Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber

Morten Blomhøj

For at illustrere betydningen af virksomhed med matematisk modellering for elevernes tilegnelse af matematiske begreber i den elementære matematikundervisning giver artiklen dels en teoretisk diskussion, dels en præsentation af nogle af overvejelserne bag og resultaterne af et udviklingsarbejde vedrørende modellering af dynamiske systemer ved hjælp af differensligninger og regneark. Udviklingsarbejdet har omfattet undervisningsforløb i matematikundervisningen på 9. og 10. klassetrin i den danske folkeskole. Under forløbene har eleverne arbejdet med at opbygge, analysere og kritisere matematiske modeller. Analysen har vist, at elevernes virksomhed med modellering indeholder et væsentligt potentiale i forhold til elevernes tilegnelse af de matematiske begreber, der indgår i virksomheden. Artiklen bygger på et udviklingsarbejde, der er en del af en Ph.D.-afhandling med titlen "Samspil mellem teori og praksis i matematikkens didaktik".

Modellering i den elementære matematikundervisning – hvorfor det?

Internationalt er inddragelsen af modeller og modellering uden tvivl de sidste tyve års mest markante fællestræk ved udviklingen i curricula for matematikundervisningen. I Danmark har modellerne således inden for de sidste fem år fundet vej ind i bekendtgørelser og undervisningsvejledningerne for matematikfaget i gymnasiet (Undervisningsministeriet [Um], 1988), i den almene voksenundervisning (Kulturministeriet, 1990) og i folkeskolen (Um, 1990). Forud for og sideløbende med denne udvikling, har der i det matematikdidaktiske miljø været en omfattende international debat vedrørende begrundelserne for og indretningen af en matematikundervisning, der har modeller og modellering som et centralt element. Niss (1980, 1987, 1989) og Blum (1991) giver et review af denne debat.

Debatten har imidlertid ingenlunde ført til en afklaring af spørgsmålet om, hvilken rolle modeller og modellering kan og bør spille

---

Morten Blomhøj er Ph.D. i matematikkens didaktik. Han er ansat som adjunkt ved Roskilde Universitetscenter og som faglig sekretær for det danske initiativ Matematikundervisning og Demokrati under Statens Humanistiske Forskningsråd.

i matematikundervisningen på de forskellige niveauer. Snarere har debatten ført til erkendelse af problemfeltets kompleksitet. Kompleksiteten kan illustreres ved listning af følgende fem problemfelter, der nødvendigvis må være involveret i en belysning af modellers rolle og placering i matematikundervisningen:

(1) *Det erkendelsesteoretiske overvejelsesfelt* – spørgsmål vedr. matematiske begrebers natur og væsen

(2) *Det pædagogiske og psykologiske overvejelsesfelt* – spørgsmål vedr. undervisnings- og læreprocesser i matematik

(3) *Demokratiaspektet* – spørgsmål vedr. matematisk kompetence som element i en almen demokratisk kompetence i et moderne høj-teknologisk samfund

(4) *Implementationsproblemet* – vanskelighederne med at bryde og udvikle undervisningstraditionen i matematik

(5) *Det edb-mæssige overvejelsesfelt* – spørgsmål vedr. brugen af edb, herunder specielt mulighederne for at arbejde med forskellige repræsentationer af matematiske sammenhænge.

Netop derfor anser jeg spørgsmålet om modellers rolle og placering i matematikundervisningen for at være et centralt område i den matematikdidaktiske forskning.

Det udviklingsarbejde[1], der danner baggrund for denne artikel, er tilrettelagt og gennemført med henblik på at skabe situationer i matematikundervisningen på 9.-10. klassetrin, hvor eleverne selvstændigt kan opbygge, analysere og kritisere matematiske modeller. I det følgende refererer jeg til en sådan virksomhed med termen *modellering*.

I denne artikel vil jeg imidlertid begrænse mig til at diskutere tilrettelæggelsen og resultaterne af udviklingsarbejdet i forhold til følgende begrundelse for at inddrage modellering i den elementære matematikundervisning:

Arbejde med opbygning, analyse og kritik af simple matematiske modeller kan give grundlag for elevernes tilegnelse af teoretisk matematiske begreber, og til at disse begreber bliver en integreret del af elevernes viden og kunnen.

Dette valg må ikke tages som udtryk for, at jeg anser de andre

---

[1] Udviklingsarbejdet er realiseret i samarbejde med tre matematiklærere: Vibeke Nielsen, Mørdrupskolen, samt Anna Laursen og Kirsten Faxedahl, Trørødskolen. Endvidere har Ole Bredo, Danmarks Pædagogiske Institut, deltaget i udviklingsarbejdet som psykolog og Viggo Sadolin, Danmarks Lærerhøjskole, har medvirket som matematiker. Udviklingsarbejdet er detaljeret beskrevet i (Blomhøj, 1992a).

begrundelser, der sædvanligvis fremhæves som argumenter for at inddrage modeller og modellering i matematikundervisningen (se f.eks. Niss, 1989, s 23-24) som mindre vigtige – bestemt ikke. Men når det gælder den elementære matematikundervisning er modellerings betydning for elevernes tilegnelse af matematiske begreber mere grundlæggende end flere af de øvrige begrundelsesargumenter.

Det gælder for det første for argumentet (Niss, 1989, s 23), der hævder at arbejdet med modeller kan give et vigtigt bidrag til udviklingen af en modelleringskompetence, der er potentielt anvendelig i uddannelses- og erhvervssammenhænge. En af forudsætningerne for, at eleverne kan udvikle en praktisk anvendelig modelleringskompetence, er nemlig, at eleverne tilegner sig matematiske begreber og metoder på en sådan måde, at de selvstændigt kan anvende dem som modelleringsredskaber – også i situationer der er nye for dem.

Lad os for det andet se på argumentet (Niss, 1989, s 23) om, at arbejdet med modeller og modellering kan give et vigtigt bidrag til elevernes udvikling af en generel kritisk dømmekraft overfor opstilling og anvendelse af matematiske modeller. Hvis et sådant sigte skal tilgodeses – også i den elementære undervisning – kræver det, at der i undervisningen kan skabes situationer, hvor eleverne kan få lejlighed til at analysere og kritisere anvendelsen af simple matematiske modeller, hvad enten de selv har opstillet dem eller ej. En grundlæggende forudsætning for en sådan virksomhed er, at eleverne er i stand til skelne mellem modellen, der evt. er repræsenteret symbolsk (f.eks.: $P_q = P_1 \cdot q$) og det system, der modelleres og som udgør konteksten for den konkrete interpretation af modellen, hvor symbolerne fortolkes med henvisning til systemets objekter (f.eks. fortolkes P_q som prisen for q kg kartofler og P_1 som kiloprisen). Eleverne kan imidlertid kun fastholde en sådan adskillelse, hvis de har en – i det mindste begyndende – teoretisk forståelse af de begreber, der indgår i modellen.

Jeg hævder med andre ord, at grundlaget for, at eleverne kan få mulighed for at kritisere opstilling og anvendelse af matematiske modeller er, at der i undervisningen arbejdes med modellering af simple sammenhænge under anvendelse af matematiske begreber, der i forvejen indgår i undervisningen. Netop herved kan elevernes arbejde med modellering give et vigtigt bidrag til tilegnelse af de matematiske begreber der kommer i spil i sådanne modelleringssituationer. En og samme elevvirksomhed kan således anskues både ud fra elevernes tilegnelse af bestemte matematiske begreber og ud fra deres arbejde med modellering, der har en teoretisk forståelse af disse begreber som forudsætning. Dette udgør en læringsmæssig komplementaritet, der må spille en vigtig rolle i overvejelserne af modellering i den elementære matematikundervisning.

