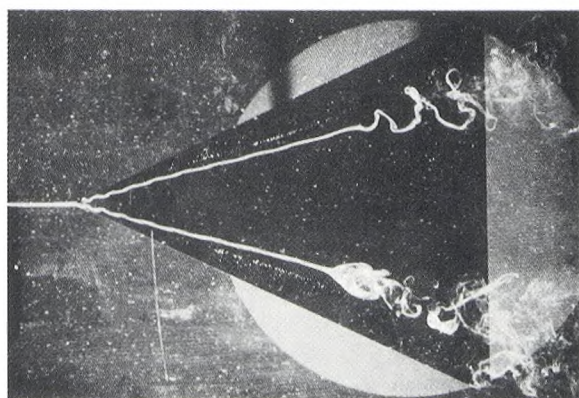


Instabilitet af hvirvler

J.N. Sørensen

Afdelingen for Fluid Mekanik, Danmarks Tekniske Højskole

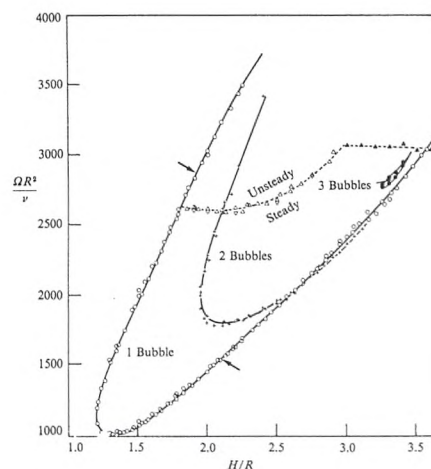
Hvirvelstrømninger kan iagttages både i vores nære dagligdag, når vi fx lukker vandet ud af badekarret eller rører skeen rundt i kaffekoppen, og i naturen, som fx skyumper eller tornadoer drevet af en kombination af jordens rotation og solens opvarmning. Det er vanskeligt at give en fuldt dækkende definition af en hvirvel, idet det er en samlet betegnelse for en række fænomener, der alle har det til fælles, at en samling af væske- eller gaspartikler roterer omkring et fælles centrum. Studiet af roterende strømninger og hermed af hvirvler interessant af flere årsager. For det første er mange aerodynamiske og industrielle strømninger domineret af rotation, hvorfor en dækkende beskrivelse er nødvendig ved design af fx flyvinger eller turbiner. En anden og måske væsentligere årsag er, at roterende strømninger udviser en række egenskaber, som gør dem væsensforskellige fra ikke-roterende strømninger. Et af de mest interessante fænomener, der kan optræde i forbindelse med roterende strømninger, er det såkaldte hvirvelsammenbrud eller vortex breakdown (VB).



Figur 1. To typer af hvirvelsammenbrud iagttaget ved et modelforsøg på en deltavinge

De første observationer af VB blev i slutningen af 50'erne fundet i kølvandet på deltavinger med stor indfaldsvinkel. En deltavinge er den trekantede vinge, der udgør den bærende flade på fx et jettfly. På figur 1 er vist en reproduktion af et foto af Lambourne og Bryer (1962), som viser strømningsmønstret i kølvandet på en deltavinge. Vingen er her installeret i en vandtunnel, og strømmingen er visualiseret ved at sprøjte et farvestof ind ved vingespiden. Ved at placere vingeplanet således, at det har en indfaldsvinkel i forhold til strømningsretningen, dannes der et undertryk på oversiden og et overtryk på undersiden af vingen. Dette giver anledning til, at vandet ved vingens sider suges fra underside til overside. Herved dannes der to hvirvler, som starter ved vingespiden og følger strømmingen langs profilets overside. I forsøget er

