Algorismus i Hauksbók

Otto B. Bekken

> Gerdu þik tolvisan vel,
> þat þurfu kaupmenn mjok.
> (Kongespeilet ca. 1260)

I Kongespeilet fra 1260 sies det som kjent, at kunnskap i regning er nyttig for kjøpmannen, men vi vet ellers lite om hvordan regningen foregikk før 1300-tallet her i Norden. I den norsk-islandske Hauksbok fra ca.1310 finner vi imidlertid en innføring i regning med hindu-arabiske tall. I denne artikkelen[1] søker vi svar på følgende spørsmål: Hva er kildene for dette? Hvor original er den? Hva sier den oss om læring og forståelse av matematikk i 1300-tallets Island-Norge i forhold til ellers i Europa?

I Codex Arnamagnæanus 544 qv, en del av Hauksbók, finner vi en innføring i regning med hindu-arabiske tall, den eldste regnebok med "våre" tall på et nordisk språk. Vår interesse for denne avhandlingen, som kalles Algorismus, ble vakt av følgende omtaler av den:

> Hauks "Algorismus" er nok for størstedelen en temmelig tro oversettelse av latinske arbeider, særlig Sacroboscos "Tractatus de Arte Numerandi" (Brun, 1964, s 207).

> ... Carmen de Algorismo. Det er dette digt, der ligger til grund for den islandske "Algorismus" i Hauksbók.; ... (Jónsson, 1892-96, s CXXXI).

> A translation of the Carmen de algorismo, written about 1325-1330, by a secretary of the celebrated icelander Haukr Erlendsson. ... though in a few places it differs from that version of the Carmen published by Halliwell, it is without doubt a translation of the same work (Benedict, 1914, p. 19).

Disse svakt divergerende oppfatningene fikk oss til å spørre: Hva er rett? Hva var kilden til Algorismus? Hvor original er den?

***Otto B. Bekken** är førsteamanuensis ved Høgskolen i Agder, Kristiansand i Norge.*

---

1 Artikeln baseras på ett föredrag som hölls vid ett nordiskt forskarsymposium i Reykholt 24.08.1994 och på "Algorismus i Hauksbók i Europeisk Perspektiv" utgiven i Agder Distrikthøjskoles skriftserie, 1985 i samarbete med E. Brekke och M. Christoffersen.

Hva forteller den oss om læring og forståelse av matematikk i 1300-tallets Island og Norge i forhold til ellers i Europa? Alle som kunne lese Algorismus, kunne kanskje lest den på latin. Hva kunne være grunnen til å lage en oversettelse? Vi vet ellers at Petrus Philomena de Dacia, Peder Nattergal fra Danmark, i 1291 laget en kommentar på latin til Sacroboscos Algorismus Vulgaris, som fikk stor utbredelse i Europa. Finnes det her noen sammenheng til Algorismus i Hauksbók?

Om Hauksbók og Haukr Erlendsson

Figur 1. Hauks segl med inskripsjonen Haukonis Filii Erlendi hemtet fra Munch (1847), s 179.

Hauksbók er ett av de få middelalderhandskrifter der vi kjenner hovedhanda ved navn. På ett av bladene av AM 371 qv [2], navngir skriveren seg som Haukr Erlendsson. Så langt vi kan spore handskriftets historie tilbake i tida, har det derfor båret navnet Hauksbók og vært tilskrevet Haukr Erlendsson.

Haukr nevnes i de islandske annalene noen ganger. Vi vet ikke når han ble født, men vet at han ble lagmann på Island i 1294 og kom til Norge ca. 1301. I brev fra 1311 kalles han Gulatings lagmann og ridder. Fram mot 1322 ser det ut til at han har fungert som lagmann i Gulating. Fra 1329 og fram mot sin død i Norge i 1334 forekommer han flere ganger i norske brev, nå bare kalt Herr Haukr Erlendsson.

Tre handskrifter utgjør Hauksbók: AM 371 qv, 544 qv og 675 qv. Vi finner minst 15 ulike skriverhender i tillegg til hovedhanda, Haukr Erlendssons egen. Handskriftet må være kommet i stand før Hauks død i 1334, men det har rådd ulike oppfatninger mht. nedskrivningstida. Karlsson (1964, s115) mener at den delen av Hauksbók som

2 Codex Arnamagnæanus AM 544 qv angir katalognummeret til handskriftet i Arni Magnussons skriftsamling (qv = quarto) – tilsvarende for AM 371 qv, 675 qv, etc. Bladene sidenummereres f. eks. med 13v = 13 verso eller 16r = 16 rekto. Videre refereres det i teksten til GKS, Gammel Kongelig Samling i København, NKS, Ny Kongelig Samling i København, DKB, Det Kongelige Bibliotek i København som er andre handskriftsamlinger.

inneholder Algorismus, må være skrevet under ett av Hauks opphold på Island, i åra 1306-1308.

Algorismus i Hauksbók er skrevet av ei hand som er blitt betegnet som Haukr Erlendssons "første islandske sekretær". Om språkforma sier Jónsson (1892-96), s. XLVI): "Den "første" sekretærs retskrivning er i det hele rent islandsk, uden nogle som helst norske ejendommeligheder."

Algorismus ble utgitt for første gang sammen med en dansk oversettelse av P.A. Munch i 1848 i Annaler for nordisk Oldkyndighed og Historie. Seinere er avhandlingen utgitt av Jónsson i Hauksbók (1892-96), og endelig i faksimileutgaven av Hauksbók fra 1960 ved Helgason.