Situationen i den danske folkeskole

Når det gælder den elementære matematikundervisning, er det specielt påkrævet, at beskæftigelsen med modeller og modellering ses som en integreret del af elevernes tilegnelse af matematisk viden, der er potentielt brugbar overfor virkelighedens problemer. Inddragelsen af modeller i den danske folkeskole er imidlertid sket i forbindelse med en generel bestræbelse på at integrere edb i de enkelte skolefag. I 1990 udsendtes således en ny supplerende undervisningsvejledning vedrørende faget regning/matematik og edb. Denne indeholder et helt kapitel om problemløsning og modeller (Um, 1990, s 17-23). Heri lægges der op til, at eleverne fortrinsvis skal arbejde med edb-modeller (modeller, der er implementerede i færdige edb-programmer).

En typisk undervisningsaktivitet kunne i denne forbindelse være et forløb, hvor eleverne introduceres til et edb-program, der kan simulere udviklingen af Danmarks befolkning ud fra bestemte modelantagelser. Eleverne foretager forskellige modelkørsler, og eksperimenterer herunder selv med modellen ved at ændre på udvalgte model-parametre. Endvidere arbejder de med at fortolke programmets output (tabeller og grafer) i forhold til spørgsmål om udviklingen i befolkningens størrelse og sammensætning under forskellige forudsætninger (Malmberg, 1987) og (Larsen mfl, 1992, s 14-20).

En sådan fortolkning af, hvad det skal betyde at arbejde med modeller i folkeskolens matematikundervisning vil klart blive understøttet af, at den almindelige holdning blandt matematiklærere er, at opbygning og behandling af matematiske modeller i undervisningen kræver enten avanceret matematisk teori (mindst gymnasieniveau) eller datalogiske hjælpemidler. Hvis praksis omkring inddragelsen af modeller udvikler sig ensidigt i denne retning vil undervisningen ikke kunne tilgodese det kritiske sigte, der i undervisningsvejledningen anføres som en begrundelse for inddragelsen af modeller i skolens matematikundervisning:

> Arbejdet med edb-modeller i skolen kan somme tider foregå ved brug af færdige modeller, hvor eleverne ikke har haft nogen indflydelse på udformningen. Det er imidlertid afgørende, at de i undervisningen også møder eksempler på modeller, hvor de kan tage del i overvejelserne over modellens opbygning, således at de på grundlag af et førstehåndskendskab til modellen kan tage kritisk stilling til dens anvendelsesmuligheder i forelagte problemløsningssituationer (Um, 1990, s 23).

Som det antydningsvis fremgår af citatet anses elevernes forståelse af den matematik, der indgår i modellerne for at være en forudsætning for, at de kan forholde sig kritisk til modellerne.

Den anden side af komplementariteten, (at modellering kan bidrage til elevernes tilegnelse af matematiske begreber) er derimod fuldstændigt fraværende i edb-vejledningen. Her er der i høj grad tale om erkendte vanskeligheder. Selvom der på 7.-10. klassetrin bruges megen undervisningstid (omend væsentligt mindre end tidligere) på begreber som "proportionalitet" og "den rette linies ligning" er det kun de allerfærreste elever, der bliver i stand til at anvende disse begreber til modellering af fænomener fra dagligdagen uden for skolen eller fra andre skolefag. Disse vanskeligheder viser sig særligt tydeligt ved overgangen fra folkeskolen til gymnasiet. Skolesystemets erkendelse af vanskelighederne viser sig bl.a. ved, at der til de afsluttende skriftlige prøver i matematik aldrig stilles opgaver, hvor eleverne selv skal matematisere en sprogligt formuleret sammenhæng, endsige selv gøre antagelser som muliggør en matematisering.

Modellering som grundlag for tilegnelsen af matematiske begreber.

Således motiveret, at jeg i denne artikel beskæftiger mig med modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber, vil jeg i de to følgende afsnit fremføre henholdsvis et didaktisk og et erkendelsesteoretisk argument for, at modellering kan spille en vigtig rolle i tilegnelsen af matematik.

Et didaktisk argument

Særligt fra den erkendelsesteoretisk orienterede indlæringspsykologi har der kunnet hentes støtte til kritikken af den traditionelle opfattelse af læring i matematik. Stærkt inspireret af konstruktivismen er det inden for denne del af indlæringspsykologien efterhånden en grundantagelse i studiet af læreprocesser, at viden og kognitive strategier konstrueres af den lærende selv (Lerman, 1989). Paul Cobb (1988) skriver om denne antagelses forhold til studiet af læreprocesser i matematik:

> This widely held assumption has a solid epistemological foundation and is generally consistent with literature that documents students' cognitive delevopment in specific areas of mathematics, particularly their misconceptions (s 87).

Hvis man vil uddrage didaktiske konsekvenser for matematikundervisningen af den konstruktivistiske opfattelse af læring, rejser der sig imidlertid en række vanskelige undervisningsmæssige problemer. Lad mig her nævne to af de vigtigste:

(1) Hvordan kan læreren tilrettelægge undervisningssituationer, der kan støtte en sådan personlig begrebskonstruktion for alle elever?

(2) Hvordan kan undervisningen bidrage til, at der på grundlag af de enkelte elevers læring opbygges en fælles faglig læring i klassen, der er i rimelig overensstemmelse med det tilsigtede?

I tilknytning til (1) er det afgørende, at udgangspunktet for en personlig konstruktion af matematiske begreber er den lærendes egne handlinger samt tidligere erhvervet viden og erfaringer. Når eleverne møder til matematikundervisningen, har de omfattende erfaringer og viden vedrørende en lang række fænomener, der kan beskrives, analyseres og beherskes ved hjælp af matematik. Sådanne erfaringer stammer såvel fra andre skolefag som fra dagliglivet uden for skolen, men det er karakteristisk, at de ikke har karakter af færdige matematiske begrebsdannelser. Det kræver derimod en omfattende undervisningsindsats at realisere sådanne erfaringer som grundlag for elevernes konstruktion af matematiske begreber.

Hvis elevernes erfaringer skal udnyttes som grundlag for deres personlige konstruktion af matematiske begreber, må der derfor i undervisningen skabes situationer, hvor elevernes erfaringer ved lærerens mellemkomst kan forbindes til matematiske begreber og relationer. I denne sammenhæng er matematisk modellering – taget i begrebets bredeste betydning – efter min opfattelse et særdeles vigtigt didaktisk redskab.

Ser vi på (2), tegner der sig et ægte dilemma for en matematikundervisning, der bygger på en konstruktivistisk opfattelse af læring. På den ene side skal læreren gennem sin undervisning fremme opbygningen af en fælles teoretisk faglig viden, der er i rimelig overensstemmelse med sigte og mål for faget i skolen. På den anden side må læreren – for at give grundlag for elevernes personlige konstruktion af viden – i sin undervisning tage udgangspunkt i den enkelte elevs erfaringer. Det er klart, at dette dilemma strammer til, hvis det officielle mål med undervisningen detaljeres, og hvis elevernes baggrund, opfattelser og indstilling dehomogeniseres. Paul Cobb (1989) henfører dette dilemma til betydningsforskelle vedrørende begrebet ”matematisk viden” når det analyseres ud fra en erfaringsmæssig, henholdsvis en kognitiv kontekst. Som en tredje vinkel på analysen af begrebet ”matematisk viden” opererer Cobb med en antropologisk kontekst. Her betragtes matematisk viden som eksisterende i det sociale samspil mellem mennesker og viden bliver hermed noget, der i dette samspil udvikles gennem drøftelser, forhandlinger osv. Dette rummer en didaktisk interessant mulighed for at håndtere det omtalte dilemma ved i undervisningen at lægge hovedvægten på konstruktion af en fælles faglig viden gennem den sociale proces i klassen.

