Om kalenderräkning

Aritmetiken, almanackan och fingrarna som beräkningsverktyg

Jan Wyndhamn

I en svensk, nationell studie rörande matematikundervisningen förekom uppgiften

Hur många dagar är det från och med den 24 mars till och med den 18 juni om mars och maj har 31 dagar och april 30 dagar?

Uppgiften förefaller enkel, men i årskurs 6 var det bara 7 % av eleverna som klarade den. Uppgiften ansågs – i det utvärderingssammanhang den ingick i – mer mäta elevens språkliga förmåga än den individuella matematiska kompetensen. Föreliggande studie belyser betydelsen av några situationsbetingade faktorer vid problemlösningen. Tre olika experiment med den nämnda uppgiften som utgångspunkt genomfördes i årskurs 5. Elever fick gruppvis i två experiment lösa samma uppgift men med olika förutsättningar och i ett tredje experiment två likartade uppgifter. Resultatet blev att eleverna klarade uppgiften utmärkt då de antingen fick ha en almanacka till hands eller blev upplysta om att uppgiften innehöll en svårighet. Omformulering av uppgiften ökade dock inte påtagligt lösningsfrekvensen.

Artikeln är en förkortad och omarbetad version av en rapport om en studie över hur elever löser problem med datumangivelser (Wyndhamn, 1992, 1993).

Inledning

Följande uppgift återfinns i ett räkneprov som en av många frågor i ett brett upplagt longitudinellt forskningsprogram rörande utvärdering av svenska skolans verksamhet (Pettersson, 1990; Reuterberg, 1989).

Hur många dagar är det från och med den 24 mars till och med den 18 juni om mars och maj har 31 dagar och april 30 dagar?

I all sin enkelhet är uppgiften intressant ur många synpunkter. Den uppvisar mycket låga lösningsfrekvenser. 3 procent av eleverna i årskurs 3 löste uppgiften rätt. I årskurs 6 var lösningsfrekvensen 7 procent.

Hagström & Sani (1991) använde uppgiften i en egen undersökning. De fann att den fick låga lösningsfrekvenser i flera årskurser (se tabell 1):

Jan Wyndhamn *är fil.dr., lärarutbildare i matematik och forskare i kommunikation vid Linköpings Universitet.*

åk 4	åk 5	åk 6	åk 7/9	åk 1 gy
3 %	8 %	7 %	8 %	20 %

Tabell 1. Lösningsfrekvenser för den aktuella uppgiften i några olika årskurser (åk).

Den övervägande delen av eleverna i de båda undersökningarna svarar 86 dagar i stället för 87 dagar.

Eleverna räknar 7 + 30 + 31 + 18 = 86 och inte 8 + 30 + 31 + 18 = 87. Den avgörande felräkningen ligger i beräkningen av antalet dagar från och med den 24 mars till och med den 31 mars.

Uppgiftsanalysen ger enligt Reuterberg (1989) ett lågt diskriminationsindex (mått på uppgiftens egenskap att bidra till spridningen i provresultatet, alltså dess förmåga att skilja på 'bra' och 'dåliga' prestationer). Resultatet på uppgiften visar också ett litet samband (låg korrelation enligt rpbis) med det totala provresultatet. I sin tolkning anser författarna till de angivna arbetena att uppgiften inte mäter någon egentlig räkneförmåga utan mer elevernas förmåga att tolka begreppen 'från och med' samt 'till och med'. Det är "språket som sätter stopp" (Pettersson, 1990, s 102). Ur ett inom-matematiskt perspektiv tycks uppgiften alltså med denna argumentation förlora sin relevans. Ändå väcks nyfikenheten på varför eleverna 'räknar fel'. Man kan kanske som skäl till felräknandet även anföra att 'eleverna inte tänker sig för'. Men – i så fall – varför tänker de sig inte för? Föreliggande studie försöker mer ingående belysa hur elever agerar vid lösandet av uppgifter liknande denna.

Analys av matematikuppgiften

Enligt Pettersson (1990) prövar uppgiften

> förmågan att förstå ett problem och ha en adekvat lösningsmetod. Den prövar också kunskaper om almanackan (månadernas följd) och färdigheter i addition. För att kunna lösa uppgiften rätt krävs följande kunskaper och färdigheter.
> Eleven måste
> - kunna förstå texten
> - kunna månadernas följd på året
> - kunna innebörden i begreppen "från och med" och "till och med"
> - kunna addera 8 + 30 + 31 + 18
> - kunna addera med tiotalsövergångar
> - kunna arbeta inom talområdet upp till 100 (ibid., s 101)

Det vanligaste felsvaret (86 dagar) tilldelas kategorien "enklare fel" (op.cit., s 102).