Foruten i Hauksbók (AM 544 qv bl. 90r-93r) finner vi Algorismus, avhandlingen om innføring og bruk av de hindu-arabiske tall, også i det noe yngre GKS 1812 qv (bl. 13v-16r). AM 685 qv inneholder også Algorismus, og et fragment fins i AM 716 III qv, som dateres til 1400-tallet (Kålund, 1889-94, s165).

Munch (1847, s 198) mente å gjenkjenne en av skriverne av Hauksbók i AM 732 qv, som bl.a. inneholder en kommentar til feilen ved den julianske kalender (Beckman & Kålund, 1914-16, s 237-8):

Meistari Galterus fann þær 8 momentur, er á skortir at sólin gangi hring sinn á árinu. Dær átta momentur takast af þeim 6 stundum, er umfram eru þá 5 daga ok 60 ok 300, þat er fullt sólarár. Dessar 8 momentur, eru á fimm árum ein stund, en á hundradi ára tolfrødu eru þat stundir 24, þat verdr dagr ok nótt. En fyrir því at sá dagr er eigi upptekinn, þá boka sólhvorf of tvau døgr á hundradi vetra tolfrødu.

Mester Galterus fant de 8 momenter (momenta=1 1/2 minutt) som mangler på at sola går ringen sin på ett år. De 8 momentene tas fra de 6 timene som er over de 5 dagene og 60 og 300, det er et fullt solår. Disse 8 momentene er en time på 5 år. Og i løpet av 120 år (hundrad tólfrøtt = et stort hundre) blir det 24 timer. Det blir en dag og ei natt. Men fordi den dagen ikke er tatt med, så flytter solvervet seg mer enn 2 halvdøgn (døgr = halvdøgn) i løpet av 120 vintre.

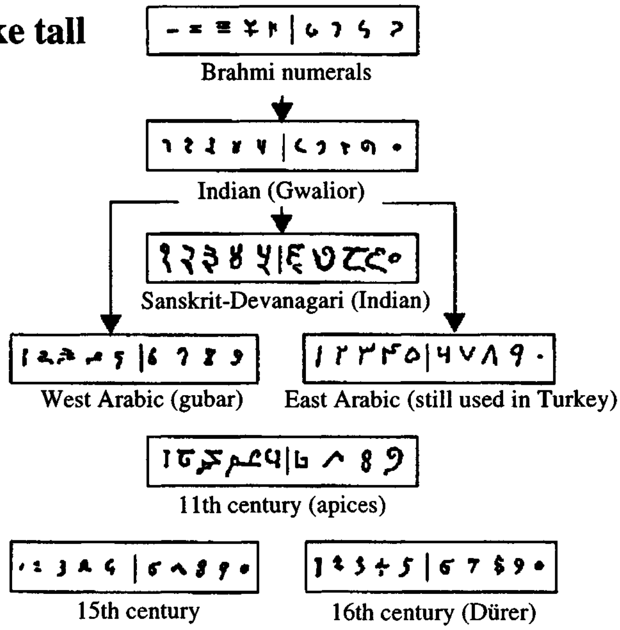
Munch (1847, s 201-2) sier at dette:

> ... røber en for en Mand i Aaret 1313 sjælden astronomisk Indsigt ... . Altsaa vare Hauk Erlendssön og hans Autoritet "Mester Galterus" allerede ved Begyndelsen af 14de Aarhundrede opmærksomme paa den Feil, hvorom det ellers heder at man först bemærkede den i det 15de Aarhundrede.

Allerede Sacrobosco pekte på denne feilen i sin De Computo Ecclesiastico fra 1232. Han foreslår der en forbedring, som vi vet kom først i 1582 under pave Gregor XIII.

De hindu-arabiske tall

> Det var inderne som fant den geniale metoden til å uttrykke alle tall ved ti symboler med verdi etter sin posisjon ... så selvfølgelig for oss i dag at vi glemmer ... at den unnslapp antikkens genier. (Laplace)



Figur 2. Våre tallsymbol spores tilbake til Brahmi-symbolene.

Munch (1847) kaller tallene i Algorismus for "arabiske tall", slik som vanlig var på 1800-tallet. Som figur 2 ovenfor etter Menninger (1969, s 418) viser, kan våre tallsymbol spores tilbake til de indiske Brahmi-symbolene. Den eldste referansen til dette posisjonelle tallsystemet utenfor India kjenner vi fra år 662 i Syria (Smith, 1958, s 167). Araberne kalte alltid tallsymbolene og regnemetodene for indiske. Deres første systematiske møte med dette tallsystemet som vi kjenner til, fant sted i Bagdad under Khalif al-Mansur i 773. Brahmaguptas astronomiverk ble da oversatt til arabisk. Den eldste kilde på arabisk kjent i dag er Al-Uqlidisis Al-Hisab al-Hindi skrevet i Damaskus i 953. Hva disse arabiske skriftene *egentlig* refererer til med hensyn til indisk opphav, er først blitt klart for oss på 1900-tallet, da vi fikk oversettelser av og kommentarer til hinduenes matematikkverk. I dag er disse tilgjengelige for oss på engelsk (Clark, 1930; Colebrooke, 1817; Rangacarya, 1912):

Aryabhatas Aryabhatiya fra 499
Brahmaguptas Brahma-sphuta-siddhanta fra 628
Mahaviras Ganita-sara-sangraha fra 850
Bhaskaras Siddhanta-siromani (Lilavati) fra 1150

Mahavira understreker enda sterkere enn Kongespeilet hvor viktig det var å lære seg å regne (Rangacarya, 1912, p. 5):

> In all transactions which relate to wordly, Vedic or other similar religious affairs, calculation is of use. In the science of love, in the science of wealth, in music and in drama, in the art of cooking, in medicine, in architecture, in prosody, in poetics and poetry, in logic and grammar and such other things, and in relation to all that constitutes the peculiar value of the arts, the science of calculation (ganita) is held in high esteem.