Hvis der i arbejdet med modellering lægges vægt på vekselvirkningen mellem på den ene side elevernes faglige forudsætninger og den matematiske opbygning af modellen og på den anden side elevernes erfaringer og nye indsigter vedrørende det pågældende virkelighedsområde, kan modellering være et nyttigt arbejdsredskab for læreren i håndteringen af dette dilemma.

Tilsvarende synspunkter fremsættes af Wyndhamn (1992), der ud fra en konstruktivistisk synsvinkel analyserer betydningen af adskillelsen mellem den matematik, eleverne bruger i hverdagslivet, og den matematik, de møder i matematikundervisningen. Han argumenterer for, at arbejdet med modellering kan skabe den nødvendige forbindelse mellem matematikken i de to miljøer. Modellering kan herved blive et redskab til at overkomme parallelisme-problemet.

Et erkendelsesteoretisk argument

Steinbring har i ”Routine and meaning in the mathematics classroom.” (1989) bl.a. behandlet spørgsmålet om elevernes tilegnelse af matematiske begreber. Steinbring betragter et objekt (en genstand for undervisning, f.eks. en eller flere opgaver knyttet til en fælles kontekst) og de symbolske repræsentationer, som eleverne benytter til repræsentation af deres handlinger med objektet og deres resultater af disse handlinger. Pointen er, at det eller de begreb(er), som læreren gennem undervisningen sigter på, at eleverne tilegner sig, opbygges i eleven i kraft af et netværk af relationer, som eleven oplever mellem objekt og symbol. Steinbring fremhæver, at matematikundervisning ofte tager form af at relatere aktuelle symbolske repræsentationer til et givet anvendelsesområde for derved at indøve operative manipulationer med symbolerne. Tænk f.eks. på den traditionelle undervisning i procentregning og regning med brøker. Netop derfor er det overordentlig vigtigt, at man i undervisningen bevidst søger at adskille anvendelsessiden fra repræsentationssiden af den matematiske viden.

Når det drejer sig om matematisk modellering er det intenderede objekt for elevvirksomheden et system som skal modelleres. En sådan virksomhed vil nødvendigvis involvere en række matematiske begreber, der kan være mere eller mindre i fokus i forhold til lærerens planlægning. Det centrale er imidlertid, at hvis eleverne i undervisningen kommer til at arbejdet med opbygning, analyse og kritik af simple matematiske modeller, vil de også udvikle de principielle forudsætninger for at tilegne sig en række vigtige matematiske begreber.

Dette syn på det læringsmæssige potentiale i modelleringsvirksomhed deles af den schweiziske gruppe omkring B. Vitale, der bl.a. har udført empiriske studier af elevers modelleringsvirksomhed i LOGO-omgivelser (Vitale, 1991).

> For us, "model-building" goes much deeper than either "giving an explanation" or "making a procedural analysis" of observed phenomena and ways of thinking. ..... several psycho-cognitive components intervene in the description of this activity: in particular, the recognition by the pupil of the need (or, at least, the interest) of a model for the solution of a problem; the capability of verbal, gestual and graphical representations of the underlying process; the explicit choice and the clear definition of the relevant variables, parameters and functional dependencies, needed for the mathematical description (Gurtner & Vitale, 1991, p. 2).

Det er imidlertid oplagt, at et sådant sigte med modellering i den elementære matematikundervisning stiller store krav til læreren. For det første kræver det en stor didaktisk indsats at skabe situationer, hvor eleverne rent faktisk selv arbejder med modellering. For det andet er det vanskeligt for læreren, der som sin overordnede hensigt med virksomheden naturligt nok har selve modeldannelsen, at fastholde intentioner vedrørende elevernes tilegnelse af de matematiske begreber, der indgår i elevvirksomheden. For det tredje kræver det et fagligt overskud og overblik at udnytte situationer, der opstår i en sådan modelleringsvirksomhed, som støtte for de enkelte elevers tilegnelse og afklaring af indgående matematiske begreber. Hertil kommer at læreren er forpligtet til at søge at almengøre de enkelte elevers erfaringer som grundlag for opbygning af en fælles faglig viden for hele klassen.

Hvis man tager intentionen for folkeskolens matematikundervisning om, at undervisningen skal bidrage til, at eleverne erhverver sig en potentielt brugbar viden, som de kan anvende også i situationer, der er nye for dem – og ikke blot instrumentale færdigheder som kun kan bringes i anvendelse overfor bestemte standard problemer – er det imidlertid påkrævet at vi forsøger at imødegå disse vanskeligheder med forsknings- og udviklingsmæssig indsats.

Udviklingsarbejdets faglige indhold og organisering

Udviklingsarbejdet har omfattet gennemførelsen af 2 undervisningsfor-

[2] Udviklingsarbejdet er forløbet i tre faser: (1) det forberedende samarbejde med lærerne; (2) gennemførelsen af undervisningsforløbene; (3) evaluering af udviklingsarbejdet. I Blomhøj (1992b) er udviklingsarbejdet beskrevet som eksempel på en forskningspraksis inden for matematikkens didaktik, der har samspillet mellem udviklingen af didaktisk teori og matematikundervisningens praksis som overordnet sigte.

løb á 4-7 lektioners varighed i en 9. og to 10. klasser samt et forløb i yderligere en 9. klasse[2]. Det faglige indhold i udviklingsarbejdet kan kort beskrives som modellering af dynamiske systemer ved hjælp af differensligninger, der kan beregnes i et regneark. Efter 4 lektioners forudgående introduktion til regnearket infaREGN , blev eleverne af deres lærer præsenteret for en problemstilling, der skulle danne udgangspunkt for deres arbejde med modellering[3]. Følgende emner/problemstillinger blev behandlet i udviklingsarbejdet: Talfølger (flere forskellige problemstillinger, primært introduktion til regnearket), Lineære funktioner (flere forskellige problemstillinger), En bil bremser, Vindenergi, Afkøling, Afbetalings- og opsparingsordninger (flere problemstillinger). Efter lærerens præsentation af problemstillingen arbejdede eleverne i grupper på 2-3 elever, der hver havde en computer til rådighed. Til støtte for elevernes arbejde var der i samarbejde med lærerne udarbejdet elevtekster til de enkelte problemstillinger[4]. Disse tekster blev givet som lektier forud for de enkelte forløb.

I forhold til modellerings betydning for elevernes tilegnelse af matematiske begreber bygger valget af fagligt indhold på, at eleverne på skolens ældste klassetrin har forudsætninger for selv at fortolke og opstille differensligningsmodeller for simple dynamiske systemer (også omfattende koblede processer), i en iterativ notationsform. Eksempelvis kan en opsparingsannuitet beskrives ved ligningen:

$$Ny\ K = K + r \cdot K + I,$$

hvor K er den aktuelle saldo, $Ny\ K$ er saldoen efter den næste termin, r rentefoden pr. termin og I er det faste indskud pr. termin. Efter en kort introduktion til regnearket infaREGN kan eleverne selv implementere sådanne differensligningsmodeller ved hjælp af formelkopiering, således at de kan analysere modellerne f.eks. med hensyn til variation i parameter- og begyndelsesværdier. Når vi hertil lægger at de problemstillinger, der indgår i udviklingsarbejdet i høj grad vedrører fænomener, som eleverne i forvejen har erfaringer med/viden om, får vi et grundlag for en modelleringsvirksomhed, der kan

---

[3] I udviklingsarbejdet anvendte vi regnearket infaREGN, der er udviklet af Viggo Sadolin, Danmarks Lærerhøjskole (Sadolin, 1991). Dette regneark udmærker sig ved let adgang til formelkopiering med mærkning af celler, der ikke skal opdateres (således implementeres modelparametre) og til grafisk fremstilling af sammenhængen mellem søjle-/rækkepar.

