# Kaotisk spredning

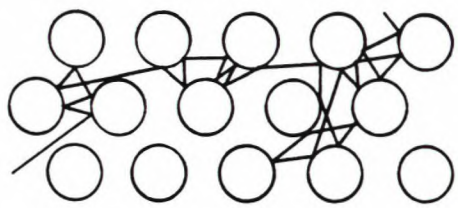
*Klaus Lindemann, Henrik Qvist Lorensen og Jesper Nygård,*
*Niels Bohr Institutet*

## Introduktion

I en beholder med gas farer et helt uoverskueligt antal molekyler rundt mellem hinanden, kolliderer og ændrer fart og retning fra det ene øjeblik til det andet — en forfærdelig uorden på det mikroskopiske plan. Alligevel kan vi sagtens beregne gassens tryk, temperatur o.lign. I termodynamikken benytter vi nemlig statistiske antagelser og metoder til at beregne visse makroskopiske gennemsnit, i stedet for at følge hver enkelt partikel i gassen. Selv med de kraftigste computere kan vi ikke beregne alle $10^{23}$ molekylers mikroskopiske bevægelse. Det kolossale antal variable gør systemet alt for kompliceret.

Et stort antal frihedsgrader er imidlertid ikke en nødvendig forudsætning for, at et system kan opføre sig på en indviklet og uberegnelig måde. Selv meget enkle dynamiske systemer kan udvise forskellige former for irregulær, ikke-periodisk opførsel. Fælles for disse såkaldte *kaotiske* systemer er en ekstrem følsomhed overfor variationer af begyndelsesbetingelserne. I praksis gør dette deres opførsel uforudsigelig, da fastlæggelsen af begyndelsesbetingelserne altid vil være behæftet med en vis usikkerhed.

For at undersøge de mikroskopiske mekanismer ved diffusion i en gas nærmere, må vi først reducere systemet til kun at have ganske få frihedsgrader. Vi kan f.eks. betragte en lille, let partikel, der diffunderer blandt store, tunge kugler. I dette tilfælde kan den såkaldte *Lorentz-gas* benyttes som en to-dimensionel model. Her lader man en punktformig partikel kollidere med skiver, der er placeret fast i planen. Partiklens bane viser sig oftest at være særdeles irregulær (fig.1).



**Figur 1.** Eksempel på en kompliceret partikelbane i en Lorentz-gas

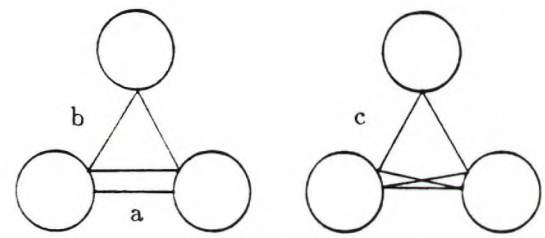
En simplificering af Lorentz-gassen er det såkaldte *3-skive system*: En partikel reflekteres elastisk mellem tre skiver placeret i en ligesidet trekant. Der er tale om simpel geometri. Partiklens bane bestemmes alene ved spejlingsloven. Tilsyneladende er det et ganske ukompliceret system. Alligevel har det de seneste år været genstand for intensive teoretiske studier. Nye teorier indenfor studiet af kaotiske fænomener er blevet afprøvet på dette enkle system, som har vist sig at være langt mindre trivielt, end man umiddelbart kan forestille sig.

Vi giver i denne artikel en kvalitativ introduktion til 3-skive systemet og beskriver et simpelt eksperiment, der demonstrerer dets kaotiske dynamik.

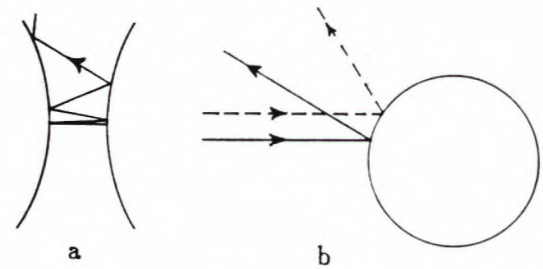
## Det ustabile skelet

Lad os undersøge, hvorledes en partikel kan opføre sig i systemet. Man ser umiddelbart, at den kan bevæge sig i forskellige periodiske baner, de såkaldte *cykler*. I det simpleste tilfælde bevæger partiklen sig på forbindelseslinien mellem to skivers centre (fig.2.a). En anden simpel partikelbane er den indskrevne trekant mellem skiverne (fig.2.b). Der eksisterer dog mere komplicerede periodiske baner. På fig.2.c ses et eksempel, hvor banen gentages efter fem refleksioner. Faktisk kan man konstruere vilkårligt lange cykler.

