmelse mellom det læreren sier om sitt eget didaktiske ståsted – og det han gjør. Læreren reflekterer over mål, stoffutvelgelse og arbeidsmåter. Interessen og engasjementet til elevene viser at læreren har tatt et langt steg mot sitt viktigste mål: Matematikk skal være morsomt.

4 Diskusjon

Post (1992) sier at rotasjoner er mest naturlig for yngre barn. I våre observasjoner ser det også ut som om det dynamiske perspektivet er til god hjelp for elevene. Når det gjelder synet på det statiske perspektivet stemmer dette med våre observasjoner, siden tilknytningen til bygninger også kommer fram her. Måleproblemene som Post nevner, viser seg også i våre observasjoner, men det kan virke som om det å knytte måling med gradskive sammen med oppbyggingen av vinkelbegrepet, er til stor hjelp for elevene. Våre observasjoner viser at elevene har få problemer med begrepene spiss, rett og stump vinkel, men 180 grader er også for "våre" elever et stort problem.

Greenes (1979) og Kerslake (1979) peker på problemer i forbindelse med orientering, se også Pimm (1987) og Krainer (1991). Bare i starten på opplegget er det noen få elever som hadde problemer her, og det viser seg at det er forholdsvis enkelt å gjøre noe med slike misoppfatninger. Dette er heller ikke noe stort problem i undersøkelsene til Magina & Hoyles (1991).

Sistnevnte undersøkelse viser at elever har store problemer med å sammenligne vinkler når vinkelbeina ikke er like lange. Dette er ikke tilfelle i våre observasjoner. Læreren prøver å "lure" elevene, men de svarer øyeblikkelig at dette ikke har noen betydning. Vi tror denne klassen må ha gjort spesielle erfaringer på dette området, for også våre tidligere observasjoner viser at det er mange 12-13 åringer som har problemer her.

Undersøkelsene til Simmons & Cope (1990) viser at det kan være et problem at supplementvinkelen må oppgis i Logo. I våre undersøkelser får elevene problemer fordi Cabri måler supplementvinkelen til en vinkel som er større enn 180 grader. Det hadde vært interessant og sett om dette er forvirrende eller om det kan brukes i den videre læringen, se for øvrig kommentarer til Observasjon 5, jentegruppa.

Magina & Hoyles (1991) viser at elever har problemer med vinkler større enn 180 grader. Våre observasjoner viser også at det er vanskeligere for elevene å oppfatte slike vinkler enn spisse vinkler. Deres forklaring på at den største vinkelen (av v og $360^\circ - v$) kan sees på som "bakgrunnen" til den minste, støtter opp om våre observasjoner der elevene diskuterte hvilken vinkel de skal måle, og hvordan de kan avgjøre dette. Når elevene skal "kjøre bil", det vil si i en praktisk sammenheng har de mindre problemer med vinkler større enn 180 grader. Observasjonene våre støtter opp om dette, siden det eksemplet som intuitivt blir valgt av en elev, "vinkelhuset", er en praktisk situasjon, der de to vinklene (som til sammen utgjør 360 grader) er vesensforskjellige i konteksten, se også Krainer (1991). Her kan de "se" en vinkel på 270 grader.

Rubenstein m.fl. (1993) er opptatt av å gi elevene noen vinkler som de kjenner godt. I våre observasjoner er også læreren opptatt av dette, men han fokuserer på de "vanskelige" vinklene. Arbeidet med vinkelsummer og et lite historisk tilbakeblikk samsvarer med det vi observerte. Det er interessant at disse forskerne også ser en forbindelse mellom utvikling av vinkelbegrepet og forarbeid til grensebegrepet: at den rette linje, eller 180 grader, i noen tilfeller kan oppfattes som en grense.

I intervjuet med læreren kommer det tydelig fram at han er opptatt av å lære elevene å tenke matematisk. Ved sine stadige henvisninger til hvordan matematikere arbeider med matematikk gir han elevene små drypp av hvordan det matematiske fellesskapet virker. Dette samsvarer godt med "enculturation" begrepet til Schoenfeld (1992) og Lampert (1990) som ønsker å bringe skolematematikk og forskningsmiljø nærmere sammen. Det kommer også fram at læreren vektlegger prosessen, det å ta utgangspunkt i elevenes hypoteser og å skape matematikk. Dette samsvarer med Lakatos (1976) som sier at matematikken utvikler seg gjennom en prosess av "kvalifisert gjetting".

5 Konklusjon

I innledningen spurte vi: Hvordan utvikles barns vinkelbegrep i en spesiell undervisningssekvens? I en undervisning preget av utforskning får elevene anledning til å konstruere begreper ved å arbeide med oppgaver og eksempler på begrepene. De blir ikke bare presentert ferdige definisjoner fulgt av øvingsoppgaver. Eksemplet her illustrerer et slikt arbeid med å konstruere vinkelbegrepet.

Hvilke oppfatninger har barn om vinkler?

– Det er to linjer som møtes, linje med brekk på, en vinkel kan muligens ikke være 180 grader, heller ikke 360 grader. Vinkelen kan antagelig bli uendelig stor, og det fins uendelig mange vinkler. Vinkler kan vi måle med gradskive, men det blir problemer når vinkelen blir større enn 180 grader. Hvordan skal vi kunne vite hvilken vinkel vi skal måle? Hva med de "flertydige" tilfellene 0, 180 og 360 grader?