Uppgiften är – som jag ser det – en typisk skoluppgift. Den har en blandartad karaktär. Eleverna befinner sig i en situation (i skolan) och förväntas (vara intresserade av att) svara som om de var i en annan situation där det är angeläget att bestämma antalet dagar. Som text betraktad tillhör den en lätt igenkännlig genre och bär matematikuppgifternas speciella stil. Uppgiften är innehållsmässigt fristående, avskärmad från 'världen' (jämför Säljö, 1990 och 1991). Den är väl tillrättalagd för aritmetisk behandling. För undvikande av 'onödiga' fel ges antalet dagar i mars, april och maj. Många elever missar dock – enligt Pettersson (1990) – den avsedda tolkningen av uttrycken 'från och med' samt 'till och med'. Misstaget betraktas dock som av "enklare" natur. Av rapporten (Pettersson, 1990) framgår inte hur dessa elever tänkt eller resonerat. Flera varianter är dock rimliga. Jag nöjer mig här med två.

i) Eleven ögnar snabbt igenom texten och tänker inte alls på vad de ingående talen står för eller vilka premisserna är för de involverade matematikredskapens användande. Situationen uppfattas inte som särskilt problematisk. Eleven funderar inte heller särskilt mycket över vad subtraktionen 31 – 24 egentligen ger svar på för fråga. Uppgiften betraktas som en lätt förklädd men vanlig matematikuppgift. Eleven är – för att använda Heideggers språkbruk – 'kastad ut' i en för skolan typisk beräkningssituation.

ii) De i texten ingående termerna uppfattas inte som 'självförklarande och 'genomskinliga' utan måste tilldelas någon mening (innebörd). Uppgiften som sådan ger ju inte heller några 'stöttande' tolkningsantydningar. Eleven bestämmer sig för tolkningen att den 24 mars inte räknas med i det önskade antalet dagar.

Låt oss närmare studera alternativ i). Tal i matematisk bemärkelse har olika karaktär avhängigt deras funktion. En indelningsgrund kan vara: kardinaltal, ordinaltal och mätetal. Ett kardinaltal får man som svar på frågan "hur många?". Ett ordinaltal ger svar på frågan "vilken i en viss ordning?". Ett mätetal besvarar frågor av typen "hur mycket?", "hur stort?" och "hur långt?". Kardinal- och ordinaltalen används då de ingående tingen är tydligt avskiljbara (eller diskreta). Mätetal förknippas med kontinuerliga (sammanhängande) storheter och med något som ofta kan återges på en skala av visst slag. I här studerade matematikuppgift återfinns egentligen alla tre slagen av tal. Uppgiften skall besvaras med ett kardinaltal ("hur många dagar?"). 24 och 18 i texten är ordinaltal. De utpekar (är namn på) en viss dag i månaden: den tjugofjärde dagen i mars respektive den adertonde dagen i juni. Talen 30 och 31 kan även tolkas som mätetal då de svarar på frågan hur lång en viss namngiven månad är. Räknar vi upp dagarna i mars med ledning av ordningstalen får vi säga:

den 24:e, den 25:e, den 26:e, den 27:e, den 28:e, den 29:e, den 30:e och den 31:e.

Vi har räknat upp 8 dagar (8 är alltså kardinaltal). Subtraktionen 31 – 24 ger dock ej svaret 8, eftersom den förutsätter att de ingående talen är kardinaltal eller mätetal (lägen på en tallinje). Då uppkommer 'felet' på en dag. Det blir kanske tydligare om vi erinrar oss att det inte finns någon dag 0 lika väl som vi bör observera att det inte finns något år 0. År 1 f Kr följs av år 1 e Kr.

Den här omnämnda diskrepansen på 1 dag återfinns i vissa sammanhang tydligt i språket. Vi behandlar utsagan "idag om en vecka" synonymt med "idag åtta dagar". För en tidsperiod på två veckor säger vi däremot fjorton dagar. Franska språket upprätthåller dock distinktionen: "aujourd'hui en huit" och " aujourd'hui en quinze".

Experiment med uppgiften

Genom att se matematisk kompetens och förmågan att etablera mening av språkliga uttryck inte enbart som mentala färdigheter utan snarare som förståelse av vad som kan förväntas i olika kommunikativa situationer gjordes följande empiriska studie (jämför Säljö & Wyndhamn, 1988, 1990, 1993; Wistedt, 1991).

Metod

Eleverna tilläts samarbeta i grupper bestående av tre deltagare. En grupp fick i princip en av följande uppgifter:

A. Lös denna uppgift tillsammans:
Hur många dagar är det från och med den 24 mars till och med den 18 juni? (Almanacksblad medföljer.)

B. Läs först igenom denna uppgift:
Hur många dagar är det från och med den 24 mars till och med den 18 juni om mars och maj har 31 dagar och april 30 dagar?
Det har visat sig att de flesta elever räknar fel på uppgiften.
Vad tror ni de gör för fel? Diskutera!

