

Modeller för konstruktivistiska inlärningsaktiviteter och utvärdering

Lenni Haapasalo

Artikeln syftar på att ge en teoretisk grund för och presentera resultat från det så kallade MODEM-projektet (Modeller för Didaktiska och Empiriska problem i Matematikundervisningen) vid Jyväskylä universitet. Projektet har utvecklat och testat inlärningsmiljöer som ger eleverna möjlighet att på ett systematiskt sätt bygga upp matematisk kunskap. Särskilt undersöktes olika faser i elevernas begrepps- bildning och vad som händer när man konfronterar eleverna med olika former av matematisk information (verbal, symbolisk, i form av bilder). Resultaten visar, att elever som undervisats i överensstämmelse med projektets modell för begrepps- bildning nådde betydligt bättre resultat än elever som undervisats med konven- tionella metoder i skolan. De olika faserna i inlärningsprocessen visade sig utgöra en användbar ram också för utvärdering av elevernas prestationer.

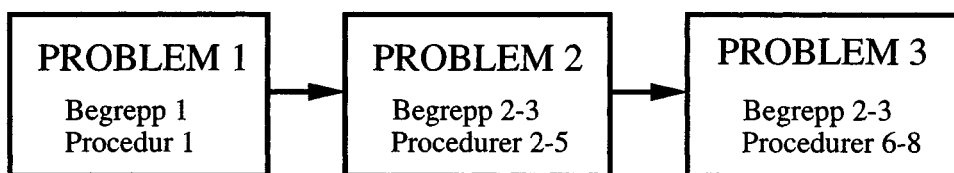
Några utmärkande drag hos konstruktivismen

Konstruktivismen, i synnerhet den så kallade "radikala konstruktivismen" (se t. ex. von Glasersfeld, 1989), vågar ifrågasätta förekomsten av objektiv kunskap. Den mest centrala idén är att eleven genererar en personlig bild av verkligheten, en bild som eleven ständigt bygger ut och nyanserar som ett resultat av sitt växelspel med omgivningen. Den konstruktivistiska synen på inläring innebär en radikal brytning med äldre tiders syn på läroplaner och undervisning. Företrädarna för den konstruktivistiska inläringssynen betonar de processer som ger eleven ny matematisk kunskap och ifrågasätter matematikundervisning som försöker förmedla ett på förhand givet matematikinnehåll.

Moderna pedagogiska strömningar i t. ex. England och USA innehåller konstruktivistiska element, vilket man kan se av exempelvis NCTM:s (1989, 1991) nya visioner för skolmatematiken. Det tycks bli allt vanligare i skolan att man skapar konkreta inläringssituationer med hjälp av en följd av problem som i figur 1. Den bakomlig-

Lenni Haapasalo är biträdande professor i de matematiska ämnenas didaktik vid Jyväskylä universitet, Finland. Hans forskning är främst koncentrerad till utveckling av 'konstruktivistiska inlärningsmiljöer'. Han har nyligen gett ut en bok i ämnet. Den anmäls sist i denna artikel.

gande tanken är den, att eleverna skall lära sig matematik och samtidigt se matematikens betydelse i vardagslivet genom att uppgifterna relateras till konkreta vardagssituationer. Elevernas uppgift kan vara att till exempel planera sin egen frukost med hjälp av tillgänglig information om livsmedel, näringsvärden, vitaminer m.m. (problem 1). Det är uppenbart att eleverna kan utveckla sitt matematiska kunnande också i samband med försök att lösa problem av detta slag. De lär sig procedurer eller metoder för hur man exempelvis beräknar delar av helheter (procedur 1), kanske några kännetecken för ett nytt begrepp (t. ex. om bråk: begrepp 1) osv. Andra problem (problem 2-3) kan vara förknippade med procedurer och begrepp av något annat slag (t. ex. decimaltal och procent: begrepp 2-3, med olika procedurer 2-8).



Figur 1. En modell för situationsbundna inlärningsmiljöer skapade via en följd av konkreta problem.

Det är intressant att fundera över vilken begreppsutveckling de konstruktivistiska ansatserna kan leda till. Om filosofin bakom den radikala konstruktivismen accepteras, ansluter man sig också till tanken att det inte finns någon objektiv omvärld och att eleven inte kan inhämta objektiv kunskap. Om man ser det hela ur elevens synvinkel, så menar de radikala konstruktivisterna att det enda verkliga vetandet är elevens egen tolkning av den situation eleven befinner sig i och elevens föreställningar om de begrepp som används där.

I läroplanens målformuleringar kan man knappast gå längre än till en 'vag konstruktivism'. Efter avslutad kurs måste alla elever uppfatta åtminstone de viktigaste matematiska begreppen (till exempel bråk) i viss mån på samma sätt. Eleverna skall kunna använda dessa begrepp i sin kommunikation och för att kunna lösa vanliga vardagsproblem. Läraren och andra som planerar för elevernas inläring måste därför från första början ha som mål att hjälpa dem att konstruera användbar och kulturellt livskraftiga kunskaper i anslutning till elevgrupper sociala konstruktioner. Det går inte att utgå enbart från elevens egna konstruktioner.

Kan den radikala och den vaga konstruktivismen förenas? Frågan är svår att besvara. Ännu svårare är det att beskriva de sociala processer som inverkar på kunskapsstrukturerna och kunskapens natur.

Det skulle kanske vara mera ändamålsenligt att använda begrepp som 'lokal' i stället för 'radikal' konstruktivism och 'global' hellre än 'vag' konstruktivism. När eleverna lär sig räkna med t. ex. bråk, måste man utifrån den konstruktivistiska handledningsfilosofin acceptera att de i denna process har individuella (lokala) uppfattningar och mentala modeller, som de med tiden korrigerar i önskad riktning. Men dessa modeller måste trots allt ha en viss motsvarighet i allmänna föreställningar – historiskt och kulturellt globala – och i sista hand i matematiska begrepp och definitioner.

I det följande beskrivs den "systematiska konstruktivismen", dvs. den didaktiska princip som ligger till grund för MODEM-projektet. Tanken bakom MODEM har varit att ge eleverna möjlighet att generera matematisk kunskap med hjälp av element både från den radikala och den vaga konstruktivismen. Eftersom matematiken själv är systematisk, kan den "systematiska konstruktivismen" ge en kunskasteoretisk grund för planering av inlärningsmiljöer.

Modeller för aktiviteter enligt den "systematiska konstruktivismen"

Figur 1 visar en karikatyr av kontextbundna inlärningsmiljöer enligt en radikalkonstruktivistisk modell. Man kan kritisera en undervisning som ordnas enligt denna modell. Hur skall man till exempel genom en sådan undervisning kunna garantera att eleven lär sig matematiska begrepp och kunskapsstrukturer (dvs. begreppsmässig kunskap) och inte enbart situationsbundna procedurer? Procedurerna eller det tekniska kunnandet står för algoritmer av olika slag (t.ex. kalkyler, ekvationslösning osv.), både sådana som är beroende och icke beroende av kontexten.