Som en følgende artikel vil give indtryk af, er netop de periodiske baner fundamentale for studiet af systemet – de udgør så at sige systemets dynamiske skelet.




**Figur 2.** Eksempler på periodiske baner.

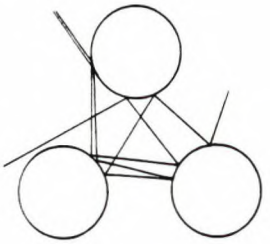



**Figur 3.** a) Den simple periodiske banes ustabilitet. b) Spredning ved refleksion.

Fælles for alle de periodiske baner er imidlertid, at de er ustabile. Giver man partiklen et lille skub, vil den hurtigt bevæge sig længere og længere væk fra banen. Eksempelvis vil partiklen fra fig.2.a ved en lille forstyrrelse zig-zag'e sig ud som vist på fig. 3.a. Banen er ustabil overfor uendeligt små forstyrrelser — som en knappenål, der balancerer på sin spids.

Det er skivernes konvekse rande, der kendetegner systemet. Disse bevirker, at der ved refleksion skabes en vis

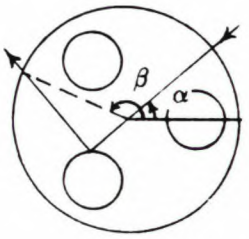
vinkelforskel mellem to tidligere parallelle partikelbaner (fig. 3.b). Afvigelsen vil vokse for hver refleksion, og partiklernes baner bliver hurtigt helt forskellige (fig. 4). Der vil altså være stor følsomhed overfor begyndelsesbetingelserne — kendetegnet for kaos.



**Figur 4.** Følsomhed overfor begyndelsesbetingelserne.

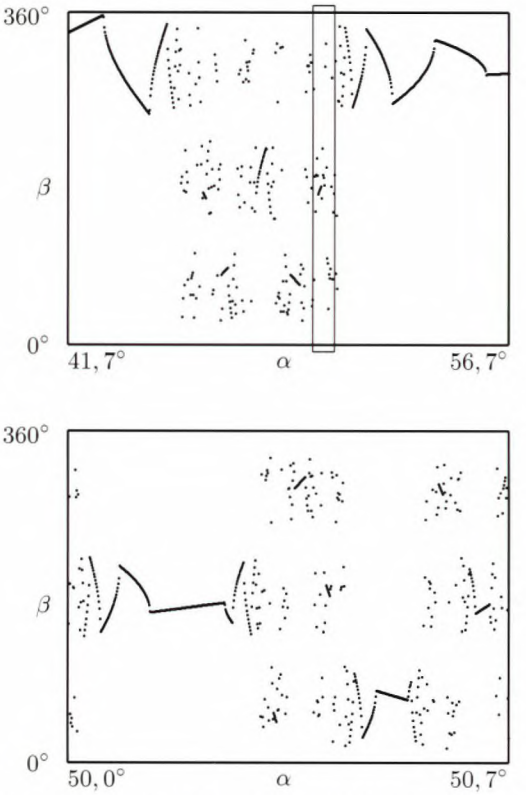
## Et kaotisk spredningsforsøg

Skyder man partikler ind i systemet, vil det være svært at forudsige, hvor de forlader det. Dette kan man indse ved at foretage spredningsforsøg, dvs. sende partikler ind mod systemet fra forskellige retninger og undersøge i hvilke retninger de kommer ud. Retningerne kan beskrives ved ind- og udgangsvinkel defineret på fig. 5, idet vi kun sigter mod systemets centrum. Bemærk at partikler, der skydes ind i systemet udefra, ikke kan nå ind i periodiske baner, da disse er lukkede.