[4] Flere af emnerne er bearbejdet i forskellige typer af elevtekster. Tilsammen repræsenterer teksterne en differentiering med hensyn til: grad af åbenhed i spørgsmålene; i hvilken grad eleverne selv skal matematisere; samt i hvilken grad eleverne skal fremskaffe og udnytte viden fra andre fagområder i arbejdet med problemstillingerne. Elevteksterne er senere bearbejdet og indgår nu i (Sadolin & Blomhøj, 1992).

støtte tilegnelsen af centrale matematiske begreber, der i forvejen indgår i skolens matematikundervisning. I forhold til elevvirksomheden i udviklingsarbejdet har det først og fremmest drejede sig om begreberne: (u)afhængig variabel, parameter, funktion, iteration, koordinatsystem, grafisk afbildning, lineære funktioner, lineær vækst, hældningskoefficient, procentuel vækst, fremskrivningsfaktor, parablen, og annuitet.
Jeg understreger at udviklingsarbejdet som sagt ikke er tilrettelagt med henblik på at støtte tilegnelse af netop disse begreber. Sigtet med udviklingsarbejdet var at skabe situationer, hvor eleverne rent faktisk med modellering for herved at kunne studere en sådan virksomheds betydning dels for elevernes udviklingen af en kritisk dømmekraft overfor anvendelsen af matematiske modeller, dels for deres tilegnelse af matematiske begreber – som det er emnet for denne artikel. I afsnit 5 giver jeg en analyse af elevvirksomheden med henblik på at klargøre hvilke principielle vanskeligheder, der er forbundet med at realisere læringspotentialet i en sådan modelleringsvirksomhed. Først er det dog på sin plads at give en kort redegørelse for det empiriske grundlag for denne analyse.

Det empiriske grundlag for analysen af elevvirksomheden

Udviklingsarbejdet har omfattet i alt 35 lektioner, heraf har forfatteren medvirket som deltagende observatør i 32 lektioner. Endvidere har Ole Bredo og Viggo Sadolin medvirket som deltagende observatører i henholdsvis 20 og 15 lektioner. Der er herved blevet tilvejebragt et solidt empirisk grundlag for analyse af elevernes virksomhed, bestående af: observatørholdets generelle iagttagelser af arbejdet i klasserne; deres registrering af nogle af de dialoger, som de hver især havde med eleverne eller som de overhørte under arbejdet i klasserne; det materiale (udprint af skærmbillede, tegnede grafer, og skriftlige besvarelser af opgaver fra elevteksterne), som eleverne selv producerede under forløbene; de rapporter over arbejdet med problemstillingen "Afkøling", som den ene 10. klasse afleverede; elevernes mundtlige kommentarer under og ved afslutningen af de enkelte forløb; lærernes kommentarer under og efter forløbene; samt deres udtalelser ved de afsluttende evalueringsmøder.

Resultater fra analysen af elevvirksomheden

I forhold til emnet for denne artikel har analysen af elevvirksomhed resulteret i to forskellige typer af resultater. For det første har erfaringerne fra udviklingsarbejdet vist, at det kan lade sig gøre at gennemføre undervisningsforløb i matematikundervisningen på folkeskolens 9.-10. klassetrin, hvor næsten alle elever bliver engageret i en modelleringsvirksomhed, der indeholder et stort læringsmæssigt potentiale både i forhold tilegnelsen af matematiske begreber og i forhold til opbygningen af en kritisk dømmekraft overfor anvendelsen af matematiske modeller. For det andet har analysen af elevvirksomhed afdækket en række didaktiske og indlæringspsykologiske vanskeligheder ved at realisere dette læringspotentiale. Når vi kommer til betydningen af modelleringsvirksomhed for den enkelte elevs tilegnelse af konkrete matematiske begreber, giver alene udviklingsarbejdets tidsperspektiv (10-12 lektioner i hver klasse) kraftige begrænsninger på, hvilke konklusioner, der kan drages på grundlag af empirien.

I analysen af empirien fra undervisningsforløbene har det vist sig, at elevvirksomheden kunne karakteriseres på en frugtbar måde ud fra følgende fire domæner. Domænerne er beskrevet ved henvisning til elementer i modelleringsprocessen og ved den dominerende betydning af begrebet "model". (Blomhøj, 1992a, kap 6). Det drejer sig om:

Et virkelighedsdomæne, hvor elevernes arbejde vedrører forståelse og diskussion af et problem, der i elevernes bevidsthed eksisterer også uden for matematikundervisningen. I forhold til modelleringsprocessen repræsenterer dette domæne modelleringsprocessens udgangs-punkt, "Problemet". En model er her "et middel til opnåelse af fælles erkendelse af og til kommunikation om et problemfelt".

Et opgavetekstdomæne, hvor eleverne arbejder med en opgave inden for den kontekst, der definerer opgaven. I relation til modelleringsprocessen vedrører dette domæne "Systemet". En model er her "antagelser og forestillinger om bestemte for eleverne mere eller mindre velkendte fænomener".

Et formeldomæne, hvor elevernes arbejde vedrører forståelse eller frembringelse af en formaliseret beskrivelse af opgaven (systemet) i f.eks. differensligningsnotation. Dette domæne knytter sig til den matematiserede model og en model fungerer her som "en komprimeret procesbeskrivelse".

---

[5] Analysen af elevvirksomheden ud fra disse domæner er inspireret af et samarbejde mellem Ole Bredo, Thomas Nissen (begge Danmarks Pædagogiske Institut) og forfatteren, om de undervisningspsykologiske aspekter af udviklingsarbejdet. En tilsvarende tilgang til analysen af elevvirksomheden er anvendt af Blomhøj & Bredo (1992) i et udviklingsarbejde vedrørende geometri.

Et regnearksdomæne, hvor elevernes virksomhed primært retter sig mod betjening af regnearkprogrammet infaREGN. Dette domæne knytter sig først og fremmest til "Model-resultater" i modelleringsprocessen og en model identificeres her med "de tabeller og grafer over bestemte tilstandes udvikling, som produceres ved hjælp af regnearket"[5].

I forhold til intentionen om, at modelleringsvirksomheden skulle bidrage til elevernes tilegnelse af matematiske begreber er det, jf. afsnit 3 afgørende, at eleverne oplever samspillet mellem de fire domæner for deres virksomhed. Selvom om vi ved udarbejdelse af elevteksterne havde bestræbt os på at anspore eleverne til at overveje deres handlinger og fortolke deres resultater i forhold til opgavekonteksten og den virkelighed problemet vedrører, var det karakteristisk for alle forløbene, at eleverne i starten var fikserede på opgavernes løsning alene inden for regnearksdomænet. Det var derfor en vigtig del af lærerens (og de deltagende observatørers) rolle at udfordre den indledende elevvirksomhed inden for regnearksdomænet gennem indgribende dialoger med de enkelte elevgrupper.