En grundläggande idé bakom den systematiska konstruktivismen i MODEM-projektet är att göra åtskillnad i undervisningen mellan *begrepp*, *procedurer* och *matematiska satser*. Dessa tre företeelser har sina egna matematisk-logiska krav. Därför kräver inläringen på de tre områdena mentala processer av skilda slag, även om vissa allmänna problemlösningsprinciper är gemensamma och hänsyn alltid måste tas till inlärnings- och utvecklingspsykologiska aspekter (figur 2).

Figur 3 illustrerar hur det kan gå till att konstruera matematiska kunskapsstrukturer inom ramen för MODEM. Det viktigaste är att eleven får möjlighet att själv bygga upp sådana strukturer i anslutning till begreppsbyggnaden. För att så skall ske, indelas inlärnings-

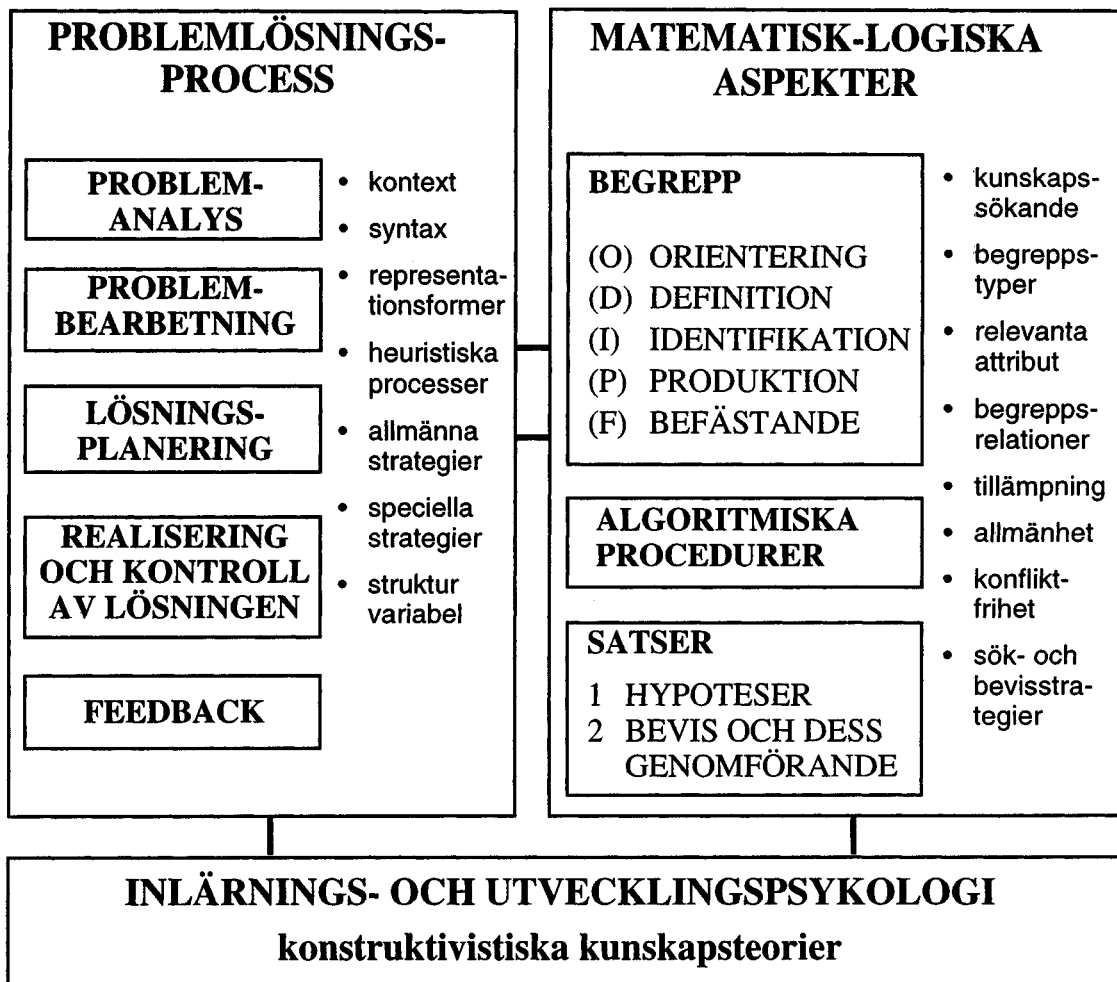
processen i faser. I samband med begreppsbildningen har eleven möjlighet att tillägna sig tekniskt kunnande i form av procedurer som ansluter till begreppet i fråga.

I olika faser av begreppsbildningen gör eleven "lokala konstruktioner", som kan vara av mycket radikal karaktär (i von Glasersfelds mening). Det är inte nödvändigt att läraren korrigerar sådana tanke-modeller även om de är felaktiga. Eleven kan i stället försättas i situationer som kan ge upphov till kognitiva konflikter som gör att eleven själv korrigerar sina modeller. Å andra sidan bör eleven under en längre inlärningsprocess (som i figur 3) ha möjlighet att forma tillräckligt allmängiltiga "globala konstruktioner", vilket bland annat innebär att eleven blir fullt medveten om de behandlade begreppens centrala innehåll.

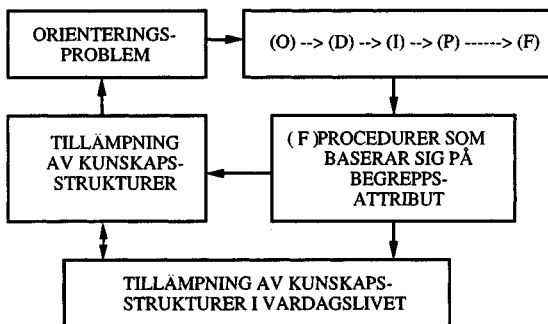
För att göra en rimlig och tillräckligt entydig tolkning av ett begrepp måste eleven kunna koppla ihop begreppet med representationer i *verbal* och *symbolisk* form och i form av *bilder*. Sannolikt är det av stor betydelse för begreppsbildningen på vilket sätt eleven utvecklar de nödvändiga föreställningarna och andra representationer som behövs vid användning av begreppet (se figur 4). Särskilt viktiga för begreppsbildningen är de verbala representationerna. Överhuvudtaget ser språket ut att vara av stor betydelse i konstruktivistiska inlärningsmiljöer. Språket har ju både en kulturell och en kognitiv kvalitet, som används i nästan allt kunskapsinhämtande och som är en grundläggande förutsättning både för individens och samhällets utveckling.