C. Lös tillsammans i gruppen dessa två uppgifter:
1) SKÖNA SOMMARLOV!
Vårterminen slutar den 5 juni. Höstterminen börjar den 17 augusti.
Hur långt är sommarlovet? Juni har 30 dagar. Juli har 31 dagar
2) KULAN I LUFTEN!
Fotbolls-EM går i Sverige under tiden 12 juni - 26 juni.
Hur länge pågår fotbolls-EM?

Varje uppgift presenterades för 9 grupper. Undersökningen omfattade 27 grupper fördelade på 5 klasser i årskurs 5 på vårterminen. Inalles deltog 80 elever (skulle varit 81 men en elev blev hastigt sjuk). Eleverna hade fyllt eller skulle fylla 12 år. Eleverna grupperades efter tidigare prestationer i matematik. Ordinarie klasslärare bildade homogena grupper på tre olika kompetensnivåer: hög, medel och låg. Det betyder att för varje uppgift (A, B och C) finns data från 3 grupper på respektive prestationsnivå.

Alla samtal spelades in på band i vanlig skolmiljö oftast i ett litet grupprum. Intervjuare var vid alla tillfällen författaren. Intervjuerna följde alla samma mönster. Samtalet inleddes med en fråga om eleverna brukade räkna med tid i något sammanhang. Därefter presenterades själva uppgiften. Den var utskriven så att varje elev fick den framför sig på papper. En elev uppmanades att högt lösa uppgiften. Eleverna hade tillgång till papper och penna vid den därpå följande diskussionen mellan eleverna. Elevsvar och reaktioner fick i problemlösningsfasen avgöra om och hur intervjuaren skulle ingripa. När gruppen var ense om ett svar, ombads en elev att skriva ned detta för gruppens räkning. Samtalet avslutades med en fråga om eleverna kände till något minnesknep för att fastställa antalet dagar i en månad. Alla 27 intervjuerna eller samtalen skrevs sedan ut av författaren så noggrant som möjligt. Detta skriftliga material är underlag för resultatredovisning och analys.

Resultatredovisning

I fortsättningen används följande beteckningar på de olika grupperna: A11, A12 och A13 anger högpresterande grupper som löser A-uppgiften. A21, A22 och A23 anger medelpresterande grupper som arbetar med uppgift A. A31, A32 och A33 står för lågpresterande grupper arbetande med uppgift A. Analoga beteckningar gäller för uppgifterna B och C.

Här redovisas i mera kvantitativa termer först varje uppgift för sig och därefter för alla tre uppgifterna gemensamma drag.

Uppgift A

Alla 9 grupperna kom fram till korrekt resultat, 87 dagar – en högpresterande grupp (A11) dock först efter intervjuarens uppmaning till noggrann genomläsning av uppgiftstexten. Medlemmarna i en medelpresterande grupp (A21) var länge tveksamma innan de slutligt stannade för svaret 87. Hur tiden för själva problemlösandet varierade framgår av tabell 2.

		Grupp	Första förslag efter sek	Skriftligt svar efter sek
K		A11	30	420
o	Hög	A12	135	165
m		A13	60	120
p		A21	60	480
e	Medel	A22	60	435
t		A23	125	255
e		A31	200	375
n	Låg	A32	110	285
s		A33	115	300
		median	110	300

Tabell 2. Tid innan första förslag noterades och total tid då skriftligt svar bestämdes i uppgift A.

	Grupp	Svar
	B11	86
Hög	B12	87
	B13	86
	B21	87
Medel	B22	87
	B23	86
	B31	87
Låg	B32*	87
	B33*	86

Tabell 3. Första svarsalternativ i uppgift B. (= gruppen har almanacka)*

Tabell 2 återspeglar den strategi som alla grupper använde. Varje medlem räknade först tyst för sig och jämförde och diskuterade sedan resultatet med de övriga. Att de lågpresterande grupperna (A31, A32 och A33) genomgående använde lång tid för framräkningen av ett första förslag hänger samman med deras metod att räkna dagarna en och en (uppräkning). En beräkningsmetod som 8 + 30 + 31 + 18 är avsevärt snabbare.

Uppgift B

Två lågpresterande grupper (B32 och B33) kom inte igång med någon diskussion. De fick därför en almanacka som extra verktyg. Svarsbilden framgår av tabell 3 .

5 grupper fick svaret 87 dagar då de själva löste uppgiften. 4 grupper svarade först 86 dagar. 3 av dessa 4 grupper uteslöt avsiktligt den 24 mars i räkningen. Den fjärde gruppen (B13) ville ha med den 24 mars men hamnade ändå på 86 dagar. 7 grupper diskuterade att den antydda felräkningen kommer in då man skall avgöra om den 24 mars skall räknas eller inte. 2 grupper (B31 och B33) kunde inte utreda något om detta. Samtliga grupper svarade 87 dagar i det fortsatta samtalet med intervjuaren. Problemlösningsfasen av samtalen varierade från 180 sek (B21) till 600 sek (B31). Medianen var 270 sek.