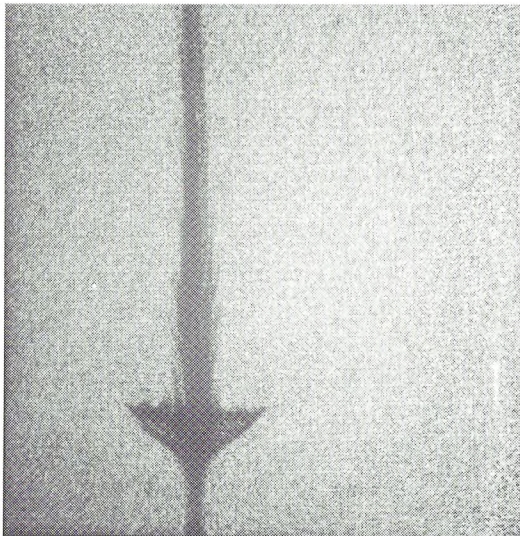
farvestoffet injiceret, så det netop rammer vingespiden og herved koncentrerer i de to hvirvelkerner. Dette giver et visuelt indtryk af hvirvelstrukturen, som på fotoet kan ses som de lyse områder. Hvis vi følger de to hvirvel-linjer, ses at de fra vingespiden forløber jævnt og glat det første stykke, hvorefter de pludselig bliver udsat for voldsomme forstyrrelser. Den øverste hvirvel går over i et spiralformet mønster, mens den nederste former en boblestruktur. Disse strukturer ses ydeligere nedstrøms at fluktuere for endelig at danne turbulens. Det vi ser her, er to former for VB, det spiralformede og det bobleformede. En fænomenologisk definition på VB kan fx formuleres som "en pludselig dannelse af et stagnationspunkt på en hvirvelakse efterfulgt af en ekspanderet strømflade indeholdende områder med tilbagestrømning".



Figur 2. Fasediagram for hvirvlen i kagedåseforsøg. Antallet af hvirvelsammenbrud er vist som funktion af sideforholdet og Reynoldstallet

Et hvirvelsammenbrud deler altid strømmen i to områder. Opstrøms stagnationspunktet består den indkommende strømning af en hvirvelkerne indesluttet i en rotationsfri ydre strømning. Strømmingen er her laminar, og ændringer i aksialretningen er små. Omkring selve breakdown området er strømmingen karakteriseret ved hurtige ændringer i aksial retning, resulterende i dannelsen af et stagnationspunkt med efterfølgende tilbagestrømning. Umiddelbart nedstrøms dette område fluktuere strømmingen med en typisk længdeskala svarende til størrelsen af hvirvelkernen, hvorefter en ny hvirvelstruktur med en ekspanderet kerne sætter ind. Strømmingen slår her over til fuld turbulens og antager karakter svarende til strømmingen i kølvandet på et fast legeme.

Ved visse industrielle anvendelser er VB en ønsket effekt, mens det i andre tilfælde er en uønsket, men uundgåelig, bieffekt. For eksempel bevirker VB af rand-hvirvlerne i kølvandet på flyvinger at vingen ikke bærer så godt, mens det for eksempel i forbrændingskamre udnyttes til at danne en stabil flamme, hvor luft og brændstof blandes i området med tilbagestrømning. Af andre eksempler på industrielle strømninger, hvor VB kan spille en betydelig rolle, kan f.eks. nævnes strømmingen i aksial turbiner, kompressorer og separations cykloner. Endelig kan nævnes, at der i naturen optræder en række hvirvelstrømninger, som f.eks. tornadoer, skypumper og cykloner, som kan antage VB.



Figur 3. Hvirvlen i vores kagedåseforsøg ved et Reynoldstal på 2800. Hvirvelsammenbruddet oscillerer op og ned ad akksen.