De olika faserna i begreppsbildningen och deras didaktiska funktion skulle vara betjänta av en utförlig presentation. Av utrymmesskäl begränsas den följande framställningen till en kort redogörelse för det viktigaste innehållet.

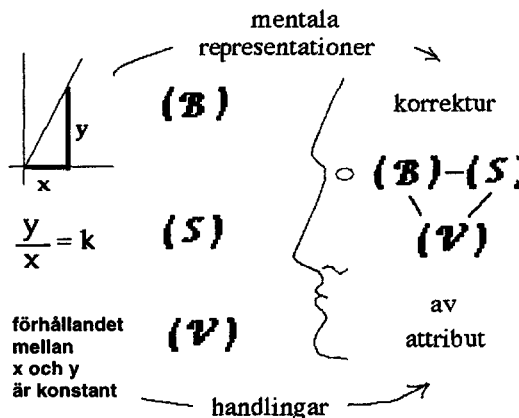
I *orienteringsfasen* (O) tolkar eleven situationen med hjälp av sina tidigare mentala modeller (figur 4). Eleven utgår ofta från mycket naiva föreställningar och uppfattningar. Lärarens uppgift är att planera inlärningsmiljöer, där eleven får förädla sina tidigare mentala representationer till mångsidigare tanke- och handlingsmodeller. I själva verket kan det vara nyttigt att medvetet utsätta eleven för logisk-kognitiva konflikter, som tvingar eleven att reflektera över begrepps innebörd och att aktivt koppla relevanta attribut (kännetecken) till begreppen ifråga. På så sätt leder orienteringsfasen direkt över till *begreppsdefinitionsfasen* (D), där eleven eller elevgruppen fixerar de relevanta kännetecknen för begreppen.



Figur 2. Ramstruktur över den systematiska konstruktivismen



Figur 3. Uppkomsten av kunskapsstrukturer vid undervisning i överensstämmelse med den systematiska konstruktivismen.



Figur 4. Konstruktionen av begreppsattribut för gradient.

I *identifikationsfasen* (I) har eleven möjlighet att identifiera attribut som är förbundna med olika uttryck eller representationer för begreppet. Uppgifterna skall ge eleven möjlighet att växla inom och mellan representationsformer: verbal, symbolisk eller bildform (graf). Identifikationsfasen innehåller sex uppgiftsgrupper och omfattar både enkla och svårare uppgifter (se Haapasalo, 1991, s 7; 1992a, s 78, 89-91). Figur 5 föreställer en identifikationsuppgift (IGG; grafisk-grafisk) av enklaste typ och en mera komplicerad (IGS; grafisk-symbolisk).

I *produktionsfasen* (P) skall eleven producera begreppsattribut utifrån givna attribut, som kan ha samma eller olika form. Uppgifter av nio slag behövs, (se t. ex. Haapasalo 1991, s 8; 1992b, s 79-80, 91-93). Figur 6 föreställer en grafisk-grafisk uppgift (PGG) av detta slag.

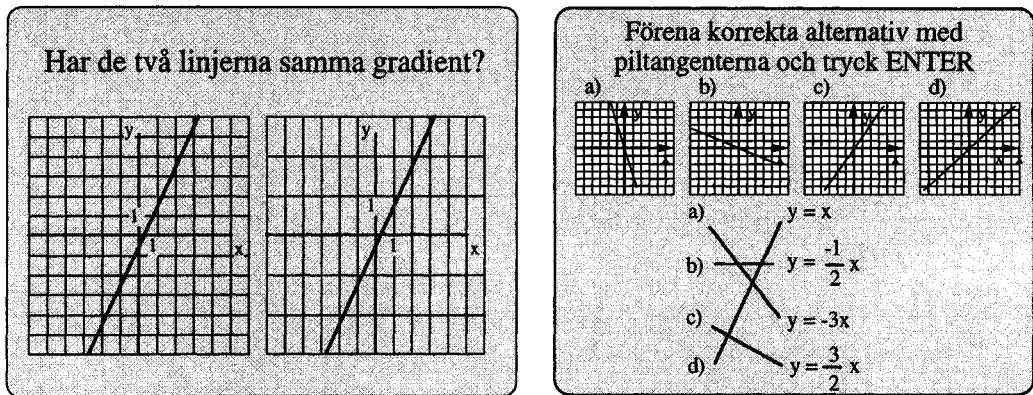
I *befästandefasen* (F) har eleven möjlighet att befästa och tillämpa begreppet, skaffa fler attribut och konstruera procedurer (se t. ex. Haapasalo, 1992a, s 81-87, 94-97; 1992b, s 15-18). Uppgifterna i denna fas kan också kräva informationsbehandling av mer komplicerad natur (se figur 7).

Empirisk forskning inom MODEM-projektet

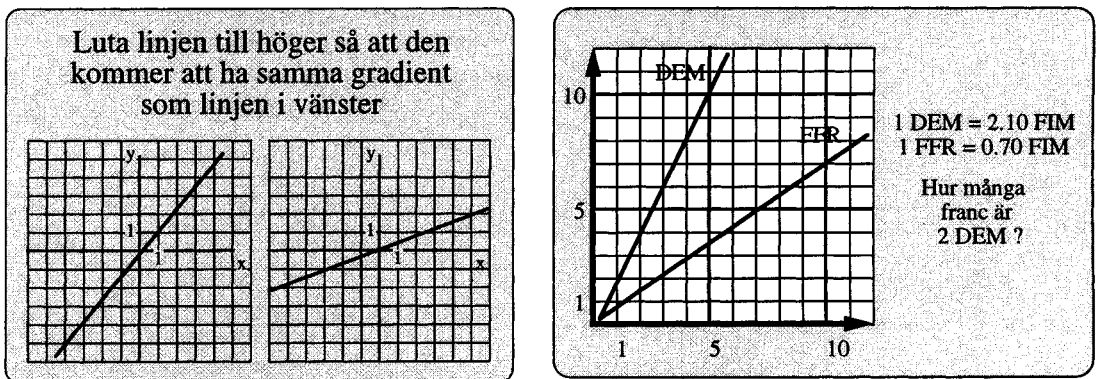
Traditionellt har elevers begreppskunskaper testats med hjälp av mekaniska räkneuppgifter. I sammanfattningen av projektets resultat kommer vi att se, att dessa uppgifter är osäkra värdemätare på sådana former av kunskaper. Inom ramen för projektet konstruerades ett test utifrån den modell över systematisk begreppsbildning som presenterats i det föregående. Testet gjorde åtskillnad mellan identifikations-, produktions- och tillämpningsnivåerna i begreppsbildningsprocessen. Samtliga femton uppgiftsvarianter på identifikations- och produktionsnivån ingick i testet (Haapasalo, 1991, s 93-97; 1992a, s 89-97; 1992b, s 90-95).