Uppgift C1

Endast en grupp (C32) fann korrekt svar, 72 dagar. Gruppen var av läraren kategoriserad som lågpresterande. En annan lågpresterande

	Grupp	Första svar	Omarbetat svar
	C11	73	72
Hög	C12	68	67
	C13	73	72
	C21	73	71
Medel	C22	73	71
	C23	73	72
	C31*	—	72
Låg	C32	72	—
	C33	73	72

Tabell 4. Svar på uppgift C1 före och efter uppmaning om noggrann läsning. (= gruppen har almanacka)*

grupp (C31) fick hjälp att påbörja en diskussion i och med att den fick en almanacka. 6 grupper fick resultatet 73 dagar. Grupp C12 kom helt fel med svaret 68 dagar. Efter intervjuarens uppmaning om noggrann genomläsning av texten omarbetades resultatet enligt tabell 4 .

Totalt 6 grupper fann till slut svaret 72 dagar. Tiden att räkna fram ett första svar varierade från 50 sek (C11) till 200 sek (C33). Medianen var 130 sek.

Uppgift C2

4 grupper (C11, C13, C31 och C32) kom direkt till det korrekta svaret 15 dagar. 5 grupper svarade 14 dagar. Sedan intervjuaren manat till kontroll (se nedan) ändrade 4 av dessa 5 grupper svaret till 15. En medelpresterande grupp (C21) modifierade inte sitt svar. Sammanlagt kom 8 grupper underfund med giltigheten i tidsangivelsen 15 dagar. Tiden för att bestämma första resultat varierade från 30 sek (C22) till 210 sek (C33). Medianen var 45 sek.

Gemensamt för uppgifterna A, B och C

I huvudsak två olika uträkningsmodeller förekom. En metod innehöll någon subtraktion (beräkning) som 31 – 24 i uppgift B eller som 26 – 12 i uppgift C2. En andra modell innebar uppräkning en efter en antingen på fingrarna eller något annat sätt. Tabell 5 visar hur de två huvudmodellerna fördelade sig. Rätt första svar (X) i den tredje spalten (C-uppgiften) grundar sig på resultaten från uppgift C2.

	Grupp	S	U	Grupp	S	U	Grupp	S	U
	A11*	X		B11	X		C11	$\underline{X}$	$\underline{X}$
Hög	A12*	$\underline{X}$	$\underline{X}$	B12		$\underline{X}$	C12	X	
	A13*	$\underline{X}$	$\underline{X}$	B13	X		C13	$\underline{X}$	$\underline{X}$
	A21*	$\underline{X}$	$\underline{X}$	B21	$\underline{X}$		C21	X	
Medel	A22*	$\underline{X}$	$\underline{X}$	B22	$\underline{X}$		C22	X	
	A23*		$\underline{X}$	B23	X	X	C23	X	
	A31*		$\underline{X}$	B31		$\underline{X}$	C31*		$\underline{X}$
Låg	A32*		$\underline{X}$	B32*		$\underline{X}$	C32	$\underline{X}$	$\underline{X}$
	A33*		$\underline{X}$	B33*		X	C33	X	X

Tabell 5. Fördelning av strategier för uträkning för uppgift A, B och C2.
*S = subtraktion U = uppräkning * = gruppen har almanacka*
X = använd(a) metod(er) $\underline{X}$ = rätt första svar

Tabellen visar att då almanackan erbjöds i problemlösningssituationen utnyttjades den för uppräkningsstrategier utom i grupp A11. I 3 fall (A11, A21 och C31) användes även en räknestrategi som bygger på antalet veckor i perioden och antalet dagar per vecka. Vi ser också att uppräkningsmetoden ensam eller tillsammans med subtraktionsmetoden ofta ger korrekt svar. Uppräkningsstrategin gör att grupper med lägre kompetens ('svaga elever') når korrekt resultat lika ofta som elever på hög kompetensnivå ('starka elever').

När grupperna A11, A22, C13, C21, C22 och C23 hade resonerat sig fram till att en viss dag skulle ingå i det önskade antalet dagar, uppstod det tveksamheter om andra dagar skulle räknas eller inte. Följande utdrag ur intervju A22 belyser detta.

> Karl: Men 'från och med'...? Då /.../ måste man ta med den också... (Pekar på den 18 juni)
> Lisa: Men det gjorde vi ju!
> Mats: Det gjorde vi ju inte.
> Lisa: Det blir 86 eller 87.
> Karl: Men om man tar 'från'... måste man räkna med den. (Pekar på 24 mars)
> Lisa: 'Till och med den 18 juni' ... då måste man ta den också.
> Karl: Aha. Då blir det 2 dagar till.
> Lisa: Då blir det 88!

Grupperna A11, A22, C13 och C23 hamnade så småningom rätt, medan grupperna C21 och C22 'gick åt fel håll'.