Der var naturligvis store forskelle mellem de enkelte grupper på forløbet og resultatet af sådanne dialoger. Generelt viste analysen af disse lærer-elevgruppe dialoger, at elevernes indledende virksomhed, der var stærkt knyttet til brugen af regnearket, udgjorde et særdeles frugtbart grundlag for udfordring af elevernes virksomhed. Lærerens første replik i sådanne udfordrende dialoger sigtede ofte på at få eleverne til at beskrive deres konkrete "regnearksprodukter" (opstillingerne af tal i søjler eller grafiske repræsentationer heraf). Det var karakteristisk, at selvom eleverne selv havde opbygget et regneark (f.eks. for en børneopsparing), var det meget få grupper, der af sig selv udnyttede relevante faglige begreber i beskrivelsen af deres regneark – også selvom disse begreber var dem velkendte fra matematikundervisningen, (f.eks.:"Søjle D viser saldoen som funktion af terminsnummeret").

I den fortsatte dialog, hvor læreren spurgte mere konkret til fortolkningen af regnearket i forhold til opgavekonteksten (f.eks.: "Hvad hvis jeg starter med 1000 kr. i stedet for 500 kr." eller "Hvordan skal jeres formel se ud, hvis der i C2 står renten i % p.a. i stedet for rentefoden pr. termin?"), opstod der ofte grundlag for, at eleverne – ansporet af læreren – påtog sig ekstra udfordringer, der krævede refleksion over sammenhængen mellem forudsætninger for og resultaterne af deres virksomhed inden for forskellige domæner (f.eks. "Hvad hvis det var tilbagebetalingen af et lån I skulle beskrive?" eller "Hvor meget er børneopsparingen værd efter 16 år, hvis man medregner inflationen?").

Mange elever havde dog en modvilje mod at formulere sig om deres egen virksomhed og havde derved svært ved indgå konstruktivt i dialogen. Henvisning til elevernes dagligdagserfaringer og til velkendte matematiske begreber kunne ofte hjælpe eleverne i denne kommunikation. Den sociale omsorg for eleverne under sådanne udfordrende elev-lærer dialoger spillede naturligvis også en vigtig rolle. Det vigtigste i denne forbindelse var lærerens interesse for elevernes virksomhed (ikke kun for resultaterne af den). Erfaringerne fra udviklingsarbejdet peger også på et aktualitetskriterium for lærerens udfordring af elevernes virksomhed. Hvis eleverne en gang havde anset en opgave for løst og evt. fået resultatet kontrolleret, var de meget lidt tilbøjelige til at genoverveje opgaven f.eks. i sammenhæng med en anden opgave. Derimod var det ofte særdeles frugtbart, hvis dialogen med eleverne kunne indledes med spørgsmål af typen "Det var nogle flotte kurver, I har lavet der, hvad viser de?".

Tilbage bliver imidlertid indtrykket af, at nogle elever – det kan både dreje sig om elever, der af læreren vurderes som fagligt stærke og elever, der vurderes som svage – føler sig voldsomt anfægtet af, at der stilles spørgsmål om forudsætningerne for og fortolkningen af deres egne resultater. Det er min vurdering, at årsagen til anfægtelsen hos disse elever er, at de i dialogen med læreren oplever skrøbelighed af deres faglige viden. De har således en klar egen forventning om at de skulle kunne mestre fortolkning af deres virksomhed i forhold til opgavetekstens og virkelighedens domæner.

I det følgende gengiver jeg tre eksempler på dialoger, der alle efter min vurdering kan siges at afdække en del af det læringspotentiale, der indeholdt i elevernes modelleringsvirksomhed.

Eksempel 1: Taxi-kørsel

I forbindelse med to elevers arbejde med en opgave om taxi-kørsel fra teksten "Lineære funktioner" udspandt der sig følgende dialog. Eleverne er nået til at lave en søjle i deres regneark, der kan beregne, hvor meget det koster at køre fra 1-20 km i taxi i København til dag-takst. (Start- og km-taksterne er opgivet i et skema til 12 kr. og 7 kr.)

L: Prøv først at lave en tabel på et stykke papir, der viser hvad det koster. (Læreren går).

Lidt efter har eleverne, ved at lægge 7 kr. til den foregående pris, lavet en tabel som denne:

km	0	1	2	3
kr	12	19	26	33

Læreren afbryder elevernes arbejde på denne måde:

L: Prøv at lave en graf, der viser sammenhængen mellem, hvor langt man kører og hvad det koster.
E1: I et koordinatsystem?
L: Ja, hvad skal der være ud af 1. aksen?
E1: Kroner?
E2: Nej, det skal være kilometer! (Læren går)

5 minutter efter har eleverne fået afsat de fire punkter fra deres tabel og tegnet en ret linie gennem punkterne.

L: Hvad er det I har tegnet?
E1: En graf.
L: Ja! og hvad er det for en slags graf?
E1: Den er lige!
L: Hvordan tegnede I grafen?
E2: Vi prikkede punkterne fra vores tabel ind i koordinatsystemet.
L: Ja, og hvad gjorde I så?
E2: Vi tegnede grafen!
L: Hvordan gjorde I det?
E1: Vi brugte såmænd en lineal! (eleverne griner).
L: Nå!, hvorfor det?
E2: Vi kunne se, det blev en ret linie!
L: Ja!, det bliver en ret linie. Hvilken hældningskoefficient har den?
E2: Den må være 7! Når vi går en frem, skal vi jo gå 7 op.
L: Ja, hvorfor det?
E1: Fordi det koster 7 kr. for hver kilometer.
L: Ja! det er rigtigt. Prøv nu at gå videre med jeres regneark. (Læreren går).

Lidt efter har eleverne lavet et regneark med en B-søjle, der viser tallene 0-20 og en C-søjle, der viser priserne for 0-3 km. (Priser for 1-3 km er blå tal, dvs. de er beregnet ved hjælp af en formel).

L: Vis mig lige den formel, I bruger til at beregne priserne.
E2: (Flytter cursoren til celle C5, peger på indholdet af formelcellen ”C4+7”, der står nederst i venstre hjørne på skærmen) Vi lægger bare 7 til!
L: Prøv at tegne grafen på skærmen

Læreren følger med i elevernes valg af de forskellige muligheder under menu-punktet ”grafer”. Eleverne vælger ”linier” og ”søjler”.

E1: Hvad er det nu, der er den uafhængige søjle?
L: Det er de tal, der skal ud af 1. aksen.
E1: Det skal være B-søjlen!
L: Ja! det er rigtigt!
E2: 1. afhængige søjle må være C.
E1: Startrække 4 og slutrække 24.

Lidt efter har eleverne fået tegnet et liniestykke fra punktet (0,12) til punktet (3,33).

E2: Hvorfor får vi ikke hele linien?

L: Hvordan var det I gjorde?

E1: Vi brugte linealen (lille grin).

L: Ja, I sagde, at I kunne se det blev en ret linie! Hvordan med programmet – ved det, at det skal være en linie?

E1: Ja, vi valgte jo ”linie” lige før!

L: Ja det er rigtigt, men ”linier” betyder bare, at de punkter, I har angivet i regnearket, bliver forbundet med liniestykker i stedet for f.eks. at blive afsat som søjler. I er faktisk smartere end programmet. I behøvede kun fire punkter for at tegne en linie, der viser, hvad det koster at køre op til 20 km. Nu kunne jeg tænke mig, at I prøvede at lave jeres regneark sådan, at man kan ændre på start- og km-taksterne og med det samme få regnet ud, hvad det koster at køre en bestemt tur.