**Figur 5.** Definition af ind- og udgangsvinkel.

Vi kan simulere sådanne eksperimenter på en computer. På fig. 6 øverst ses resultatet af et sådant computereksperiment. Udgangsvinklen er afbildet som funktion af indgangsvinklen. Plottet viser altså, hvordan en partikelstråle bliver afbøjet ved forskellige indgangsvinkler. Den første del af kurven er kontinuert, hvilket viser at systemet opfører sig "pænt" ved disse vinkler — en lille ændring af indgangsvinklen medfører en lille ændring af udgangsvinklen. Mellem de kontinuerte stykker findes områder, der klart afspejler systemets kaotiske natur. Her består plottet tilsyneladende af punkter, der er spredt helt ustruktureret. Dette angiver, at en lille ændring af indgangsvinklen bevirker, at partiklen kommer ud et helt andet sted (fig. 4). Vi ser således tydeligt den ekstreme følsomhed overfor begyndelsesbetingelserne. Ved nærmere eftersyn opdager man imidlertid, at alle punkterne i de kaotiske områder udgøres af kontinuerte kurver, som igen er adskilt af "støv" osv., ad infinitum. De kontinuerte dele er ligedannede med de ovenfornævnte kurvestykker. En sådan kurve kaldes en *selvsimilær fraktal*. Dette forhold er illustreret på fig. 6 nederst, hvor et udsnit af det foregående plot er forstørret.




**Figur 6.** Udgangsvinkel som funktion af indgangsvinkel. Den nederste figur er en forstørrelse af det indrammede område.



**Figur 7.** En laserstråle sendes ind fra venstre. Fotografisk optagelse af det spredte lys.

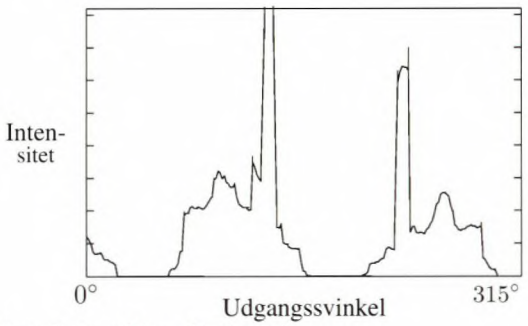
## Laser pinball

Ovenstående spredningsforsøg har vi udført i praksis ved at skyde en laserstråle ind mellem tre reflekterende cylindre, som beskrevet nærmere i boksen på næste side. Idet vi erstatter partiklen med en laserstråle, må vi tage højde for, at den ikke, i modsætning til partikelbanerne i computereksperimentet, er én-dimensional, men har en vis bredde. Vi har altså ikke at gøre med én veldefineret ind-

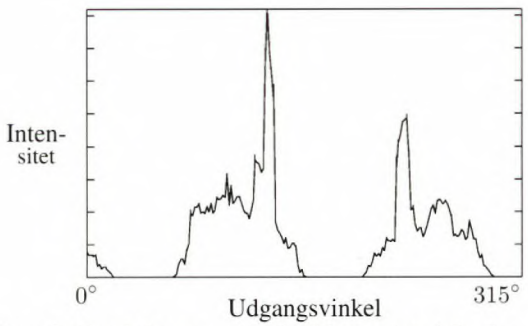
gangsposition, men snarere et positionsinterval. Dette kan vi betragte som et interval af indgangsvinkler, og derfor må vi, udfra fig. 6, forvente, at strålen vil blive splittet op i mange dele. Denne effekt ses på billedet på fig. 7, hvor det er tydeligt, at strålen er blevet spredt ud over systemet. For en given indgangsvinkel kan vi altså ikke eksperimentelt fastlægge udgangsvinklen, men må i stedet måle lysintensiteterne rundt langs systemets periferi. Resultatet af en måling ses på fig. 8. Kurver som denne er det eneste resultat, som målinger på vores opstilling kan give.

Idet vi husker at systemet ikke indeholder stabile baner, kunne man frygte, at de målte kurver ville være strukturløse og tilfældige. Eksperimentet viser imidlertid at der forekommer reproducerbare, tydelige strukturer. Hvordan kan der opstå strukturer i et så ustabilt system ?