Den sammansatta prepositionen "från och med" tilldelades olika innebörd. "Från och med den 24 mars" i uppgifterna A och B betydde till en början i 11 fall att den 24 mars skulle inkluderas, i 5 fall att dagen inte skulle tas med och i 2 fall uppfattades det vara egalt. I motiveringen varför en viss dag skulle medräknas hade tidpunkten på dagen för händelsen det handlar om en avgörande betydelse.

A21: Den /dagen/ har just börjat. (Intervjun gjordes tidigt på morgonen den 24 mars.)
B11: Nu på morgonen tar man med hela dagen. (Intervjun gjordes efter A21).)
B13: Det är kanske på morgonen man skrivit den här uppgiften.
C31: Om man börjar /spela/ på morgonen...

En grupp A31 kom att diskutera om lördagar och söndagar skulle medräknas i sommarlovet. Man är ju ledig då i alla fall.

Som nämnts följde intervjuerna samma schema. I ett inledande varv frågades om eleverna brukade räkna tid i dagar. Materialet tillåter inte någon tydlig frekvensredovisning men det framkom att man räknade enbart vissa kortare tidsperioder (oftast mindre än en vecka) i dagar. Annars räknade man i veckor eller månader. När eleverna läste uppgifterna högt utläste alla datumangivelserna som ordningstal, "den tjugofjärde mars". När samtalet avrundades med frågan om minnesknep för antalet dagar i en månad refererade eleverna till 'räkning på knogarna'. Några få kunde en gammal välkänd minnesramsa.

Resultatanalys

Det insamlade datamaterialet tillåter analys ur olika aspekter. Man kan isolerat skärskåda olika elevers uppfattningar av matematiska begrepp och strategier med bäring på det aktuella problemet. Man kan fokusera intresset på det sociala spelet i grupperna, rollfördelning och grad av deltagande från olika medlemmar. I var och en av grupperna C12 och C13 kom en elev att dominera problemlösandet helt. De övriga elevernas agerande inskränkte sig till instämmanden i de förslag, eller rättare de imperativ, 'huvudrollsinnehavaren' framförde. I C12 är det anmärkningsvärt att ett helt felaktigt svar fick passera två andra högpresterande elevers matematiska blickar. I grupp A22 försvann en elev praktiskt taget helt i samtalet.

Man kan studera språket i det som sägs i sig och belysa frågor av typen: Hur använder eleverna sitt vardagsspråk i förhållande till det formella matematikspråket (Vygotsky, 1986; Johnsen Høines, 1990)? Vilket funktionellt, språkligt "register" (Halliday, 1978) använder sig eleverna av?

I det perspektiv som antytts, är själva samtalet det som är intressant att följa tillsammans med det innehåll den uppvisar som resultat av kognitiv aktivitet i en given här-och-nu-situation. Samtalen kastar ljus över hur elever kanske inte direkt upptäcker en mening eller innebörd vid problemhanteringen utan snarare tillskapar eller konstruerar en sådan. Här nedan återges största delen av samtalet med eleverna i grupp A21. Trots att varje konfrontation mellan en individ eller individer i grupp och en problemsituation till sitt utfall är unik, har intervju A21 drag gemensamt med övriga intervjuer. Därför rapporteras just det samtalet. Transkriptionen tillåter oss att stoppa tiden och analysera hur eleverna utnyttjar olika "structuring resources" (Lave, 1988), dvs olika "stöttor" i situationen. Diskussionen kan delas in i fyra olika avsnitt eller faser. Dessa markeras i utskriften med romerska siffror.

Samtal med grupp A 21

Personer: Acke, Berra, Cilla och intervjuaren.

FAS I

Intervjuaren	*Acke*	*Berra*	*Cilla*
Vårt samtal skall handla om tid. Brukar ni räkna med tid i något sammanhang, t ex hur länge något varar?			
			Ibland i matteböckerna...
	När man skall bort... och när det är jul och så där.		
		... på semester...	
Ni skall få en uppgift av mig här. Den handlar om tid. Vill ni läsa den!			
	(Eleverna	läser	uppgiftstexten)
Vad är det för datum idag?			
	Det är den 24 mars.		
Hur många dagar är det fr o m idag t o m den 18 juni?			
		Ska vi räkna med den här dagen?	
Det får ni fundera ut själva.			
		Du sade juni, va? Inte juli.	Den 18 juni är en torsdag.
Ja.			
	En torsdag, ja.		Jaa.

FAS II

Intervjuaren	*Acke*	*Berra*	*Cilla*
		86 dagar.	
Ni skall resonera er fram till ett gemensamt svar. Tala gärna med varandra.			
	Titta här! 8+30+31 blir 69... plus 18 är 87.		
			87 eller 86 är det.
	Ja, 87.		