I India går bruken av det desimale posisjonssystemet i hvert fall tilbake til ca. 300 f.Kr. Som Algorismus i Hauksbók, starter Mahavira med å forklare dette posisjonssystemet. Han navngir enerplass, tierplass osv., opp til 25. plass og lister opp åtte regneoperasjoner: multiplikasjon, divisjon, kvadrering, kvadratrot, kubering, kubikkrot, addisjon og subtraksjon.

Algorismus i Hauksbók navngir bare de to første plassene. Enerne kaller *fingr* og tierne kalles *lidr*, mens de andre kalles *samsett tala.* Vi finner her også norrøne navn på 7 regningsarter:

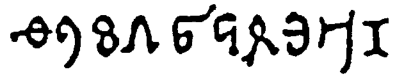
vidrlagning	=	tillegging	=	addisjon
afdráttr	=	fratrekking	=	subtraksjon
tvífaldan	=	tofolding	=	dobling
helmingaskipti	=	halvdeling	=	halvering
margfaldan	=	mangfolding	=	multiplikasjon
skipting	=	deling	=	divisjon
taka rót undan	=	ta rot av	=	rotutdraging

Ingen indiske kilder behandler dobling og halvering som egne regningsarter, men disse kommer til i arabiske kilder.

Algorismer

Figur 3. Muhammed Al-Khwarizmi avbildet på ett sovjetisk frimerke gitt ut i 1983 til minne om hans 1200-års fødseldag.

Hér byrjar algorismum.
List þessi heitir algorismus.
Hana fundu fyrst indverskir menn ok skipudu med .x. stofum þeim er svá eru ritnir:



Den fremste matematikeren i Bagdad på 800-tallet var Muhammed ibn Musa Al-Khwarizmi. Han er mest kjent for sin bok Aljabr w'al muqabalah, opphavet til vårt ord og emne algebra. Også han understreker sitt praktiske siktepunkt (Rosén, 1831, s 3):

> AL MAMUN ..., - has encouraged me to compose a short work on Calculating by (the rules of) Completion and Reduction, confining it to what is easiest and most useful in arithmetic, such as men constantly require in cases of inheritance, legacies, partition, lawsuits, and trade, and in all their dealing with one another, or where the measuring of lands, the digging of canals, geometrical computation, ...

Al-Khwarizmi skrev også ei regnebok. Denne ble oversatt til latin i Toledo omkring 1130, og en versjon finnes i dag i Cambridge. Teksten begynner slik (Vogel, 1963, p. 9):

> DIXIT algorizmi: laudes deo rectori nostro atque defensori dignas ... deprecemurque ... ut auxilietur nobis super bona uoluntate in his que decreuimus exponere ac patefacere: ***de numero indorum per .IX. literas ...***
>
> DIXIT algorizmi: Cum uidissem yndos constituisse .IX. literas in uniuerso numero suo ... Fecerunt igitur .IX. literas, quarum figure sunt he:

I oversettelse:

> Algorizmi sier: *La oss gi Gud, som styrer og forsvarer oss, en ham verdig lovprisning ... at han ved sin gode vilje hjelper oss i dette vi har besluttet å legge fram og klargjøre:* ***Om indernes tall ved IX tegn ...***
>
> Algorizmi sier: *Da jeg så at inderne i hele sitt tallunivers gjennomførte bruken av de IX tegn ... De laget altså IX tegn hvis form er:*

Disse ni tegn mangler i Cambridge-handskriftet, men er nedenfor gjengitt fra det eldste eksempel vi kjenner i Europa, Codex Vigilanus fra 976 (Vogel 1963, p. 51):

Som vi har sett ovenfor (s 12) skriver Algorismus i Hauksbók tallene også med et tegn for null slik som var vanlig på 1300-tallet.

Vi ser at Al-Khwarizmis navn er blitt latinisert til *algorizmi*. Herfra har vi fått ordet algoritme, og herfra kommer Hauksbóks betegnelse Algorismus, som navn på det araberne kaller hinduisk regning (al-Hisab al-Hindi, Saidan, 1978).

I middelalderens Europa finner vi fire typer handskrifter om tall og tallregning:

> *Tallteoretiske verk* som bygger på en gresk tradisjon fra Euklid og Nikomakos via Boëthius til Jordanus Nemorarius (ca. 1225).
>
> *Abakus-verk* om handelsregning på regnebrett med "calculi", "jetons" eller "counters", og med romertall.
>
> *Computi ecclesiastici*, dvs. veiledning i kirkekalenderen, for å regne ut påske og andre flyttbare helligdager.
>
> *Algorismer* – om grunnleggende regneteknikker i et desimalt, posisjonelt tallsystem, som bygger på Al-Khwarizmis tekster.

Her i Norden finner vi bare de to siste typene representert. En diskusjon av komputus-litteraturen i Norden finnes hos Beckman & Kålund (1914-16).