Här är några exempel på frågor som undersöktes:

- (i) Vilka uppgifter är mest tillförlitliga vid mätning av begreppskunskaper?
- (ii) Hur stor betydelse har de olika faserna för begreppsbildningen?
- (iii) Hur bra har eleverna tillägnat sig begreppen på olika nivåer (från I till F)?
- (iv) Hur ser sambanden ut mellan de olika nivåerna?
- (v) Vilken betydelse har olika representationsformer för begreppsbildningen?



Figur 5. Exempel på identifikationsuppgift av enkel (grafisk-grafisk, IGG) och mer komplicerad art (grafisk-symbolisk, IGS).



Figur 6. En grafisk-grafisk produktionsuppgift, PGG. Figur 7. En uppgift för att befästa begrepp.

- (vi) Vilka samband finns mellan olika uppgiftstyper?
- (vii) Ger studier enligt MODEM bättre resultat än konventionell skolundervisning?
- (viii) Vilka attityder har eleverna till studier enligt MODEM?
- (ix) Vilken beredskap har eleverna för konstruktivistiskt ordnade aktiviteter och vilken är lärarens roll?
- (x) Hur stora är skillnaderna i studieresultat mellan olika skolor och klasser? Mellan flickor och pojkar?
- (xi) Vilka brister finns det i elevernas tänkesätt?
- (xii) Finns det något samband mellan elevernas prestationer och betygen i matematik?

Forskningsproblemen valdes så att resultaten skulle bli värdefulla för det finska läroplansarbetet i matematik. Datainsamlingen genomfördes i tre etapper. Avsikten med MODEM 1 (Haapasalo, 1991) var att mäta hur eleverna behärskade de vanligaste grundbegreppen för linjära funktioner och att få ett mått på deras förmåga att tillämpa dessa i vardagliga situationer. Målgruppen ($n = 447$) bestod av grundskolelever i allmän kurs, mellankurs och fördjupad kurs i årskurs 9* och av gymnasieelever i årskurs 2. Den viktigaste delen i MODEM 1 var dock en utprovning ($n = 268$) av ett datorstyrt undervisningsprogram**, som kunde leda eleven genom samtliga faser i begrepps-bildningsprocessen i varierande ordningsföljd. Vilken fas som helst eller vilken uppgiftstyp som helst kunde utelämnas. Målet var att undersöka de olika fasernas och uttrycksformernas betydelse för begrepps-bildningen. I anslutning till denna utprovning studerades också datorns betydelse för inläringen och elevernas inställning till inlärningsmiljöer av detta slag. Samtidigt kunde elevernas beredskap att arbeta med olika metoder undersökas.

I MODEM 2 (Haapasalo, 1992b) undersöktes inläring av bråk. Inom ramen för experimentet undervisades elever i årskurs 4 i grundskolan ($n = 55$) enligt den systematisk-konstruktivistiska modellen, medan en kontrollgrupp ($n = 94$) fick konventionell undervisning. Problemlösningssprocessen i experimentgruppen undersöktes genom att undervisningen och arbetssätten observerades i processens olika faser.

I MODEM 3 (Haapasalo, 1993) undersöktes inläring av decimaltal och enhetsbyte i årskurs 5. Experimentgruppen ($n = 56$) bestod av samma elever som ett år tidigare deltagit i MODEM 2. Kontrollgruppen omfattade 138 elever i årskurs 5. I det följande presenteras forskningsresultaten i sammandrag. Resultaten från de tre undersökningarna är nästan identiska.

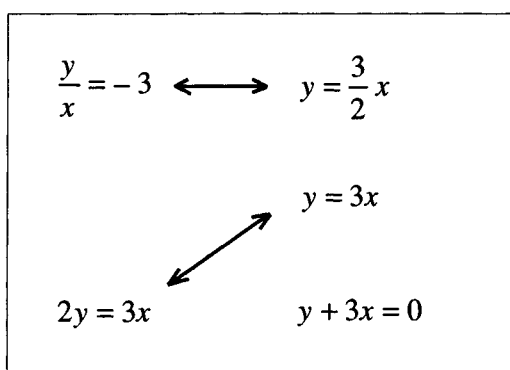
Inläring av grundläggande begrepp i anslutning till linjära funktioner (MODEM 1)

I denna undersökning observerades först undervisningen i skolan. Observationerna visade, att största delen av aktiviteterna i den konventionella undervisningen kretsade kring några stereotypa benämningar och symboler (se t. ex. Haapasalo, 1991, s 19-20). Eleverna

* Numera finns inga nivåkurser i grundskolan i Finland.

** Läsare som så önskar, kan beställa undervisningsprogrammet i fråga genom att sända tre disketter till författaren.

hade små möjligheter att skapa kritiska och relevanta attribut till de använda begreppen. Arbetet med de verbala representationerna gick ofta ut på att upprepa och lära sig regler utantill. Elevernas arbete med symboler handlade mest om mekaniska rutiner. Framställning i form av bilder var bristfällig. De lärde sig inte heller att relatera de olika representationsformerna till varandra, utan uppfattade dem som oberoende av varandra. Oftast stannade de för enskilda kännetecken och förstod inte uppgiften i sin helhet. Figur 8 ger exempel på vanliga och felaktiga lösningar som konventionellt undervisade elever visade upp i sluttesten. I MODEM-gruppen förekom sådana fel i mindre utsträckning. Resultatet visar, att inte ens träning med hjälp av ett stort antal uppgifter av symbolisk karaktär nödvändigtvis leder till att eleverna behärskar uppgifter av detta slag.



Figur 8. Exempel på felaktiga lösningar i ett sluttest i årskurs 9 och i gymnasiet efter konventionellt ordnad undervisning. Uppgiften var att identifiera ekvationer som representerade samma linjära funktion.

Figur 9 visar hur eleverna behärskar begreppet 'gradient' på olika nivåer i årskurs 9 i grundskolan (tre nivågrupper), i årskurs 2 i gymnasiet (två nivågrupper) och i MODEM-undersökningen. MODEM-gruppen bestod av elever i årskurs 8 i grundskolan och hade enligt ett diagnostiskt test inte några förkunskaper på området. Gruppen studerade begreppet under endast två lektioner som följde det undervisningsprogram som beskrivits. De övriga elevgrupperna hade fått konventionell undervisning under flera månader.