I denne dialog sigter læreren meget bevidst på at få eleverne til at beskrive den graf, de selv har lavet for sammenhængen mellem, hvor langt man kører i taxi og hvad det koster ved hjælp af faglige begreber. Resultatet bliver, at begreberne ”ret linie” og ”hældningskoefficient” bliver brugt til at beskrive forbindelsen mellem på den ene side tabellen og grafen, som eleverne har lavet og på den anden side opgavens kontekst. Herefter arbejder eleverne videre med at fremstille en tilsvarende tabel og graf ved hjælp af regnearket. Herved får eleverne grundlag for at forstå principielt vigtige forhold vedrørende regnearkets funktion. Samtalen med læreren, hvor der knyttes forbindelse mellem modellens resultater og faglige begreber, som eleverne kender i forvejen, giver endvidere et frugtbart grundlag for, at eleverne efterfølgende i forskellige situationer selv kan anvende modellen.

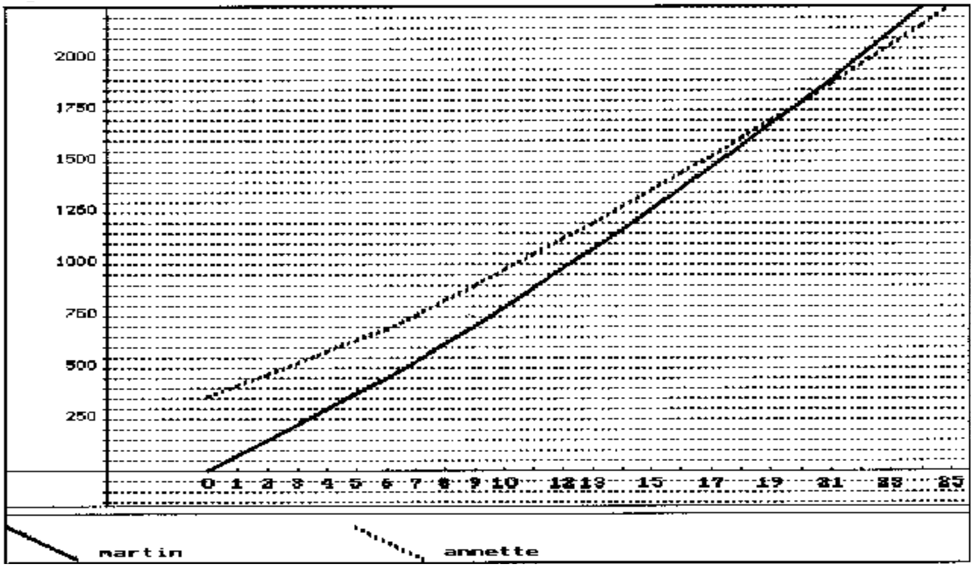
Eksempel 2: Lommepenge

Under arbejdet med en opgave i teksten ”Økonomi” udspandt der sig følgende dialog mellem en lærer og en elev, der med megen møje og besvær havde arbejdet sig gennem de fleste af de tidligere opgaver. Eleven havde netop fået tegnet to grafer (som vist i nedenstående figur), der viser et opsparingsforløb for Martin og Annette, der får henholdsvis 75 kr. og 55 kr. per måned i lommepenge. (Annette har 360 kr. og Martin har 0 kr. i forvejen.) Efter de første 6 måneder får de forrentet deres opsparing med 2 % pr. måned. (Regnearket er – på lærerens anvisning – lavet sådan, at rentefoden kan varieres).

L: Prøv at forklare, hvad graferne viser. (Se figuren på neste side.)

E: Det er Martins opsparing og det er Annettes opsparing (eleven peger på de respektive grafer).

L: Hvornår overhaler Martin Annette?

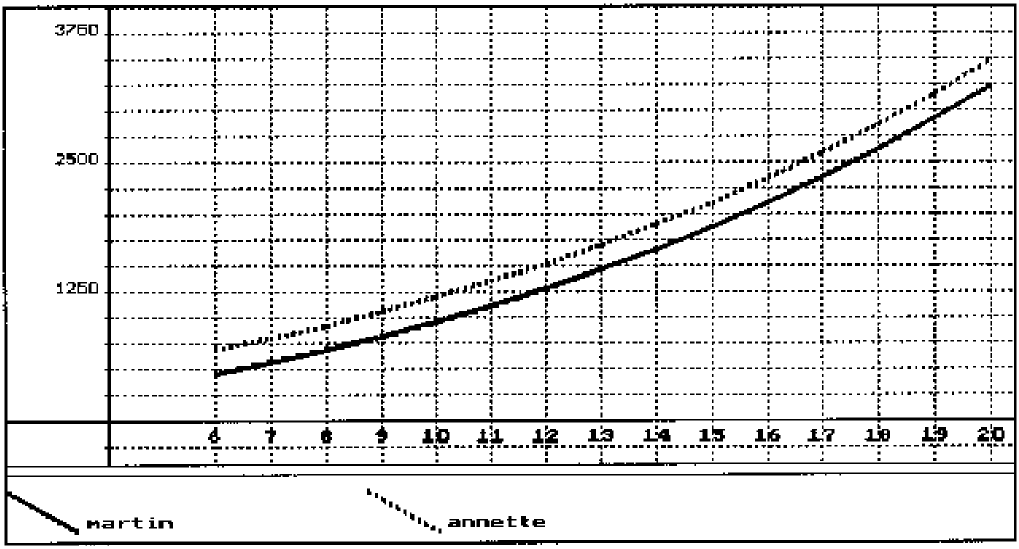


Figur 1. Martins og Annettes opsparing af lommepenge. Efter 6 måneder får de 2 % pr. måned i rente. (Figur 1-3 er "grabet" med WP 5.1 fra regnearket infaREGN, der blev anvendt i udviklings-arbejdet.)

Kort pause.
E: Der! (eleven peger på skæringspunktet for de to grafer).
L: Hvor mange måneder er der da gået?
E: (Elever fører fingeren fra skæringspunktet lodret ned til 1. aksen) ca. 20.
L: Hvorfor er der et knæk på grafen her? (Læreren peger på Martins graf ved 6 måneder).
E: Det er jo der, de begynder at få renter!
L: Ja! Hvordan er grafen fra 0 til 6 måneder?
E: Det er en ret linie – ligesom de første grafer jeg tegnede!
L: Ja! Det er nemlig rigtigt.

Læreren stiller nu et spørgsmålet fra teksten i sin egen formulering:

L: Vil Martin altid overhale Annette, uanset hvor meget de får i rente?
E: Ja! Det tror jeg i hvert fald!
L: Hvordan kunne du undersøge det?
E: Det ved jeg ikke – kunne man ikke prøve med 10%?
L: God idé! – (Læreren går).
L: (Lidt senere) Hvordan går det med 10%?
E: (Peger på søjlerne) Han har ikke overhalet hende efter 25 måneder!
L: Prøv at tegne graferne!
E: (Lidt senere) Det er mærkeligt, forskellen bliver større, så overhaler han hende vel aldrig.
L: Hvordan går det, hvis de får 8% i rente?
E: Vi kan prøve!
E: (Noget senere) Han overhaler hende efter 52 måneder! (Søjlerne er kopieret ned



Figur 2. Martins og Annettes opsparing når de får 8,33 % pr måned i rente.

til 54. måned.)

L: Det var interessant! Det er lang tid! – Der må altså være en rente mellem 8 og 10%, hvor forskellen bliver ved med at være 240 kr.

E: Kan man finde den?

L: Du kan jo prøve! Du må gerne bruge resten af timen på det, der er 10 minutter tilbage.

E: (Ved timens slutning). Med 8.33% er der næsten den samme forskel hele tiden!

Eleven afleverer et print med det grafiske billede, der er vist på figuren på næste side. Følgende tekst var anført under graferne: "Martin og Annette får henholdsvis 75 og 55 kr. De starter med henholdsvis 450 og 690 kr. og får 8.33 % i rente. I dette tilfælde løber søjlerne parallelt med hinanden hele vejen."