De tre algorismene som framfor andre fikk utbredelse i Europa, ble skrevet på 1200-tallet:

Leonardo Fibonacci fra Pisas Liber Abaci fra 1202
Alexander de Villa Dei's Carmen de Algorismo fra tida etter 1200
Johannis de Sacroboscos Algorismus Vulgaris fra ca. 1230

I det lange løp var det Fibonaccis verk som fikk størst betydning, fordi mange trykte aritmetikkbøker fra Italia ca. 1500 bygget på det. I den perioden som vi ser på, rundt 1300, hadde de to andre størst utbredelse.

Kildene for Algorismus i Hauksbók

Smith and Karpinski (1911, p. 99) framholder at det snarere var handelsmannen enn vitenskapsmannen som brakte de hindu-arabiske tall til Europa. Økt handel førte til større behov for effektive regnemetoder. Fibonaccis Liber Abaci og de første trykte italienske matematikkverkene har et slikt praktisk siktemål (cf. Swetz, 1987). Det er ikke tilfelle når det gjelder algorismene til Villa Dei og Sacrobosco. De skrev lærebøker for universitetsstudenter. I tillegg til algorismene vi skal omtale nærmere her, skrev de også de to mest utbredte komputusverk fra denne tida. Vanskelighetene med kalenderutregningen er utvilsomt én av grunnene til det oppsvinget vi finner i matematiske studier ved klosterskoler og universiteter på 1200-tallet. Etter Gulatingsloven var det straff for en prest som ga uriktige opplysninger om høytidsdagene.

Benedicts grundige studie (1914) viser hvilken sentral rolle Carmen de Algorismo og Algorismus Vulgaris må ha spilt gjennom flere århundrer, og presenterer også Petrus Philomena de Dacia på en måte som yter verket hans rettferdighet (1914, p. 16f):

> ... In this work are found not only careful and scholarly explanations of the text of Sacrobosco, and numerous illustrative examples, but also additions to the algorism especially in the matter of proofs and the subject of series and progression. The commentary was written in 1291 ...

Algorismus i Hauksbók kaller hun (1914, p. 17f):

> A translation of the *Carmen de algorismo*, written about 1325-30, by a secretary of the celebrated Icelander, Haukr Erlendsson ...

Diktet Carmen de Algorismo ble først pekt på som kilde for Algorismus av Den Arnamagnæanske Kommision i Antiquarisk Tidsskrift 1846-48, s 107.

Alexander de Villa Dei kom fra byen Villedieu i Normandie. Han døde i 1240, underviste i Paris i 1209, daterte sitt computus-verk i 1200 og skrev antakelig Carmen de Algorismo omtrent på samme tid. Alle hans verk, også en latinsk grammatikk, ble skrevet på vers.

Sjøl om de indiske regnemetodene er mer effektive ved regning på papir, stiller de også større mentale krav. Det blir nødvendig å huske verdien av flere tallsymbol, å memorere addisjons- og multiplikasjonstabellene for disse symbolene, å huske de posisjonelle prinsippene og å automatisere regneoppsett for de ulike regningsartene ut fra dette. Det er lettere å pugge og å huske slike ting på vers, noe som forklarer denne uvante formen. En typisk læreboksform var derfor verseformen, men også dialogformen.

Johannis de Sacrobosco var fra Holywood (= Halifax i dag) og studerte i Oxford. Omkring 1220 dro han til Paris og ble der professor i matematikk og astronomi. Han sto på toppen av sin berømmelse 1230-1235. Da skrev han flere verk:

De Sphaera Mundi, basert på Ptolemaios' Almagest. Dette ble det rådende astronomiverket i Europa fram mot 1600.

De Computo Ecclesiastico, hvor han bl.a. peker på den voksende feilen i den julianske kalenderen og foreslår en forbedring. Denne kom først 350 år seinere, i 1582 under pave Gregor XIII (Rickey, 1985).

De Algorismo, som ifølge Cantor (1913, p. 88) er:

> ... eine Sammlung von Regeln ohne den geringsten Beweis, ohne Zahlenbeispiel, ohne Erwähnung einer Quelle, aus welcher der Verfasser schöpfte. Aber in dieser Nüchternheit, in dieser Kürze eignete es sich vortrefflich dazu, den Grundriss zu einem die zahlreichen Lücken mündlich ergänzenden Unterrichte zu bilden, und wurde es Jahrhunderte lang in solcher Weise benutzt.

Curtze (1897, p. VI) fant hele 45 avskrifter av De Algorismo bare i Erfurt, München og Wien. Grunntrekkene ble lest opp og skrevet av setning for setning. Innimellom ble de så kommentert av foreleseren med eksempler. Det er en slik kommentar vi har fra Petrus Philomena de Dacia, se Curtze (1897). Sacroboscos De Algorismo går også under titlene Algorismus Vulgaris eller Tractatus de Arte Numerandi i avskriftene.