Vi kan ikke umiddelbart besvare dette spørgsmål udfra eksperimentet. I stedet kan vi foretage et tilsvarende computereksperiment. Lysstrålen repræsenteres ved et stort antal partikler, der skydes ind ad parallelle baner i en bredde svarende til laserstrålen. Som det ses af fig. 9, opstår her nøjagtigt de samme strukturer. For den givne indgangsvinkel er de målte kurver altså karakteristiske for systemet.




**Figur 8.** En måling af lysintensitet.

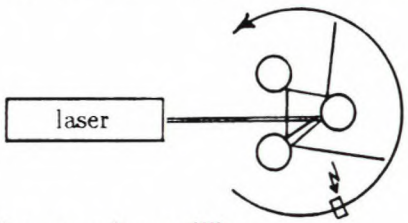



**Figur 9.** Simulation svarende til målingen vist på fig. 8.

Bidragene til intensiteten kommer fra forskellige dele af strålen. Nogle vil forlade systemet efter få refleksioner, mens andre vil nå at blive reflekteret mange gange. En nærmere analyse viser at kurvens strukturer hovedsagligt er opbygget af stråler, der kun er blevet reflekteret få gange, inden de slipper ud. De ældre generationer, som er blevet påvirket meget af systemets ustabiliteter, har forsvindende betydning fordi de dels er blevet meget svage, dels fordi ustabiliteterne har jævnet intensiteten ud i vinkelrummet.

Vi kan udfra simulationen optælle, hvor mange partikler, der vil være tilbage efter hver refleksion. Dette viser sig at være eksponentielt aftagende. Placerer man et stort antal partikler i systemet, vil der efter hver refleksion forsvinde en konstant brøkdel. Antallet $N$ af partikler i systemet efter $n$ refleksioner er altså $N(n) = N_0 e^{-\gamma n}$, hvor $\gamma$ kaldes systemets *escape rate*.

**Eksperimenter:** 3-skive systemet kan let demonstreres i praksis ved at skyde en laserstråle ind blandt tre reflekterende cylindre, f.eks. paprør omviklet med sølvpapir. Det interessante sker, når strålen sendes ind, så den bliver reflekteret mange gange. Man kan dog kun følge den få refleksioner, før den spredes i hele systemet. Derfor dannes der flotte mønstre på underlaget, når strålen vinkles lidt ned. Drejes laseren en smule, ses det at mønstrene ændres markant. En lille ændring på indgangsparametren giver en helt anden strålefordeling i systemet, pga. følsomheden overfor begyndelsesbetingelserne. Vi har her en tydelig kvalitativ demonstration af den kaotiske dynamik.
Ønsker man at foretage en kvantitativ undersøgelse, kræver det en mere nøjagtig opstilling. Vi har anvendt aluminiserede glascylindre af optisk kvalitet. Intensiteten af det udsendte lys måles langs systemets periferi. Signalerne registeres af en computer, der vha. en stepmotor styrer den arm, hvorpå detektoren sidder.



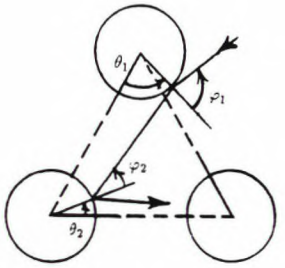

Skitse af den anvendte opstilling.

### Den frastødende Cantor-mængde.

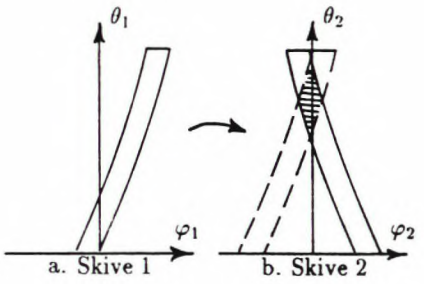
Systemets skelet af periodiske baner har en særlig struktur, som vi her vil karakterisere nærmere. For at fastlægge en partikels tilstand ved refleksion på en skive kræves to variable: position, angivet ved en vinkel $\theta$, og indfaldsvinkel $\varphi$ (fig. 10). Vi definerer nu det såkaldte *faserum*, som har én dimension for hver af systemets frihedsgrader. Punkter i dette rum fastlægger tilstande af det betragtede system. I vores tilfælde er faserummet et to-dimensionalt vinkelrum, hvor $(\theta, \varphi) \in [0; 2\pi[\times[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Vi kan her tillægge hver af skiverne et sådant vinkelrum.