MODEM-gruppens resultat var bättre än resultaten för eleverna i allmän kurs i årskurs 9 och nästan lika bra som mellankursens resultat. MODEM-gruppen var den enda av de testade elevgrupperna som övat identifikationsuppgifter. Samtidigt presterade gruppen bättre på produktions- och tillämpningsuppgifterna än på identifikationsuppgifterna. Detta resultat kan tolkas som ett bevis för att identifika-

tionsfasen är ett viktigt steg på vägen mot begreppsförståelse på högre kognitiv nivå. När det gäller att gå från symbolisk till symbolisk form var MODEM-gruppens resultat också mycket bättre än i fördjupad kurs i årskurs 9.

Resultaten ger också anledning till andra intressanta iakttagelser. En observation vi gjorde var att elevernas begreppskunskaper och förmåga att tillämpa sina kunskaper inte utvecklas i takt med den tid som satsas på träning av dessa färdigheter i skolan (se t. ex. resultatet för gymnasiet i figur 9).

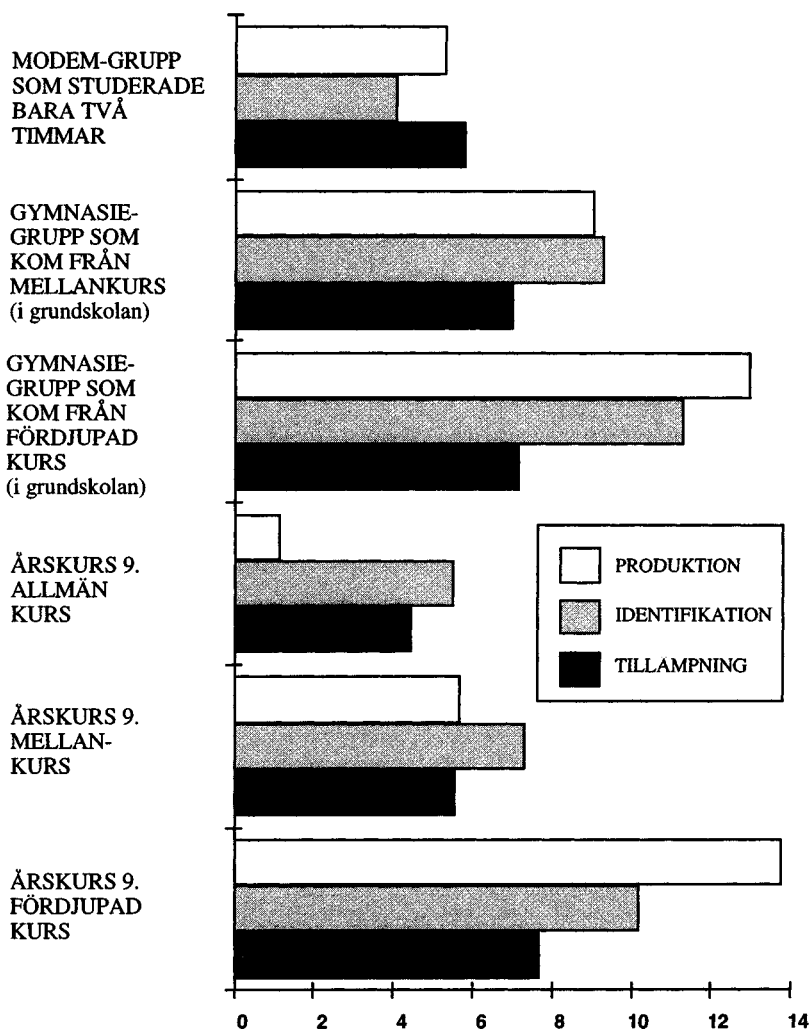
Inom MODEM-gruppen undersöktes de olika fasernas betydelse för begreppsbildningen. Denna granskning visade att elever som hade arbetat först med produktionsfasen och därefter med identifikationsfasen, löste produktionsuppgifter betydligt sämre än elever som arbetat i omvänd ordning. De förras resultat på tillämpningsuppgifterna i testet var också sämre, och de tyckte att uppgifterna var svåra och tråkiga. Svårigheterna och den negativa attityden syntes tydligt under lektionerna. Begreppsbildningen stördes tydligen av att identifikationsfasen eliminerades eller flyttades fram. Däremot hade det inte någon inverkan på elevernas prestationer i det kognitiva testet att produktionsuppgifterna eliminerades helt. Åtgärden hade till och med en positiv effekt på elevernas attityder till studierna.

Resultatet är uppseendeväckande med tanke på att de finska läroböckerna inte innehåller några identifikationsuppgifter och bara några få av de nio möjliga typerna av produktionsuppgifter som beskrivits i det föregående. Undersökningen avslöjar alltså många brister i skolundervisningen, i elevernas arbetsrutiner och mentala processer. Elevernas svaga prestationer förklaras delvis av läroplanen, som kan anses försvåra begreppsbildningen på grund av att de begreppsattribut (se figur 4) som läroplanen tar upp fördelas över olika årskurser, och där behandlas lösryckta från sitt sammanhang.

Inläring av bråk (MODEM 2)

Efter att ha lärt sig de naturliga talen kan eleven ha svårt att förstå, att ett tal kan betyda många olika saker på en och samma gång: ett visst antal helheter, en helhet med ett visst antal lika stora delar, ett visst antal delar av en helhet etc. Det matematiska begreppet 'bråk' är förbundet med begreppet 'delning', som i sin tur är kopplat till procent och procenträkning.

Inom ramen för MODEM 2 var det klart att elevernas begreppsbildning skulle kräva lång tid och att det var fråga om en process som måste planeras med omsorg. Det är inte möjligt att här beskriva



Figur 9. MODEM-gruppens (årskurs 8) resultat efter två lektioners systematisk-konstruktivistisk undervisning och resultaten i årskurs 9 (tre nivågrupper) i grundskolan och i årskurs 2 (två nivågrupper) i gymnasiet efter konventionell undervisning. Siffrorna anger medelpoäng för de olika uppgiftsgrupperna.

experimentets arbetsplan, men några anmärkningar skall ges som en introduktion till den följande resultatredovisningen.