Historikerne er enige om at algorismene bygger på en eller annen versjon av Al-Khwarizmis regnebok, men både Villa Dei og Sacrobosco avviker på vesentlige punkter fra det Cambridgemanuskriptet som vi har sett på foran. Al-Khwarizmi behandler vanlige brøker og også seksagesimalbrøker slik som andre indiske og arabiske kilder. Alt om brøkregning mangler hos Villa Dei, Sacrobosco og også i Hauksbók. Det eneste spor av brøk i Hauksbók finner vi under *Um helmingaskipti* (Jónsson, 1892-96, s 419):

En ef þú vill helming af taka, þá rita sliká tolu sem þú vill, ok tak af helming hinni fyrstu fígúru ef hon er jofn. En ef hon er újofn, þá skipt í helminga því er af einum hleypr, ok tak upp einn, en rita yfir uppi þann staf er helming hvers hlutar merkir, ok vér kollum semiss, ok svá er gerr. 9

Men hvis du vil ta halvdelen av (et tall), så skriv ned det tallet du vil ha, og ta halvdelen av enersifferet hvis det er jamt. Men hvis det er ujamt, så del i halvdeler det som er over én, og ta bort én, men skriv over plassen det tegnet som betyr en halv, og som vi kaller **semiss**, og som lages slik 9

Både Al-Khwarizmi og Sacrobosco skiller mellom de ni talltegnene og symbolet 0. Carmen de Algorismo gjør ikke det, og Hauksbók følger Carmen og refererer til ti indiske talltegn. Nullen vies likevel særskilt oppmerksomhet i avsnittet nedenfor (Jónsson, 1892-96, s 417):

Hverr þessi stafr merkir sik einfaldliga í fyrsta stad. En ef hann er í odrum stad enn hann er skipadr, merkir hann .x. sinnum sjálfan sik, ok í hvern stad er þú setr fígúru þessa annan enn skipad er, þá merkir hon ávallt .x. hlutum meira í þeim stad er til vinstri handar veit, heldr enn í næsta stad adr. Cifra merkir ekki fyrir sik, en hon gerir stad ok gefr odrum fígúrum merking.

Hvert av disse tegnene står for sin verdi på enerplass. Men hvis det settes på neste plass i forhold til der det står, betegner det x ganger seg sjøl, og på hver ny plass du setter tegnet i forhold til der det stod før, betegner det alltid x ganger mer på plassen mot venstre enn på nærmeste plass før. Cifra betegner ingenting i seg sjøl, men det markerer plass og gir de andre sifrene verdi.

Mens Al-Khwarizmi navngir posisjonene som unitas, deceni, centeni, mille, ... slik som vi gjør i dag, innfører både Villa Dei og Sacrobosco de kunstige ordene *digitus*, *articulus* og *compositus*. Dette gjør også Hauksbók (Jónsson, 1892-96, s 417):

þar næst heyrir til at vita þrenna grein stafanna ok allrar tolu, því at oll tala minni enn .x. heitir fingr, en sú tala oll er tigum gegnir heitir lidr hvárt sem hon er meiri eda minni. En sú tala er allt er saman, lidr ok fingr, heitir samsett tala.

Dernest hører det til å kjenne den tregreina inndelinga av tegnene og alle tall, fordi hvert tall mindre enn x heter finger, men hvert tall som svarer til et antall tiere heter ledd, enten det er stort eller lite. Men det tallet som består av både ledd og finger, heter et sammensatt tall.

Vi har her innslag fra en gresk tradisjon via Boëthius.

Algorismus i Hauksbók følger Carmen når det gjelder antall regningsarter og rekkefølgen mellom dem (Jónsson, 1892-96, s 418):

Í sjau stadi er skipt þessarar listar greinum; heitir hit fyrsta vidrlagning, annat afdráttr, þridja tvífaldan, fjórda helmingaskipti, .v. margfaldan, .vi. skipting. .vij. at taka rót undan, ok er sú grein á tvær leidir. Annat er at taka rót undan ferskeyttri tolu, en annat er þat at taka rót undan átthyrndri tolu, þeirri er verpils voxt hefir.

I sju er denne kunstens greiner delt: den første heter tillegging, den andre fratrekking, den tredje tofolding, den fjerde halvdeling, den femte mangfolding, den sjette deling, den sjuende å ta rot av. Og denne greina går i to retninger: den ene er å ta rot av firkanta tall, den andre er å ta rot av åttehjørna tall som har terningform.

Algorismenes metoder til å finne kvadratrøtter og kubikkrøtter er helt avhengige av posisjonsskrivemåten for tall. Disse metodene går tilbake til Aryabhatas Aryabhatiya (Clark, 1930, s 22-26).

Av algorismer på folkespråk har vi hittil bare funnet to som kan kalles oversettelser i streng forstand, nemlig én norrøn og én fransk. Ifølge Mortet (1909, s 55) er den franske et fragment av Carmen, som er bevart i to handskrifter fra 1200-tallet.

Ved nordiske biblioteker finner vi også latinske avskrifter av verkene til Villa Dei og Sacrobosco. NKS 275a og DKB add. 477 2° skal begge inneholde Sacroboscos Sphaera, Computus og Algorismus (Pedersen, 1981, s 496f.). GKS 1348 qv inneholder en latinsk algorismus på vers. Vi ser altså at Sacroboscos og Villa Deis skrifter var velkjente her i Island og Norge både på folkets språk og på latin allerede på 1300-tallet.