Det centrale i dette eksempel er, at eleven er/bliver i stand til at se det regneark, hun selv har lavet, som en model til at analysere forskellige spørgsmål vedrørende den foreliggende kontekst. Hun har derfor muligheden for selv at foreslå at variere rentesatsen som en parameter i modellen og det er baggrunden for, at hun kan gøre det til sit eget problem at finde den rentesats, der giver parallelle opsparingsforløb. Efter min opfattelse ligger der et stort indlæringspontentiale gemt i denne virksomhed. Jeg tænker her på, at eleven har erhvervet sig et erfaringsgrundlag for forståelse af samspillet mellem indskud og rente og dermed for tilegnelsen af begrebet annuitet. I et videre perspektiv kan virksomheden tjene som grundlag for tilegnelsen af begrebet kontinuitet og metoden bisektion.

Eksempel 3: En bil bremser

Under arbejdet med teksten ”En bil bremser” har to eleverne opbygget en model for standselængden af en bil som funktion af tiden. Der er tre parametre i modellen: reaktionstiden (for tilfældet 0.5 sek), bilens bremseevne (negativ acceleration, 8 m/sek^2) og skridtlængden i regnearket (1 sek). Med 120 km/t (33.3 m/sek) som begyndelsesværdi har eleverne fået tegnet graferne for henholdsvis hastigheden og strækningen under opbremsningen (kurverne (1) og (2) på følgende figur). Eleverne har i dialog med en lærer fortolket grafen for hastigheden i forhold til reaktionstid og bremseevne (hældningskoefficient –8 m/sek^2). Herefter forløber dialogen således:

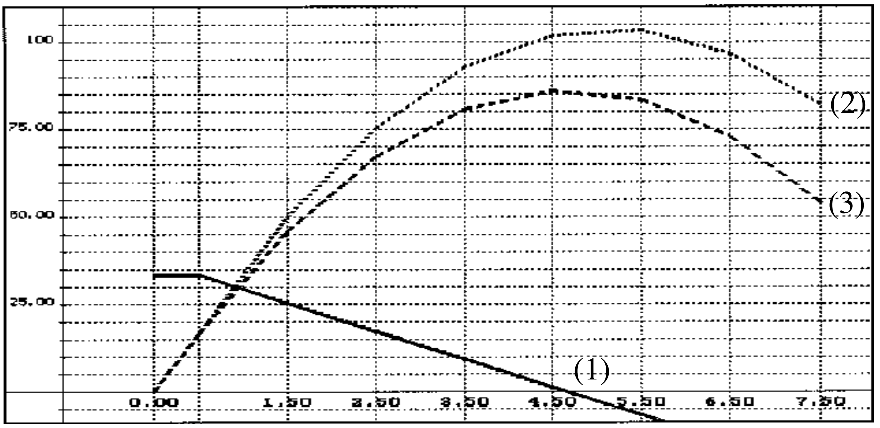
L: Kan I forklare, hvorfor kurven for strækningen er en ret linie de første 1.5 sekunder?
E1: Det halve sekund er reaktionstiden, der er hastigheden stadigvæk 33.33 m/s!
L: Ja, men hvad så med det næste sekund?
E2: Det er vel fordi vi regner med, at hastigheden er konstant inden for et sekund!
L: Ja, nemlig!
L: Hvad er hastigheden efter 5 sekunder?
E2: Den er negativ!
L: Ja, og hvad betyder det for bilen?
E1: At den bakker!
E2: Men det er skørt! – for strækningen vokser (eleven peger på toppunktet for kurven). Det er vel også fordi vi regner med, at hastigheden ikke ændrer sig inden for et sek.
L: Ja, det er der, den er gal! Prøv at lave en ny søjle i jeres regneark, hvor I beregner tilvæksten i strækningen ved for hvert tidsskridt at bruge gennemsnittet af hastigheden i venstre og højre intervalendepunkt (læreren peger på kurven for hastigheden). Hvis I får problemer, kan I se differensligningen i teksten.

Ti minutter efter har eleverne fået lavet et regneark med en søjle, der beregner strækningen på denne måde.

L: Prøv at tegne kurverne for hastigheden og begge beregninger af strækningen i samme koordinatsystem!
E1: Det ringer om to minutter – det kan vi ikke nå!
L: Det går hurtigt. Der skal bare indføjes et D som 3. uafhængige søjle!

Kort efter har de fået det skærmbillede, der er gengivet på følgende figur. Kurve (3) viser den nye beregning af strækningen.

E2: Der er stor forskel, men er den nye rigtig?
L: Hvis hastigheden faktisk falder lineært under en opbremsning, har jeres sidste model også beregnet standselængden. Men i virkeligheden er der mange ting, der spiller ind, f.eks. om hjulene blokerer, om bilen slingrer, o.s.v. Det kan vi snakke videre om næste gang.
L: Hvad tror I, der sker med forskellen mellem de to kurver for strækningen, hvis I gør skridtlængden mindre?



Figur 3. Kurve (1) viser ændringen i hastigheden under en opbremsning fra 33,3 m/sek med en reaktionstid på 1/2 sek og konstant acceleration på 8 m/sek². Kurverne (2) og (3) viser ændringen i strækningen under opbremsningen, beregnet ud fra henholdsvis venstre intervalendepunkt og intervalmidtpunktet.

Eleverne glemmer frikvarteret. Efter at have prøvet med forskellige værdier for skridtlængden henvender de sig til læreren med følgende bemærkning: ”Jo mindre skridtlængden er, jo mindre er fejlen ved at regne, som om hastigheden er konstant!”

Eksemplet viser, at elevernes virksomhed med i regnearket at opbygge en første model for standselængden af en bil udgør et frugtbart grundlag for samspillet med læreren. Eleverne får lejlighed til at analysere resultaterne af deres model ved hjælp af relevante faglige begreber. På grundlag heraf rejser eleverne en kritik af modellen, som holder sig inden for opgavetekstens domæne. Og denne kritik motiverer eleverne til at tage lærerens udfordring til at ændre modellen op. I den fortsatte virksomhed kommer eleverne ind på livet af en principielt vigtig problemstilling vedrørende diskret modellering af kontinuerte fænomener.

Sammenfatning

Erfaringerne fra udviklingsarbejdet har vist, at der kan skabes situationer i undervisningen, hvor eleverne arbejder med opstilling og anvendelse af matematiske modeller. På grundlag af en sådan virksomhed kan eleverne – med støtte fra dialogen med læreren – etablere meningsfulde fortolkninger af deres manipulationer på den symbolske repræsentation af modellen i forhold til en konkret opgavekontekst. Har eleverne tillige erfaringer med og viden om det system, der modelleres, kan der skabes et særdeles frugtbart semantisk grundlag for, at eleverne kan forholde sig kritisk overfor modellens forudsætninger og overfor anvendelsen af dens resultater.

Analysen af elevvirksomheden har vist, at en sådan modelleringsvirksomhed rummer et læringsmæssigt potentiale i forhold til tilegnelsen af de matematiske begreber, der indgår i virksomheden. Man kan registrere, at en række centrale matematiske begreber har indgået i lærer-elev dialogerne, og at begreberne i disse samtaler i høj grad er blevet belyst med udgangspunkt i elevernes virksomhed. Det har bl.a. drejet sig om begreberne: (u)afhængig variabel, parameter, funktion, iteration, koordinatsystem, grafisk afbildning, lineære funktioner, lineær vækst, hældningskoefficient, procentuel vækst, fremskrivningsfaktor, parablen, og annuitet. Det er klart, at eleverne ikke alene gennem deres deltagelse i undervisningsforløbene har tilegnet sig disse begreber, men det er min opfattelse, at forløbene for de fleste elevers vedkommende repræsenterer en vigtig udvidelse af det erfaringsgrundlag, som tilegnelsen af de nævnte faglige begreber nødvendigvis må bygge på.