Begreppet bråk betraktades till att börja med bara som ett *objektbegrepp*, det vill säga som ett uttryck beskrivet i verbal och symbolisk form och i form av bilder, sida vid sida i överensstämmelse med MODEM-projektets systematisk-konstruktivistiska modell. Orienteringen inleddes med verbaliseringar av olika problemsituationer i vardagslivet. Så småningom tillkom uttryck eller representationer i form av bilder och symboler. Det visade sig att alla elever hade egna

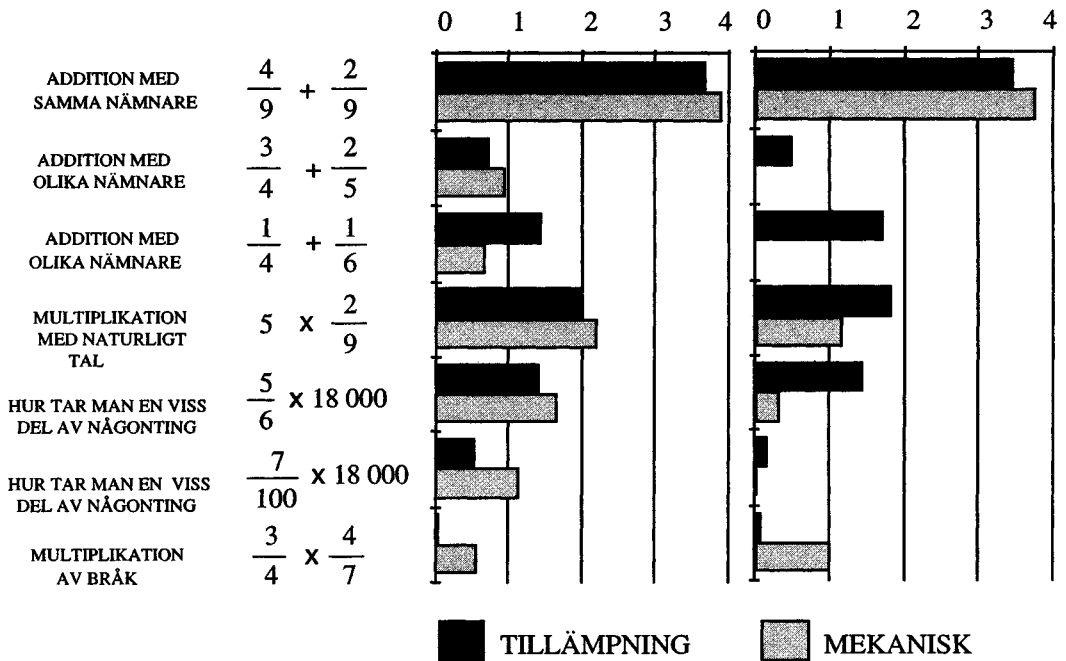
naiva, men fungerande uppfattningar av bråk, ofta i form av verbala representationer. Eleverna kunde ge egna förslag till definitioner av bråk med siffror, men de uppfattade ännu inte bråk som *tal*. De kreativa processer som användes gav goda möjligheter att förverkliga ett av matematikundervisningens metamål: att klassificera, forma och presentera egna tankar, definiera etc. (se Haapasalo, 1993b).

Orienterings- och definitionsfaserna tog ett par lektioner i anspråk. Sedan följde identifikations- och produktionsfaserna och slutligen efter cirka 10-15 lektioner befästandefasen. Nu gavs eleverna möjlighet att lära sig begreppet bråk som tal och som operativt begrepp (t. ex. "en tredjedel av en fotboll och en tredjedel av en tennisboll är olika mycket"). Jämförelserna var motiverande och gjorde det möjligt att planera problemsituationer, där eleverna konstruerade situationsbundna räkneoperationer. På så sätt gavs eleverna möjlighet att knyta sina egna mentala representationer till räkneoperationerna. Mekaniska räknerutiner förekom nästan inte alls. Trots detta var inlärningsresultaten överraskande goda.

Det kognitiva sluttestet innehöll för varje verbal tillämpningsuppgift en motsvarande mekanisk uppgift. Experimentgruppen löste både de mekaniska uppgifterna och tillämpningsuppgifterna betydligt bättre än kontrollgruppen. Inom kontrollgruppen hade testuppgifterna i mekanisk räkning en mycket låg reliabilitet. I experimentgruppen däremot var både tillämpningsuppgifterna och de mekaniska uppgifterna reliabla mått på elevernas begreppskunnande. I figur 10 har experiment- och kontrollgruppernas resultat jämförts på områdena för tillämpad räkning och motsvarande mekanisk aritmetik. Resultaten visar att det inte är rättvist att kritisera matematikundervisningen bara för att eleverna inte kan lösa tillämpningsuppgifter. Det ser ut som om eleverna inte skulle lära sig vare sig matematiska strukturer eller matematisk tänkande.

Eleverna i kontrollgruppen behövde passande kontextuella formuleringar för att lösa uppgifterna korrekt. Så var fallet i synnerhet vid räkneoperationer med oliknämninga bråk. I experimentgruppen var situationen omvänd. Eleverna i denna grupp löste mekaniska uppgifter till och med bättre än motsvarande verbala uppgifter.

Resultaten tyder på att läroböckernas och den konventionella skolundervisningens satsning på rutinfärdigheter inte ger önskat resultat. Kontrollgruppens prestationer tyder på, att man måste förhålla sig kritiskt till undersökningar där begreppskunskaper har testats med enbart mekaniska uppgifter. MODEM-gruppens bättre resultat visar, att det är viktigt att skapa inlärningsmiljöer som stimulerar eleverna att placera in också aritmetiska operationer i meningsfulla sammanhang.



Figur 10. Resultat på områdena för tillämpning och motsvarande mekanisk aritmetik. (MODEM-gruppens resultat till vänster i bild, kontrollgruppens till höger). Siffrorna anger medelpoäng för de olika uppgiftstyperna.

MODEM-projektets problemorienterade inlärningsmiljöer gav också goda möjligheter att undersöka elevernas beteende i problemsituationer. De vanligaste orsakerna till elevernas svårigheter i problemlösningsarbetet var att de inte kom på eller kunde verkställa lösningsidén. Eleverna bad läraren eller andra elever om hjälp. Målet i experimentet var att eleverna skulle klara sig framåt på egen hand och att läraren skulle hålla sig i bakgrunden. Detta lyckades också ganska bra, men lärarna måste hela tiden bekämpa sin spontana vilja att hjälpa eleverna i ett för tidigt skede eller att fråga för mycket. I början var en del elever aggressiva och frågade läraren, varför han inte undervisade dem. Efter några månader var situationen den omvända: Varför kan vi inte själva få komma fram till lösningen?

Inläring av decimaltal och enhetsbyte (MODEM 3)

MODEM 3 handlade om decimaltal (Haapasalo, 1993). Försökets läroplan gjordes upp enligt samma principer som i fråga om räkning med bråk. Decimaltalen förbands med mätning, och 'noggrannhet' var ett centralt begrepp från första början. Inlärningsmiljöer planerades, där eleverna skulle

- mäta ett och samma föremål med olika instrument
- tänka över vad noggrannhet innebär i olika sammanhang
- förstå, att mätning alltid är en relativ sak (i den mening som barnet uppfattar "relativitet")
- tänka efter hur man kan ge uttryck åt mätningens resultatet.