Ulike tallsystemer og regnesett

Først med det posisjonelle tallsystem og dets regnesett ble det mulig for folk flest å kunne lære seg å regne. Det konkurrerende tallsystemet i Europa på Hauks tid var *det enkle additive romertallsystemet.* Fordi regningen foregikk på abakus, regnebrett, vet vi lite om hvordan regning på papir ville blitt utført i dette systemet. Fra den egyptiske Rhindpapyrusen, kopiert av Ahmes ca. 1650 f.Kr.,

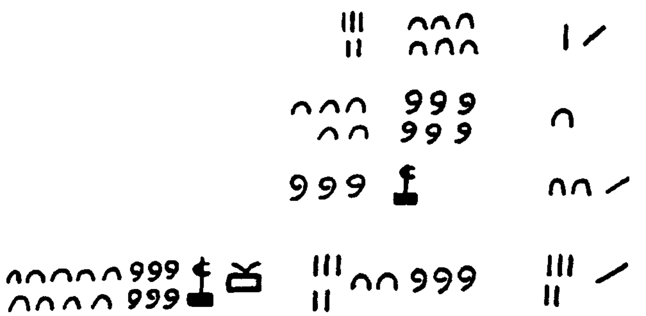
> ... nothing would have astonished a Greek mathematician more than the whole population of Europe being able to perform division ... our modern power of easy reckoning is the result of a perfect notation
>
> (A.N. Whitehead)

vet vi mer om slik *regning i et additivt system.* Multiplikasjonen foregikk her ved de to regneprosessene ***gjentatt dobling*** og ***halvering***. I papyrusens problem 32 utføres multiplikasjonen 12·12 slik (Chace, 1969, p. 73):

Gjentatt dobling gir
$2 \cdot 12 = 24$,
$4 \cdot 12 = 48$,
$8 \cdot 12 = 96$.

Da $8 + 4 = 12$, settes / ved disse, og vi adderer $96 + 48 = 144$.

Kahun-papyrusen fra 1950 f.Kr. gir eksempler på at f.eks. $26 \cdot 65$ også kunne utføres slik



Først finnes $10 \cdot 65 = 650$
som så *dobles* til
$20 \cdot 65 = 1300$
og *halveres* til
$5 \cdot 65 = 325$.
Da $20 + 5 + 1 = 26$,
settes / ved disse,
og vi adderer
$1300 + 325 + 65 = 1690$.

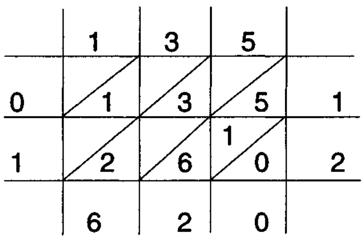
Slike metoder for multiplikasjon krever bare kjennskap til 2-gangen og 10-gangen, det additive system gjør at 2-ganging bare betyr ***dobling av hvert symbol*** med 10-gruppering, og 10-ganging bare betyr at 1-ere blir ∩-ere, ∩-ere blir 9-ere osv. Multiplikasjon blir dermed ført tilbake til opptelling.

Hos hinduene, her representert ved Bhaskara, forklares regneprosessene på poetisk vis i Siddhanta-siromani. Bhaskara henvender seg til Lílávatí, en vakker kvinne, kanskje hans datter, med ordene (Colebrooke, 1817, p. 1):

I propound this easy process of computation, delightful by its elegance, perspicuous with words concise, soft and correct, and pleasing to the learned.

For multiplikasjon beskriver han så med ord seks ulike metoder, alle posisjonelt organisert, og gir et eksempel. Dernest gir han svaret i 6 ulike oppsett (Colebrooke, 1817, p. 6f.).

Beautiful and dear *Lílávatí*, whose eyes are like a fawn's! tell me what are the numbers resulting from one hundred and thirty-five, taken into twelve?



135	135
1	2
270	
135	
1620	

12	12	12
1	3	5
12		60
	36	
	1620	

135	1	135
135	2	270
		1620

135	8	1080
135	4	540
		1620

135	20	2700
	•	•
135	8	1080
		1620

Eksemplene foran viser at det viktigste ved innføringen av hindu-arabiske tall er den fullstendige endringen av prinsipper. Dette ble ikke alltid forstått. Noen anvendte de nye tallsymbolene på regnebrett uten å ta i bruk posisjonssystemet (Gerbert, ca. 900). Andre grep posisjonsidéen, men anvendte romertallene (O'Creat, ca. 1130) eller hebraiske bokstaver (Ibn Ezra, ca. 1140) som talltegn. Atter andre (Raoul de Laon, ca. 1140) brukte hindu-arabiske tegn og system i utregningene, men ga sluttsvaret med romertall (Smith & Karpinski, 1911).

Algorismus i Hauksbók er altså ei lærebok i regning med posisjonssystem. På Hauks tid var utfallet av kampen mellom de to systemene på ingen måte klart. Det tok nye 300 år, fram til ca. 1600, før regnebrettmetodene forsvant, til tross for de fordelene vi med våre etterpåkloke øyne kan se ved posisjonssystemet når det gjelder å effektivisere regneprosessene på papir. Vi må se Algorismus i Hauksbók også mot denne bakgrunnen.

Allerede ca. 800 fantes det papirmøller i Bagdad. Først 1154 kom de til Spania. De første trykte aritmetikkbøker kom ut i Italia 1478 og 1484. Tilgangen på papir og utviklingen av boktrykking førte til gradvis standardisering mot våre skrive- og regnemåter. Abakusregningen forsvant i Europa, og dobling / halvering forsvant fra lærebøkene etter hvert som en innså at dette bare representerte spesialtilfeller av multiplikasjon / divisjon uten egen verdi lenger.

Bortsett fra addisjon og subtraksjon, ble regneprosessene ansett som vanskelige. Fra denne tida finnes en anekdote om en ung tysker som fikk det råd at addisjon og subtraksjon kunne han nok lære seg i Tyskland, men for å lære multiplikasjon og divisjon burde han dra til Italia (Dantzig, 1954, p. 26). Dette bedret seg. Det vokste fram et regnemester-laug som ledet tyske skoler i handelsregning. To av de mest populære bøkene herfra var Jacob Köbels Rechenbuch auff linien und Ziffern (1514) og Adam Rieses Rechnung auff der Linihen und Federn (1525).