FAS III

Intervjuaren	*Acke*	*Berra*	*Cilla*
		8?...Det kan inte vara 8 i början ... alltså 7... hää.	
	Jag räknade med den här dagen från början.	Annars är det 7.	
			86 eller 87, ... 87.
Kan ni enas om ett svar?			
		Det beror på om man räknar med den här dagen. Tar man med den blir det 87 annars 86.	Mm.
Varför räknar ni med den här dagen?			
	Den har just börjat.		
		(mummel)	
	Jag tycker vi räknar med den här dagen.		
			Jaa.
		Tycker samma.	Den här dagen innan nästa dag...
			Mm.
Finns något i texten som gör er tolkning rimlig eller vettig?			
		Det står från..	
	...från och med...		
			Ja.

FAS IV

Intervjuaren	*Acke*	*Berra*	*Cilla*
Hur många dagar tar ni med i juni?	18		18
	Det står ju till. (mummel)		
		Det blir 8 först ...	
			86 blir det väl...? Men 8+24 är 32...
Ni väger mellan 86 och 87?			
			12. Vad är 12 gånger 7?
	84		
			86 blir det då.
		Ja.	Det är 12 veckor mellan 13 och 25. Och 2 dagar kvar.. tisdag till torsdag...
		Vi tar 86.	
Vilket tar ni nu då?			
	87 dagar är det. Har du ett svar? (Vänd mot I.)		Det tycker jag med.
		Vi kan ta vilket som.	
Kan det vara så? Vilket som?			
		Jaa.	
	Det måste vara exakt. Om man skall bort... om planet går på en tisdag, kan man inte komma en onsdag!		Vi tar 87 då.
Nähä, vilket skall det vara då?			
		Hää... 87... Det är inte så stor skillnad. Men om man hoppar hage ... och står på ett... hoppar man ju över det ...	Mm.
Hur är det när man hoppar hage?			
		Man räknar inte med den ruta man står i .... det är samma sak... man räknar inte med den dagen...	Mm.
		87 eller 86.	
			87,5. Hihi.
	Det borde ju vara 87. Det står ju från och med.		
Ska ni ta det?		Mm.	Mm.

Fas I

Eleverna läser uppgiften och orienterar sig om problemet. Acke och Cilla studerar almanackan och konstaterar att "den 18 juni är en torsdag". Då är Berra redan inne på beräkningar. Berra är rådvill om den 24 mars skall tas med i dessa beräkningar. Var och en löser uppgiften för sig.

Fas II

Eleverna jämför sina framräknade svar. Acke och Berra får olika svar. Acke har räknat dagarna i mars på själva almanacksbladet. Berra beräknade antalet dagar genom subtraktionen 31-24. Cilla intar en medlande och avvaktande position.

Fas III

Orsaken till diskrepansen upptäcks. Man får olika resultat beroende på om den 24 mars medräknas eller inte. Acke har en motivering varför dagen skall inkluderas: "Den har just börjat." Detta tycks Berra och Cilla hålla med om.

Fas IV

Olika nya argument prövas sedan Berra rest tvivel om det verkligen är 8 dagar som skall medräknas i mars. Cilla avfärdar 8 eftersom 8 + 24 är 32 – underförstått att det är 31 dagar i mars. Hon väljer dessutom en ny beräkningsmodell som utgår från antalet veckor i stället och får 86 dagar ($12 \cdot 7 + 2$). Antalet veckor får hon ur subtraktionen 25 – 13, där talen är veckonummer. Subtraktionen blir korrekt därför att veckorna är påbörjade. Hon hade kommit till resultatet 87 om hon definierat en vecka med dagarna tisdag, onsdag, ..., söndag, måndag och sedan tolkat sina egna ord "tisdag till torsdag" som omfattande 3 dagar. Berra tycker att "det inte är så stor skillnad" på 86 och 87 och att man "kan ta vilket som". Texten verkar uttömd och matematiken ger inga nya uppslag. Eleverna söker sig därför från själva uppgiften. Acke vänder sig först till intervjuaren men får ingen hjälp och går sedan i sin analys utanför klassrummet och skolan för att hitta skäl till att det bör finnas endast ett "exakt" svar. Acke finner den ordning och reda han söker i tidtabellen för flyg. Berra hittar en analogi i en för elever välkänd sysselsättning: att hoppa hage. "Man räknar / i det sammanhanget / inte med den ruta man står i." Därför bör inte heller den 24 mars tas med. Cilla vill gå en slags medelväg då hon fnittrande föreslår (felaktigt) 87,5. Till slut efter 8 minuter bestämmer gruppen sig för 87 dagar. "Det står ju från och med" som Acke säger och refererar till den ursprungliga uppgiftstexten.