På samma gång kunde effekten av olika infallsvinklar undersökas. Det visade sig att benämningarna* deci, centi och milli direkt kunde användas som synonymer till tiondel, hundradel och tusendel. Begreppsbildningen vare sig stördes eller blev långsammare av det. Tvärtom lärde sig eleverna enhetsbyte på köpet. Liksom i fråga om bråk var det viktigt att inte genast tolka mätningens resultatet som ett tal; det var bara ett uttryck med en viss noggrannhet. I orienteringsfasen ingick därför typiska, vardagliga problemsituationer, där eleverna övade mätning med många olika instrument. Numera finns det mycket goda möjligheter att använda både analoga och digitala mätinstrument, där noggrannheten lätt kan varieras. Redan i början av orienteringsfasen framgick det att eleverna inte hade några som helst svårigheter med noggrannhetsbegreppet, som vid konventionell undervisning anses vara ett av de svåraste begreppen på lågstadiet.

Eleverna konstruerade också egna "instrument" som de kunde använda vid identifikationsträningen och när de växlade mellan olika representationsformer. Alla möjliga instrument (olika linjaler, termometrar, pulsräknare, klockor, mätglas, provrör, hushållsmått) användes, som kunde tänkas konkretisera både mätningen och representationsformerna med bilder och symboler. Identifikations- och produktionsfaserna omfattade cirka 10-15 lektioner varefter befästandefasen tog vid. Under denna fas fick eleverna lära sig avrundning, räkna med decimaltal, enhetsbyte, användning av decimaltal i problemsituationer och i samband med procenträkning. I överensstämmelse med den systematisk-konstruktivistiska modellen utvecklade eleverna själva de procedurer som användes. Exempel på inlärningsmaterial finns i t.ex. Haapasalo, 1992a, s 74-97. Inte heller i MODEM 3 förekom mekanisk räkning mer än till namnet. Trots det löste experimentgruppen de mekaniska uppgifterna i slutprovet minst lika bra som kontrollgruppen, som hade undervisats konventionellt och tränats i mekanisk räkning med hjälp av läroböcker. Resultaten är i många avseenden analoga med utfallet av MODEM 2 (räkning

* Dessa uttryck förekommer inte som separata ord i svenska (eller i andra språk), vilket tyder på att enhetsbyte inte lärs in som begreppsmässig kunskap, utan som separata procedurer i samband med olika enhetsbyten.

med bråk). I en uppföljningsundersökning kring enhetsbyte efter ett år hade försöksgruppen fortfarande bättre resultat än kontrollgruppen. De enskilda eleverna i experimentgruppen uppvisade en större homogenitet med avseende på de uppgiftsspecifika resultaten.

Resultat från tre delstudier i sammanfattning

Begreppsbildningen visade sig vara en tidskrävande process, där det är didaktiskt fruktbart att hantera orienterings-, definitions-, identifikations-, produktions- och befästandefaserna var för sig. I synnerhet identifikationsfasen är av stor betydelse för begreppsbildningen och bidrar till att göra inlärningsmiljön positiv för eleverna. I denna fas är elevernas kommunikation livlig och deras arbetsmotivation hög. En elevgrupp i MODEM 1, som först arbetade med identifikationsfasen och därefter med produktionsfasen, presterade mycket bättre resultat på produktions- och tillämpningsuppgifter än en annan elevgrupp, som gick igenom samma faser i motsatt ordning.

De olika faserna i begreppsbildningsmodellen utgör också en mångsidig ram för mätning av elevernas begreppskunskaper. Produktionsuppgifterna mätte begreppskunskaperna med den allra högsta reliabiliteten, även om dessa uppgifter visade sig vara svåra för eleverna. De verbala uppgifterna hade den högsta reliabiliteten, i synnerhet de uppgifter där eleverna fick växla från verbal form till verbal form. Identifikationsuppgifterna hade klart lägre reliabilitet, med undantag av uppgifterna mellan verbala former. Uppgifter i verbal form hade en klart högre korrelation med andra uppgifter i testet än de som innehöll bilder eller symboler.

Mekaniska räkneuppgifter och enkla tillämpningsuppgifter visade sig mycket opålitliga vid mätning av begreppskunskaper, i synnerhet uppgifter med bråkräkning.

Resultaten på identifikationsuppgifterna hade ett mycket högt samband med resultaten på produktions- och tillämpningsuppgifterna. Likaså var sambandet högt mellan produktions- och tillämpningsuppgifterna. Däremot var sambandet nästan obefintligt mellan tillämpningsuppgifterna och de uppgifter som förutsatte att eleverna behärskade motsvarande aritmetiska operationer.

Inlärningsmiljöer av systematisk-konstruktivistisk art ser ut att ge betydligt bättre inlärningsresultat än konventionell skolundervisning, och eleverna är mycket positiva till sådana miljöer. Enligt lärarna i experimentet ökade elevernas målmedvetenhet, uthållighet och konsekvens i arbetet, och effekterna överfördes också till andra skolämnena. I sluttestet behärskade experimentgruppen det begreppsområde

som varit föremål för inläring betydligt bättre än kontrollgruppen. Resultatet var detsamma i flertalet deltest och på de enskilda uppgifterna.

Den systematisk-konstruktivistiska undervisningen förbättrade både flickornas och pojkarnas prestationer på nästan alla områden, men på så sätt att flickornas försprång minskade med tiden. Pojkarna tycktes med andra ord dra större nytta av undervisning av det ifrågavarande slaget (Haapasalo, 1992, s 52-58).

Av de olika uttrycksformerna var den verbala representationen svårast för eleverna. Å andra sidan mätte de verbala uppgifterna elevernas begreppskunskaper mer reliabelt än uppgifter på det bildområdet och det symboliska området. Experimentgruppen inom MODEM hade betydligt bättre resultat än kontrollgruppen på flertalet uppgifter. Det var betydligt svårare för eleverna att växla inom en och samma representationsform än att gå från en form till en annan. I identifikationsfasen kunde någon sådan skillnad inte konstateras. Av de enskilda representationsformerna behärskade eleverna inte någon enskild form konsekvent bra eller dåligt. Den sannolika orsaken till detta är, att eleverna behandlar information på många olika sätt. Skillnaderna mellan elever kan vara mycket stora. De mentala processerna varierar också från situation till situation. Sättet att benämna begrepp har också stor betydelse för inläringen, vilket kunde ses tydligast i MODEM 1 (se Haapasalo, 1991, s 79).