Det var disse to som i 1552 dannet grunnlaget for den første regnebok på dansk av Herman Veigere: En Kaanstelig och nyttelig Regne Bog faar Schriffuere, Fogeder. Købmend, Och andre som bruge Købmandskaff, paa Linyerne met Regne pendinge, och met Zifferne udi heelt och brødit tal .... Av fortalen framgår det at det dreier seg om både "danske tal" = romertall, og om "Figurer (som menig Mand kalder ziffer), hvilket navn egentlig kun tilkommmer 0" (Larsen, 1952, s 7f). Altså holdes både regning med sifre og med romertall i hevd.

Noen utdrag fra Algorismus i Hauksbók

Fra vår norske oversettelse tar vi med noen utdrag med illustrerende eksempler. Vi tar disse med her for å vise at det slett ikke er lett å gjøre seg bruk av disse rent retoriske metodene i teksten fra Algorismus i Hauksbók, som der gis uten illustrerende eksempler. Oversetteren må være vel skolert både i latin og i islandsk, men må også ha god innsikt i regning for å kunne lage så presise og korrekte verbale oppskrifter. Jeg tror ikke at mange allmennlærere i vår norske skole ville være i stand til å forstå og gi gode regneeksempler for sine elever utfra en slik læreboktekst. Disse eksempler sier oss altså noe om læring og forståelse av regning på Hauks tid, i hvert fall i katedral- og klosterskolene våre.

Her sies det hvordan et tall legges til et annet

" Hvis du vil legge et tall til et annet, så skriv det største tallet øverst og sett det minste tallet like langt til høyre, og legg først det sifferet som står lengst til høyre, til tallet. Hvis hele det tallet til sammen er en finger, så skriv den ned på samme plass. Men hvis tallet blir sammensatt, så skriv fingeren ned på enerplass, og legg leddet til det tallet som står på neste plass fra før. Men hvis det blir et ledd av tillegginga på enerplass, så skriv null der, og legg leddet til det tallet som står nærmest, hvis det er noe tall der, eller skriv det der aleine. Men hvis det står null der, så ta den bort og sett leddet der. Legg siden de andre sifrene til på samme måte. "

Vårt eksempel nedenfor viser framgangsmåten ved noen av de tilfellene som teksten tar opp, illustrert på de forskjellige plassene, slik at vi ser prosessen i regnestykket samtidig. Dette vil også gjelde de andre regneprosessene vi gir eksempler på.

Hvis du vil legge tallet 365 til tallet 2674, skriver du:

2	**6**	**7**	**4**	←	det største tallet øverst
	3	**6**	**5**	←	det minste like langt til høyre

Addisjon foretas fra høyre, siffer for siffer. Sifrene i det nedre tallet legges trinnvis til hele det øvre tallet som viskes ut og erstattes med nye sifre som nedenfor.

2	**6**	**7**	$\boxed{\mathbf{4}}$	...	blir til sammen en finger, 9, som skrives på
	3	**6**	$\boxed{\mathbf{5}}$		samme plass istedenfor 4.
			•		
			•		
			•		

2	6	$\boxed{7}$	9	...	blir et sammensatt tall, 13. Skriv fingeren 3
	3	$\boxed{6}$	5		istedenfor 7 og legg leddet 1 til 6, som står
		.			på neste plass fra før.
		.			
		.			
2	$\boxed{7}$	3	9	...	blir et ledd 10. Skriv null der istedenfor 7
	$\boxed{3}$	6	5		og legg leddet 1 til 2 som står nærmest.
	.				
	.				
	.				
3	0	3	9		Endelig resultat.
	3	6	5		

Om fratrekking

" Hvis du vil trekke et tall fra et annet, så skriv de to tallene som når du legger til, og sett alltid det minste tallet under, og dessuten like langt til høyre. Så trekker du fra det første sifferet det tallet som står under, hvis det går, og skriv det ned på samme plass, om det er noe igjen, eller sett null der.

Men hvis du ikke kan trekke fra det første sifferet fordi det som står under, er større, så tar du én fra neste siffer. Pass på at det betyr x på forrige plass. Trekk så fra dette hele tallet som står under, og skriv på samme plass det som blir igjen. Hvis det står nuller øverst, så ta én fra det sifferet som står nærmest nullene og skriv ni der nullene var, like til du kommer til den plassen der du vil trekke fra. Og trekk fra de ti som trengs på den plassen, og skriv på samme plass det som er igjen."

Regneeksempel

2	0	1	3	8	6	...	Skriv tallene som ved addisjon, det største øverst, det mindre under, like langt til høyre.
		3	5	8	2		
2	0	1	3	8	$\boxed{6}$	...	Du trekker fra sifferet over: 6, det tallet som står under: 2, hvis det går, og skriver 4, som er igjen, på samme plass
		3	5	8	$\boxed{2}$		
2	0	1	3	$\boxed{8}$	4	...	eller sett null der.
		3	5	$\boxed{8}$	2		
2	0	1	$\boxed{3}$	0	4	...	Hvis tallet under er større, ta én fra sifferet foran, som er 1. Det betyr 10 på ❑-plassen. Nå kan hele tallet, 5, trekkes fra dette, som da er 13. Det som blir igjen, 8, settes på denne plassen.
		3	$\boxed{5}$	8	2		
2	0	$\boxed{0}$	8	0	4	...	Hvis det står nuller øverst, så ta én fra det sifferet som står nærmest nullene (én tas altså her fra 2).
		$\boxed{3}$	5	8	2		
1	9	7	8	0	4	...	Skriv 9 der nullene var, til du kommer til ❑-plassen. Trekk sifferet 3 fra de 10 som trengs på den plassen, og skriv der det som blir igjen, nemlig 7, og du har resultatet.
		3	5	8	2		

KILDER

Antiquarisk Tidsskrift (1846-48). Den Arnamagnæanske Kommision, *Antiquarisk Tidsskrift, 1846-48*, 87-135.