Lader vi en partikel blive reflekteret på en skive, kan den enten forsvinde ud af systemet eller blive sendt over på en af de to andre skiver. Vi betragter nu udelukkende partikler med koordinater $(\theta_1, \varphi_1)$, der bliver reflekteret fra skive 1 til skive 2. Partiklerne vil på skive 2 kunne tilskrives et nyt sæt koordinater $(\theta_2, \varphi_2)$ (fig. 10). En refleksion svarer altså til en koordinat-afbildning fra et vinkelrum til et andet. I vinkelrummet for skive 1 vil det område, der er skitseret på fig. 11.a, repræsentere partik-

ler, som bliver reflekteret over på skive 2. På fig. 11.b ses billedet af dette område ved koordinat-afbildningen. Formen indses som følger: I vinkelrummet for skive 2 er indtegnet to områder. I det stiplede reflekteres partiklerne *over på* skive 1, mens det fuldt optrukne angiver partikler, der *kommer fra* skive 1. For de enkelte partikler er den eneste forskel, at deres retningsvektor vendes, svarende til et fortegnsskift for $\varphi$. De to områder er derfor hinandens spejlbilleder. Den skraverede fællesmængde repræsenterer partikler, der kommer fra skive 1, reflekteres på skive 2, for derefter at ramme skive 1 igen.



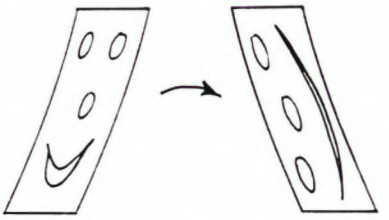
**Figur 10.** Definition af variable ved refleksion.



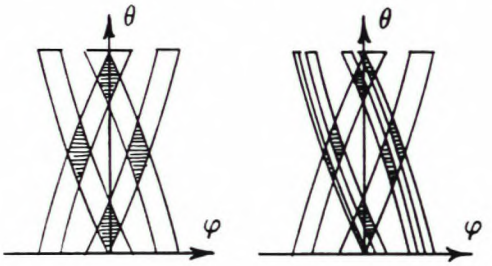

**Figur 11.** Afbildning fra vinkelrum til vinkelrum ved refleksion mellem to skiver.

Vi introducerer nu den tredje skive i systemet. Af symmetrigrunde kan vi nøjes med at beskrive, hvad der sker i ét vinkelrum. Afbildningen ovenfor kan benyttes på alle refleksioner mellem to skiver. Hvis vi nu lader alle tænkelige begyndelsesbetingelser være repræsenteret i vinkelrummet, vil der efter én refleksion være to bånd tilbage, et for hver skive. Igen angiver overlapningsområderne partikler, som vil forblive i systemet efter endnu en refleksion. Ved næste refleksion får vi 4 områder, efter endnu en refleksion 8 osv. (fig. 13). Escape raten angiver, at områdernes samlede areal reduceres med en konstant brøkdel for hver refleksion.

Spejler vi de opsplittede striber, som angiver, at partiklerne er $n$ refleksioner gamle, vil overlapningsområderne nu udpege de partikler, der har overlevet mindst $n$ refleksioner og som forbliver i systemet mindst $n$ refleksioner ud i fremtiden. Man finder, at der ialt er $4^n$ sådanne disjunkte områder. For $n \to \infty$ konvergerer arealet mod nul, således at vi i grænsen har uendelig mange isolerede punkter. Hver af disse repræsenterer en partikel, som aldrig undslipper systemet. Sådanne baner kan opdeles i to typer: De periodiske baner, som er lukkede, og de kaotiske baner, som aldrig gentager sig selv, men alligevel forbliver i systemet. De periodiske baner ligger "tæt" blandt alle disse baner, på samme måde som de rationale tal ligger blandt de reelle.