Analyserna av de konventionella läroböckerna och lektionerna visade att innehållet i hög grad bidrar till ytliga begreppskunskaper hos eleverna och att undervisningen var mycket stereotyp. Därför var det inte överraskande att kontrollgruppens elever hade många felaktiga uppfattningar om centrala begrepp i skolmatematiken. Elevernas svaga prestationer i de mekaniska uppgifterna var överraskande. Sådana uppgifter ingick i stor mängd i läroböckerna, men trots det hade kontrollgruppen betydligt sämre resultat i till exempel räkning med bråk än MODEM-gruppen, som undervisades utan läroböcker och utan drill med mekaniska uppgifter.

I anslutning till den datorstödda undervisningen visade det sig att flickorna hade betydligt mindre erfarenhet av datorer och var mer ängsliga för denna form av inläring än pojkarna. Flickornas rädsla riktade sig mer mot datorprogrammet än mot själva datorn. Flickorna tyckte i högre grad än pojkarna att den datorstödda inläringen var rolig och intressant i jämförelse med vanlig undervisning.

Mängden erfarenhet av datorer och betygen i matematik hade inte något samband med elevernas inställning till den datorstödda undervisningen. Intrycket av experimentet är, att det är möjligt att ordna inlärmiljöer av systematisk-konstruktivistisk art och att öka

elevernas arbetsberedskap också med hjälp av dator. Men den datorstödda undervisningen ser inte ut att ge bättre resultat eller mer positiv inställning till undervisningen. Det visade sig nämligen att en grupp elever som arbetade utan dator med exakt samma uppgifter som datorgruppen presterade lika goda resultat och hade en lika positiv inställning till sin studiemiljö som de med datorstöd.

Forskningsresultatens implikationer för läroplanen

De tre begreppsområden som undersöktes genom MODEM 1-3 visade sig vara mycket svåra för eleverna i och med att deras begreppsbildning inte nådde produktions- och tillämpningsnivåerna. Studier i överensstämmelse med MODEM ser likväl ut att ge klart bättre inlärningsresultat än konventionellt bedrivna studier. Men detta förutsätter att läraren sätter sig in i den konstruktivistiska inlärningsfilosofin. En annan viktig förutsättning är att läromedlen och lärarutbildningen utvecklas.

Begreppsbildningen inom MODEM vad gäller räkning med bråk och tal i decimalform nådde planenligt upp till produktionsfasen. Men trots att material av ny typ fanns tillgängligt för alla delfaser, hade lärarna vissa svårigheter att planera inlärningsituationerna utifrån detta material. Experimentgruppens goda resultat också i mekanisk räkning visar, att den symboliska matematiken kan reduceras radikalt till förmån för begreppsinläring och problemlösning. Begreppsinläringen borde ske kontextuellt i stället för att tyngdpunkten läggs på aritmetiska eller algebraiska rutiner. Detta förutsätter att de mest stränga behavioristiska målsättningarna i läroplanen av typen "lära sig att läsa och beteckna bråk" ersätts med processmål. En prototyp finns i Haapasalo 1992b, s 83:

Inlärningsmiljöerna skall arrangeras så att eleven samtidigt har möjligheter att praktiskt, i form av bilder samt i verbal och symbolisk form göra uttolkningar av begreppet bråk. Inlärningsmiljöer och studiematerial baseras på sådana kognitiva strukturer som eleven redan kan använda i problemlösningssituationer som intresserar eleven. Huvudvikten i den begreppsliga orienteringsfasen läggs vid elevens förmåga att i bild och verbalt ge uttryck åt olika delar av en helhet. Utvecklingen sker successivt och tar sikte på att eleven lär sig använda symboliska uttrycksformer.

Referenser

- von Glasersfeld, E. (1989). *Cognition, Construction of Knowledge, and Teaching. Synthese* 80, 121-140
- Haapasalo, L. (1991). Konstruktivismi matemaattisen käsitteenmuodostuksen ohjaamisessa ja analysoimisessa. Jyväskylän yliopisto: Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 43. [Constructivistivism in the guidance and analysis of mathematical concept building. English abstract. University of Jyväskylä, Institute for Educational Research. Research report 43.]
- Haapasalo, L. (1992a). *Graafisen alan matematiikkaa*. VAPK-Kustannus Oy. Helsinki.
- Haapasalo, L. (1992b). Murtolukukäsitteen konstruktivistinen oppiminen. Constructivist learning of fractions. Jyväskylän yliopisto: *Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia* 51. [Constructivist learning of fractions. English abstract. University of Jyväskylä, Institute for Educational Research. Research report 51.]
- Haapasalo, L. (1993a). Desimaalilukujen ja yksikönmuunnosten konstruktivistinen oppiminen. Jyväskylän yliopisto: *Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia* 55. [Constructivist learning of decimals. English abstract. University of Jyväskylä, Institute for Educational Research. Research report 51.]
- Haapasalo, L. (1993b). *Konstruktivistiska riktlinjer för utvecklandet av matematikundervisningen i Finland*. Manuskript för en rapport från Nordisk konferens om matematikdidaktik i Åbo den 9-12 augusti 1993.
- NCTM (1989). Working Groups of the Commission on Standards for School Mathematics of the NCTM. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: Author.
- NCTM (1991). Working Groups of the Commission on Teaching Standards for School Mathematics of the NCTM. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Virginia: Author.

Models for learning activities and assessment from a constructivist perspective

Abstract

Constructivist ideas accentuate active mental processes of the pupil involved in trying to build a picture of reality and trying to change it in social interaction with others. Obviously therefore it seems to be fashionable to learn mathematics in everyday situations. However, when trying to provide children with opportunities for mathematical constructions we have to provide them with opportunities to learn concepts and structures, not only context oriented knowledge and routines. In the author's MODEM -project (Model Construction for Didactic and Empirical Problems of Mathematics Education) learning of mathematical concepts has been investigated within 'system-

matic constructivism'. This means that mathematical concept building is seen as a process in which the phases of orientation, definition, identification, production and reinforcement are systematically involved. These phases, connected with the different kinds of representations (verbal, symbolic, graphic) form the framework of the theory. The article introduces a model for constructing and assessing of mathematical knowledge from this point of view.

Author

Lenni Haapasalo is associate professor of mathematics and science education at the Department of Teacher Education, University of Jyväskylä, Finland.

Address

Department of Teacher Education, University of Jyväskylä,
P.O. Box 35, FIN-40351 Jyväskylä, Finland

Författaren till denna artikel har nyligen skrivit en bok på finska om hur man kan utveckla undervisningen efter konstruktivistiska kunskapsteorier:

Haapasalo, L. (1994). *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu* [Inläring, kunskap och problemlösning]. Jyväskylä: Medusa-Software.

För mer information eller beställning, kontakta:

Medusa-Software, Alakoskentie 22,
SF-40800 Vaajakoski, Finland.
E-mail: Lenni@tukki.jyu.fi