Samtidig har analysen påvist betydningen af, at elevernes virksomhed udfordres gennem en lærers indgribende dialog. Hvis eleverne efter den indledende fælles præsentation for hele klassen blev overladt til selv at arbejde med de forelagte opgaver, eller hvis lærerens samspil med eleverne begrænsede sig til at efterkomme deres ønsker om hjælp til at komme videre og til kontrol af deres resultater, oplevede eleverne typisk ikke spontant deres regnearksopstilling som en model af det system, der er defineret i opgaveteksten, og de kunne derfor heller ikke undersøge opgavetekstens spørgsmål ved på egen hånd at manipulere med modellen. I de situationer, hvor eleverne blev mødt med faglige udfordringer, der var relevante i forhold til deres aktuelle virksomhed, viste det sig, at langt de fleste elever har mulighed for at udvikle en virksomhed, hvor de selvstændigt opstiller, fortolker og analyserer en matematisk model i forhold til opgavekonteksten og det pågældende virkelighedsdomæne.

Analysen af elevvirksomheden viser imidlertid også, at der er en lang række vanskeligheder forbundet med at implementere ideerne fra udviklingsarbejdet i den almindelige matematikundervisning. Det stiller store krav til lærernes faglige og didaktiske kompetence dels selv at skulle tilrettelægge forløb, der rummer mulighed for, at eleverne kommer til at arbejde med modellering, dels at skulle fungere som sparringspartnere for eleverne under deres arbejde med at opstille, analysere og kritisere matematiske modeller. Erfaringerne fra udviklingsarbejdet understreger således behovet for udviklingen af nye kursusformer i efter- og videreuddannelsestilbudet til matematiklærere, hvis arbejdet med modellering skal blive en integreret del af skolens matematikundervisning. Der er brug for kursusformer, der i højere grad har karakter af udviklingsarbejde og som derfor dels kan få betydning for udviklingen af praksis i arbejdet med modellering og dels give anledning til nye resultater og erfaringer til belysning af det didaktiske problemfelt vedrørende modellerings rolle og placering i den elementære matematikundervisning.

Mit arbejde er en del af det danske initiativ Matematikundervisning og Demokrati, der i perioden 1988-1993 løber under Statens Humanistiske Forskningsråd. Det omtalte udviklingsarbejdet er således finansieret af initiativet. I arbejdet med artiklen har jeg fået støtte og inspiration fra Mogens Niss, Roskilde Universitet, og fra stipendiatgruppen under initiativet, der består af: Helle Alrø, Iben Maj Christiansen og Ole Skovsmose, Aalborg Universitetscenter; Lena Lindenskov, initiativet; Dan B. Eriksen, Danmarks Lærerhøjskole og Kirsten Grønbæk Hansen, Københavns Universitet.

Referencer

Blomhøj, M. (1992a). *Modellering i den elementære matematikundervisning – et didaktisk problemfelt* (Tekst MI 58). København: Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Blomhøj, M. (1992b). *Samspil mellem teori og praksis – en forskningspraksis i matematikkens didaktik* (Tekst MI 59). København: Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Blomhøj, M., & Bredo, O. (1992). Problemløsning bør også være refleksion. *Psykologisk Pædagogisk Rådgivning,* **29**(*6), 470-487.*

Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching – A review of arguments and instructional aspects. In M. Niss, W. Blum, & I. Huntley (Eds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 10-30). Chichester: Ellis Horwood.

Blum, W., Niss, M., & Huntley, I. (Eds.) (1989). *Applications, modelling and applied problem solving*. Chichester: Ellis Horwood.

Blum, W., & Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends, and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics,* **22,** 37-68.

Cobb, P. (1989). Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education. *For the Learning of Mathematics,* **9**(2), 32-41.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist,* **23**(2), 87-103.

Gurtner, J-L., León, C., Nunez, R., & Vitale, B. (1993). The representation, the understanding, and the mastering of experience: Modelling and programming in a school context. In J. de Lange, I. Huntley, C. Keitel, & M. Niss (Eds.), *Innovation in mathematics education by modelling and applications* (pp. 63-69). Chichester: Ellis Horwood.

Kulturministeriet. (1990). *Matematik. Undervisningsvejledning for almen voksen uddannelse*.

København: Kulturministeriet.

Larsen, I. B., Malmberg, A. C., & Sadolin, V. (1992). *Edb-modeller i matematikundervisningen* (MI-tekst 51). København: Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Lerman, S. (1989). Constructivism, mathematics, and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* **20**, 211-223.

Malmberg, A. C. (1987). *Datamodeller – på tværs af fagene*. København: Gjellerup & Gad.

Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. I: Applications and modelling in learning and teaching mathematics. In W. Blum, M. Niss, & I. Huntley (Eds.), *Applications, modelling, and links to other subjects*. Chichester: Ellis Horwood.

Niss, M. (1987). Applications and modelling in mathematics curriculum – State and trends. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* **18** (4), 487-505.

Niss, M. (1980). Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser frem til 1990. *Normat,* **28**(2), 54-60.

Sadolin, V. (1991). *infaREGN – en brugervejledning* (Tekst MI 26). København: Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Sadolin, V., & Blomhøj, M. (1992). *Dynamiske modeller i infaREGN* (Tekst MI 72). København: Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics,* **9**(1), 24-33.

Undervisningsministeriet. (1988). *Matematik. Bekendtgørelse og vejledende retningslinier* (Hæfte nr. 19 i serien om reglerne for fagene i gymnasiet). København: Undervisningsministeriet.

Undervisningsministeriet. (1990). *Edb i folkeskolens fag. Regning/matematik og edb. Under-visningsvejledning for folkeskolen*. København: Undervisningsministeriet.

Vitale, B. (1991). Processes: A dynamical integration of informatics into mathematical education. In C. Hoyles, & R. Noss (Eds.), *Logo and mathematics; Research and curriculum issues*. Cambridge: MIT Press.

Wyndhamn, J. (1992). Matte i livet – livet i matte – Några funderingar om det situationsbundna tänkandet. I G. Emanuelsson, B. Johansson, B. Rosén, & R. Ryding (Red.) *Dokumentation av 7:e Matematikbiennalen* (avsnitt M10). Göteborg: Matematikavdelningen Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs Universitet.

The importance of modelling activity to pupils' acquisition of mathematical concepts

Abstract

To illustrate the importance of modelling activity to pupils' acquisition of mathematical concepts in mathematics teaching at O-level, the article gives a theoretical discussion and a presentation of some of the underlying considerations and results of a developmental research project concerning modelling of dynamic systems by means of difference equations and spreadsheet. The project involved the implementation of modelling courses in mathematics teaching at O-level in the Danish primary school. The pupils' activities consisted of building, analyzing and critical judgment of mathematical models. The analysis of the pupils' activity has elucidated a number of important issues concerning mathematical modelling. In particular, the analysis has revealed the importance of modelling activities to the pupils' acquisition of mathematical concepts. This stresses the need for a broader discussion of the role and placement of mathematical models in compulsory mathematics teaching.

Author

Morten Blomhøj (Ph. D.) is assistant professor at Roskilde University and secretary for the initiative *Mathematics Teaching and Democracy*, Danish Research Council for the Humanities.

Address

Imfufa, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260,
D-4000 Roskilde, Danmark.