Intervju A21 och många andra följer väl den beskrivning som Laborde (1990) gör över hur en enskild studerande tar sig an en matematisk text. Enligt Laborde bildar läsaren tidigt en hypotes om uppgiftens tolkning. Han eller hon har kanske en tanke om hur texten skall tolkas redan innan själva läsningen påbörjas. Uppfattningen formas av bland annat karaktäristiska drag i texten, vad den handlar om och vilka tidigare kunskaper och färdigheter eleven har. Stämmer den fortsatta läsningen med hypotesen konstruerar läsaren en följdriktig tolkning av enskildheter såväl som helheten. Det hela är inget problem. Läsaren kanske inte ens är medveten om sin hypotes. Om hypotesen däremot inte är konsistent med den återstående läsningen, dvs om mobiliserade begrepp och procedurer inte är kompatibla med den följande informationen, blir det 'kris'. Läsaren blir medveten om hypotesen som måste formuleras om och granskas på nytt. Laborde anför vidare att den studerande har svårt att överge sin första hypotes och kan utan vidare godta uppenbara oförenligheter med texten och mer eller mindre avsiktligt utesluta viss information.

I vårt redovisade samtal fungerar grupp A21 ungefär som 'en enskild läsare'. Det blir en 'kris' eller ett "break-down" – för att följa Heideggers terminologi – då eleverna i fas II redovisar sina svar. Vi ser också hur länge eleverna håller fast vid sina ursprungliga tolkningar av uppgiften. Vidare är det av intresse att notera hur både Acke och Berra går utanför texten för att finna argument för just sin tolkning innan man slutligen godtar textens formulering i och med betoningen 'från och *med*'. De högpresterande eleverna i grupperna C11, C12 och C13 hade inte kommit rätt utan de upprepade "breakdowns" intervjuaren bidrog med genom yttranden som:

Har ni löst uppgiften rätt?
Läs uppgiften noggrant en gång till!
Är ni säkra på att ni svarat på frågan?
Kontrollera resultatet!
Ni har faktiskt räknat fel.

Ett övergripande resultat är iakttagelsen hur ofta rätt svar är kopplat till uppräkning som matematisk strategi. Uppräkningsmetoden används oftast då det är ett överskådligt antal dagar som skall beräknas, till exempel perioderna 24 mars – 31 mars och 12 juni – 26 juni. Eleverna i grupp B31 upplevde dock sig själva "som smarta" då de först skrev upp datumangivelserna för alla 87 dagarna i uppgift B och sedan räknade dem gemensamt, högt och långsamt.

I analysen av den inledande, ursprungliga uppgiften fann Reuterberg (1989) och Pettersson (1990) – som tidigare nämnts – låg lösningsfrekvens, lågt diskriminationsindex och låg korrelation mellan uppgiften och det använda matematiktestet i sin helhet. Att uppgiftstypen är 'svår' och leder till låg lösningsfrekvens framgår även i denna studie, framför allt när man ser på resultaten från uppgifterna C1 och C2. Förklaringen till detta kan dock inte reduceras till att det är "språket som sätter stopp" (Pettersson, 1990, s 123), eftersom eleverna klarar uppgiftstypen, då de får ha tillgång till en almanacka. Det låga diskriminationsindexet kan enligt vår studie förklaras med elevernas lösningsmetoder. De lågpresterande eleverna väljer ofta uppräkning som strategi och räknar rätt. De högpresterande satsar på en subtraktion som leder fel. Uppgiftens svaga samband med det totala testet visar enligt vår genomgång att uppgiften tillhör en alldeles speciell klass av problem. Uppgiften avviker från gängse mönster p g a de ingående talens karaktär. Eleverna behandlar ordinaltal som kardinaltal.

Slutsatser

Den experimentella studien tillåter dessa slutsatser:

- Elever i grupp klarar väl en önskad tidsbestämning (kvantifiering av tid) uttryckt i dagar då de har tillgång till en almanacka.
- Ett "break-down" i den kollektiva problemlösningssituationen styr den kognitiva aktiviteten markant.
- Vid föreliggande typ av matematisk problemställning hjälps inte eleven av att själva uppgiften handlar om konkreta och välkända saker, detta även om uppgiften löses i grupp.

Vi kan således konstatera att det föreligger ett gap mellan att ha en färdighet och att kunna använda denna på ett kompetent sätt i en specifik situation. Gapet är beroende av hur situationen gestaltar sig för eleverna och hur olika 'verktyg' eller 'stöttor' tas i bruk. Använder eleverna uppräkning som matematisk modell gärna tillsammans med almanackan blir gapet försvinnade litet. Eleverna löser uppgiften rätt. Använder eleverna subtraktion i en deluträkning, blir gapet stort. Eleverna hamnar fel för att premisserna för subtraktionen i kombination med de givna siffervärdena (talen) inte reds ut. Tals olika karaktär som ordinaltal eller kardinaltal uppmärksammas inte.

Studien visar också att i den matematiska aktivitet som här föreligger är kommunikationen viktig. Kommunikation är inte enbart överföring av information utan också en process för ömsesidig orientering i vilken eleverna konstruerar grundvalen för ett gemensamt ställningstagande. På något sätt skapar vi världen samtidigt som vi talar om den (jämför Bruner, 1986).