Direkte misoppfatninger som at vinkelbeinas lengde har betydning for måltallet, og at vinkelens orientering har betydning, finner vi lite av i våre observasjoner, mens annen forskning viser at dette er vanlig.

Undervisningen kan legges opp slik at elevene utvikler et fleksibelt og stabilt vinkelbegrep og at misoppfatninger kan oppdages. Utgangspunktet må være elevenes intuitive oppfatninger. Våre observasjoner tyder også på at å velge "the deep end principle" (Dienes & Jeeves, 1963; 1970) i denne sammenhengen er et fruktbart valg. Læreren velger å fokusere på det som er virkelig problematisk – vinklene på 0, 180 og 360 grader – i stedet for å holde seg til vinkler mindre enn 180 grader.

Vi har ikke funnet noen forskning som har tatt dette utgangspunktet. Vi vet heller ikke hva elevene "våre" sitter igjen med etter denne undervisningssekvensen. Derfor er våre konklusjoner kun bygget på den positive utviklingen og den matematiske aktiviteten vi mener å ha sett i timene og på intervjuet med læreren. Det ville nok være farlig å trekke konklusjonene for langt, dette er et studium av **en** bestemt klasse. Også andre tilnærmingsmåter til vinkelbegrepet kunne ført til lignende resultater.

Litteratur

Bell, A., Swan, M., Onslow, B., Pratt, K., & Purdy, D. (1985). *Diagnostic Teaching – Teaching For Long Time Learning*. University of Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Breiteig, T. (ed.) (1986). *Desimaltall – En bok om utbredte feiltyper, hvordan læreren kan forebygge dem og noen ideer om undervisning*. Kristiansand lærerhøgskoles skriftserie.

Close, G. (1982). *Children' s Understanding of Angle at the Primary/Secondary Transfer Stage*, M.Sc. Thesis. London: Polytechnic of South Bank.

Cope, P., & Simmons, M. (1990). Fragile Knowledge of Angle. Turtle Geometry. *Educational Studies in Mathematics* 21, 375-382.

Dienes, A. P., & Jeeves, M. A. (1963). *Thinking in Structures*. London: Routledge and Kegan Paul.

Dienes, A. P., & Jeeves, M. A. (1970). *The Effect of Structural Relation and Transfer*. London: Routledge and Kegan Paul.

Greenes, C., E. (1979). The learning Disabled Child in Mathematics. *Focus-On Learning Problems in Mathematics* **1**(1).

Hart, K. M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11 -16*. London: The CSMS Mathematics Team.

James, G., & James, R. C. (1976). *Mathematics Dictionary*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Kent, D. (1978). The Dynamic of Put. *Mathematics Teaching*, 82, 32-36.

Kerslake, D. (1979). Visual mathematics. *Mathematics in School*, **6**(2), 34-35.

Krainer, K. (1991). Consequences of a Low Level of Acting and Reflecting in Geometry Learning – Findings of Interviews on the Concept of Angle. In *Proceedings of the 15th Conference of PME Int. Group* (Vol. II, 254-261). Assisi Italia.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. New York: Cambridge Univerisity Press.

Lampert, M. (1990). When the Problem is not the Question, and the Solution is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, **27**, (1), 29-63.

Lerman, S. (1993). The Role of the Teacher in Children's Learning of Mathematics. In *Significant Influences on Childrens Learning of Mathematics*. Paris: UNESCO, Science and Technology Education, Document Series No. 47, 61-85.

Magina, S., & Hoyles, C. (1991). Developing a Map of Children's Conceptions of Angle. In *Proceedings of the 15th Conference of PME Int. Group* (Vol. II, 358-364). Assisi, Italia.

Pimm, D. (1987). Speaking Mathematically. Communications in Mathematics Classrooms. London: Routledge and Kegan Paul.

Post, T. R. (1992). *Teaching Mathematics in Grades K – 8, Research–Based Methods*. Needham Heights, Massachusetts: Allyn & Bacon.

Rubenstein, R. N., Lappan, G., Phillips, E., & Fitzgerald, W. (1993). Angle sense: A valuable connector. *Arithmetic Teacher* 2, 352-258.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics. In D. G. Grouws (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, NY: Macmillan.

What is an angle?

One of the issues that has been the object of many studies in mathematics is students' development of concepts. The purpose of this article is to report a study of children developing notions of angles in one particular classroom. Angles may be viewed dynamically as turns or rotations, they may be viewed statically as half-rays, and they may be analysed by measurement.

Research shows that students have some conceptual problems with angles—seeing angles where neither of the legs are horizontally oriented, comparing angles with the same measure but different length of legs, recognizing angles wider than 180 degrees, and even more difficult, recognizing angles of 180 degrees.

The teaching we observed showed a teacher emphasizing students' own investigations, and concentrating on concept learning by means of an interaction between dynamic and static experiences of the angle. The teacher focused on the "problematic" angles—0, 180 and 360 degrees—on what size is the widest possible angle and on how many different angles there are. The students were also concerned with which angle to measure (v or $360° - v$) when v is wider than 180 degrees.

Students had difficulties with the static perspective of the angle, with the measurement of angles, and with angles wider than 180 degrees—especially when the context was not a practical one. But few students had difficulty recognizing angles in different positions or comparing angles with different leg sizes.

Author
Veslemøy Johnsen is a teacher in mathematics and mathematics education at Agder College, Kristiansand, Norway
Address
Institutt for matematiske fag, Kongsgård allé 20, Postuttak
N-4604 Kristiansand, Norway
e-mail:Veslemoy.Johnsen@hia.no