Beckman, N., & Kålund, K. (1914-16). Alfrædi Jslenzk, Rimtol, STUGNL. Kjøbenhavn.

Benedict, S. R. (1914). *A comparative study of the early treatises introducing into Europe The Hindu Art of Reckoning*. Ph.D. Thesis, Univ. of Michigan.

Brun, V. (1962). *Regnekunsten i det gamle Norge*. Oslo-Bergen.

Brun, V. (1964). *Alt er tall. Matematikkens historie fra oldtid til renessanse*. Oslo-Bergen.

Cantor, M. (1913). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Zweiter Band 1200-1668. Leipzig.

Chace, A. B. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*. NCTM Classics.

Chuquet, N. (1985). *A study with extensive translation of Chuquet's mathematical manuscript completed in 1484* edited by Graham Flegg, Cynthia Hay, Barbara Moss, Dordrecht: Reidel Publ. Co.

Clark, W. E. (1930). *The Aryabhatiya of Aryabhata*. Univ. of Chicago Press.

Colebrooke, H. T. (1817). *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. London.

Curtze, M. (1897). *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum Vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius*. Hauniae.

Dantzig, T. (1954). *Number. The Language of Science*. N.Y.

Halliwell, J. O. (1841). *Rara Mathematica*. London. Reprinted by Georg Olms Verlag 1977. Hildesheim. New York.

Helgason, J. (1960). *Hauksbók. Manuscripta Íslandica, Vol. 5*. Copenhagen.

Hill, G.F. (1915). *The Development of Arabic Numerals in Europe*. Oxford.

Jónsson, E., & Jónsson F. (1892-96). *Hauksbók*. Det Kongelige nordiske Oldskrift-Selskab, Kjøbenhavn.

Karlsson, S. (1964). *Aldur Hauksbókar, Fródskaparrit 13*. bók, Tórshavn.

Kålund, K. (1889-94). *Katalog over den Arnamagnæanske håndskriftsamling I-II*. Kjøbenhavn.

Larsen, L. M. (1952). Træk af regnekunstens historie i Danmark. *Matematisk Tidsskrift A*, 1-21.

Menninger, K. (1969). *Number Words and Number Symbols*. MIT Press.

Mortet, V. (1909). Le plus ancien traité français d'algorisme. *Bibliotheca Mathematica 9*, 55-62.

Munch, P.A. (1847). Om Ridderen og Rigsraaden Hr. Hauk Erlendssøn, Islands, Oslo og Gulatings Lagmand, og om hans literære Virksomhed. *Annaler for nordisk Oldkyndighed og Historie*, 169-216. Kjøbenhavn.

Munch, P.A. (1848). Algorismus, eller Anviisning til at kende og anvende de saakaldte arabiske Tal, efter Hr. Hauk Erlendssøns Codex meddelt og ledsaget med Oversættelse af P.A. Munch. *Annaler for nordisk Oldkyndighed og Historie*, 353-375. Kjøbenhavn.

Pedersen, O. (1981). *Matematisk litteratur. Kulturhistorisk leksikon for nordisk middelalder 11*, 491-500. Oslo 1956-78. Fotografisk opptrykk Rosenkilde og Bagger.

Rangacarya. M. (1912). *The Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya*. Government of Madras.

Rickey, F. (1985). Mathematics of the Gregorian Calendar, *The Mathematical Intelligencer, vol 7*, no. 1, 53-56, New York, Springer-Verlag.

Rosén, F. (1831). *The Algebra of Muhammed ben Musa Al-Khwarizmi.* London.

Saidan, A.S. (1978). *The Arithmetic of Al-Uqlidisi.* Dordrecht/Boston.

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics.* N.Y.

Smith, D. E. & Karpinski, L. C. (1911). *The Hindu-Arabic Numerals.* Boston and London.

Steele, R. (1922). *The Earliest Arithmetics in English.* Oxford University Press.

Swetz, F. J. (1987). *Capitalism and Arithmetic, The New Math of the 15th Century,* La Salle, Ill.: Open Court Publ.

The Open University (1976). *History of Mathematics, Counting, Numerals and Calculation 3. Written numbers.* The Open University Press.

Vogel, K. (1963). *Muhammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus.* Aalen.

Algorismus in Hauksbok

Abstract

In The Kings Mirror from 1260 it is said: knowledge of reckoning is useful for the merchant, but we know little about how the reckoning actually was done in Nordic countries before 1300. In the Icelandic-Norwegian Hauk's book from ca. 1310 we find an introduction to the calculations with hindu-arabic numerals in the treatise which is called Algorismus. Here we discuss the sources of this treatise, and what it can tell us on the learning and understanding of mathematics compared to in other parts of Europe at this time.

Author

Otto B. Bekken is PhD and senior lecturer in mathematics.

Address

Torsvikkleiva 12

4637 Kristiansand, Norway