Referenser

Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hagström, G., & Sani, N. (1991). *Elever och matematiken. En undersökning om elevernas matematiska kunskapsutveckling.* Linköping: Universitetet i Linköping, lärarhögskolan. (Opublicerad rapport).

Halliday, M.A.K. (1978). *Language and social semiotic.* London: Edward Arnold.

Johnsen Høines, M. (1990). *Matematik som språk. Verksamhetsteoretiska perspektiv.* Stockholm: Utbildningsförlaget.

Laborde, C. (1990). In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Psychology of mathematics education* (pp. 53-69). Cambridge: Cambridge University Press

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life.* New York: Cambridge University Press.

Pettersson, A. (1990). *Att utvecklas i matematik. En studie av elever med olika prestationsutveckling.* Studies in education and psychology 25. Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Reuterberg, S-E. (1989). *Utvärdering genom uppföljning. Analys av mätinstrument använda i årskurs 3.* Göteborg: Göteborgs universitet, Pedagogiska institutionen.

Säljö, R. (1990). Språk och institution: Den institutionaliserade inlärningens metaforer. *Forskning om utbildning, årgång 4*, 5-17.

Säljö, R. (1991). Introduction: Culture and learning. *Learning and Instruction, 1*, 179-185.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1988). A week has seven days. Or does it? On bridging linguistic openness and mathematical precision. *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 16-19.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1990). Problem-solving, academic performance and situated reasoning. A study of joint cognitive activity in the formal setting. *British Journal of Educational Psychology, **60***, 245-254.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1993). Solving everyday problems in the formal setting. An empirical study of the school as context for thought. In J. Lave, & S. Chaiklin (Eds.), *Understanding practice. Perspectives on activity and context* (pp. 327-342). Cambridge: Cambridge University Press.

Wistedt, I. (1991). *Att se matematiken i vardagen – en fallstudie.* Rapport 2 från projektet Vardagskunskaper och skolmatematik. Stockholm: Stockholms universitet, pedagogiska institutionen.

Vygotsky, L.S. (1986). *Thought and language.* (A. Kozulin, Trans.) Cambridge:, MA: MIT Press.

Wyndhamn, J. (1992). *Matematisk kompetens och sociokulturell aktivitet. En experimentell studie över hur elever löser problem med datumangivelser.* Arbetsrapport 1992:6. Department of Communication Studies, Linköping.

Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited. On school mathematics as a situated practice.* Linköping Studies in Arts and Science No 98.

On calculation of time.

Arithmetics, calenders and fingers as structuring resources

Abstract

The background of the study is a finding in the context of a national evaluation of mathematics teaching in Sweden in which the following task was used:

How many days are there from March 24 until June 18 if March and May have 31 days and April has 30 days?

It was reported in the evaluation that the task was very difficult (only 7 percent of the 6th graders could solve it correctly). Furthermore the discrimination index, i.e., how well the task is separtaing 'good' performers from 'poor' ones, is low. There is also a low correlation between the results on this task and overall results. It is argued that the task does not measure mathematical ability but rather the ability of pupils to read and understand language.

The perspective behind this study is different. The competence in mathematics and the ability to establish the meaning of linguistic expressions cannot be considered as totally separated mental skills. Counting and the establishment of quantitative relationships presupposes some understanding of what is the expected definition of terms and relationships in social practices.

In the empirical work, a set of problems and conditions were used to modify the structure of the problem för the pupil. In one condition, the pupils solved the problem above using a calender. In a second condition, the pupils were given instructions that the task is difficult and that "many pupils miscalculate the task". In a third condition, finally, analogous tasks placed in more familiar contexts (for instance, estimating the length of the summer holiday) were used. The pupils solved the tasks while working in groups of three (aged 12, 5th grade) and their interaction was recorded for subsequent analysis. In all, 27 groups participated.

The results show that with the use of a calendar all groups and irrespective of their performance level in mathematics solved the problem correctly. In the second condition, the success rate was quite high. However, the third condition did not affect the performance to any signifcant degree.

The task seemed to be an easy one when a calender is used. It is then natural to enumerate the days correctly. The difficulties pupils have in solving this kind of problem relate to the fact that they do not realise the presuppositions for using the subtraction algorithm. The dates are ordinal rather than cardinal numbers. This kind of numbers is used only on this occasion in the original national test and that will explain the low correlation between the results on this task and overall results. Poor performers, who are likely to use finger counting as a strategy, arrive at correct answer since their approach fits the nature of the problem. Here a reason may be found, why the discrimination index is low.

Author
Jan Wyndhamn is Ph.D., senior lecturer at the Department of Teacher Education and a reseacher at the department of Communiaction Studies, Linköping University, Sweden.
Address
Institute of Tema Research, Linköping University,
S-581 83 Linköping, Sweden.