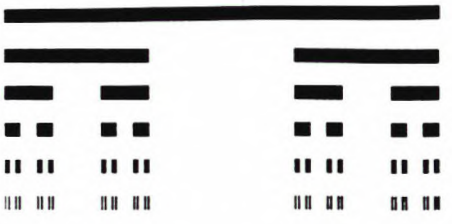


**Figur 12.** En egenskab ved koordinat-afbildningen er, at punktmængder sammentrykkes i den ene retning, men strækkes i den anden. Her betragtes samme to områder som i fig. 11. Deformationen er illustreret ved at angive placeringen af udvalgte punkter (den indlagte figur) efter afbildningen.




**Figur 13.** Vinkelrum ved refleksion mellem tre skiver. For hver refleksion fordobles antallet af overlapningsområder.

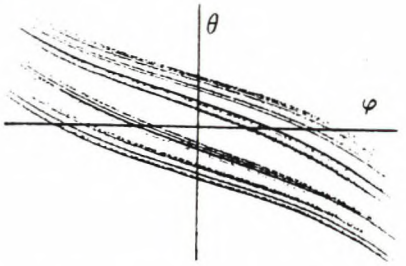
Vi erindrer, at alle baner er ustabile. Dette må betyde, at tilstande i punkternes omegn fjerner sig fra dem ved refleksion. De tilbageblivne punkter er altså frastødende punkter i vinkelrummet. Derfor kaldes den fremkomne punktmængde for en *repeller* (frastøder). Dette adskiller systemet fra de fleste velkendte kaotiske systemer, hvor der i faserummet findes en tiltrækkende punktmængde. I sådanne tilfælde kaldes punktmængden en *attraktor*.



**Figur 14.** Cantor-mængden, en velkendt fraktal. Ved gentagen proces fjernes den midterste tredjedel af det foregående interval. I grænsen består mængden af uendelig mange punkter, men har samlet længde nul. Den fraktale dimension er $\frac{\log 2}{\log 3} = 0.630\ldots$, altså ikke heltallig.

Den måde repelleren dannes på, svarer til konstruktionen af den såkaldte *Cantor-mængde*, der er en af de simpleste fraktaler (fig. 14). Udfra vores simulationer

kan man let få et indtryk af Cantor-mængdens struktur. På fig.15 er $(\theta, \varphi)$ afsat for de refleksioner, som et stort antal partikler har foretaget i systemet. Nogle partikler forsvinder hurtigt ud af systemet. Andre overlever mange refleksioner og bliver repræsenteret ved mange punkter i vinkelrummet. Derfor vil der i plottet afsættes relativt mange punkter i områder, som sikrer mange refleksioner. Da en partikel bliver længe i systemet, hvis den bevæger sig tæt på en periodisk bane, fremkommer den Cantor-agtige struktur.




**Figur 15.** Den Cantor-agtige mængde frembragt ved simulation. Ved et lodret snit i figuren fås en mængde svarende til fig. 14.

I en kommende artikel udnyttes netop det forhold, at enhver bane kan tilnærmes ved de dele af periodiske baner, den er tættest på. Ved en mere formel beskrivelse af systemet kan man entydigt fastlægge alle periodiske baner. På denne måde udvikles en ny metode til teoretisk klarlæggelse af systemets dynamik.

### Efterskrift

Vores studie af systemet er foretaget som førsteårsprojekt på Niels Bohr Institutet i samarbejde med Nanna Meyland Nicolaisen og med Clive Ellegaard som vejleder. Vi takker disse samt NBI's kaosgruppe for hjælp og inspiration.

### Supplerende læsning

C. Bercovich, U. Smilansky & G. P. Farmelo, *Demonstration of classical chaotic scattering*, Eur. J. Phys. **12**, 122 (1991)



*Klaus Lindemann, Henrik Qvist Lorensen og Jesper Nygård* er førstedels fysik- og matematikstuderende på Københavns Universitet. I forbindelse med deres studier udfører de eksperimentelt arbejde i *Center for Chaos and Turbulence Studies* ved Niels Bohr Institutet.