VB har været genstand for mange undersøgelser siden det første gang blev observeret, og flere forklaringsmodeller har været foreslået. Disse kan i princippet kategoriseres i tre grupper. **Kritisk tilstand teorien** opfatter VB som en omslagszone, der adskiller to områder med forskellig opførsel. Opstrøms breakdown'et optræder der en overkritisk strømning, der ikke tillader bølger at bevæge sig yderligere opstrøms, mens strømmingen nedstrøms er underkritisk, og derfor tillader bølger at bevæge sig både opstrøms og nedstrøms. Dette resulterer i, at bølgefænomener vil akkumuleres ved omslagsområdet og herved fremtræde som VB. **Parallellen til grænselagsseparation:** Hvis vi betragter en isoleret hvirvel og ser bort fra friktion, kan man vise, at den radiære trykgradient netop udbalanceres af centrifugalkraften. Da denne er proportional med kvadratet på rotationshastigheden, vil rotationen via trykgradienten søge at presse strømfladerne væk fra hvirvlens centerakse. Dette ses som en opsvulmen af hvirvelkernen, som i sin yderste konsekvens vil kunne resultere i dannelsen af et stagnationspunkt med efterfølgende tilbagestrømning. **Teorien for hydrodynamisk instabilitet** betragter VB som en konsekvens af, at visse hvirveltyper er ustabile overfor ydre forstyrrelser. Ved at overlejlre den indkommende

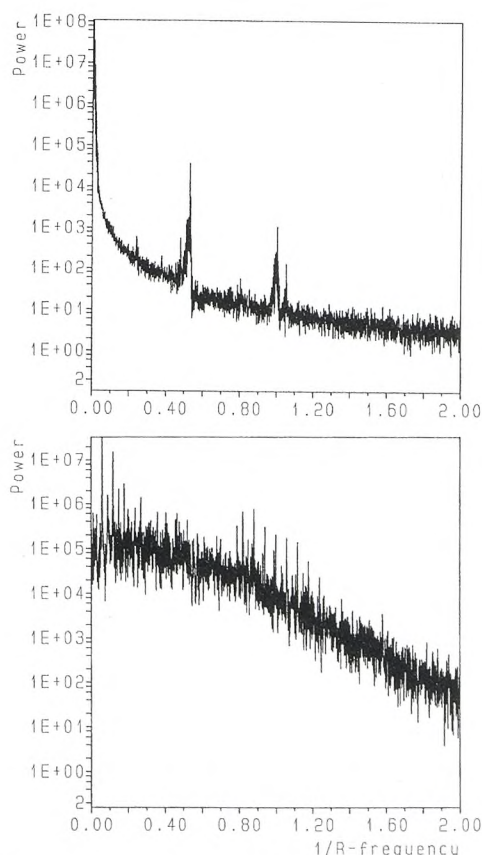
strømning med infinitesimal forstyrrelser analyserer man, hvorvidt forstyrrelserne vil dø ud eller forstærkes nedstrøms.

Kagedåseeksperimenter med VB

Generelt gælder, at alle de ovennævnte forklaringsmodeller beskriver væsentlige aspekter af VB, men at ingen af dem er istand til fuldt at forklare de komplicerede strømningsforløb, der ledsager VB. Siden de første observationer af VB har der været foretaget en række forsøg, hvor VB er frembragt under kontrollerede omstændigheder. Det væsentlige her er at frembringe en hvirvel, der på en simpel måde kan justeres til at antage VB. En sådan forsøgsopstilling kan fx konstrueres ved at fylde en lukket cylindrisk beholder med en væske og lade dens øverste endevæg rotere med konstant vinkelhastighed. Grænselaget, der klæber til det roterende låg, bringes af centrifugalkraftens henimod cylinderens ydervæg. På ydervæggen vil strømmingen yderligere tvinges nedad i en spiralformet bevægelse mod cylinderens bund. Når en væskepartikel rammer den stationære bund, vil den tvinges henimod cylinderaksen. På grund af bevarelse af masse og bevægelsesmængdemoment vil tangentialhastigheden stige, og langs cylinderens centerakse vil der dannes en koncentreret hvirvel mellem cylinderens bund og top. Strømmingen kan beskrives eentydigt ved to modelparametre: Sideforholdet, λ , som angiver forholdet mellem cylinderens højde og radius, og Reynoldstallet, som her er defineret som det roterende lågs vinkelhastighed gange med kvadratet på dets radius divideret med væskens kinematiske viskositet, $Re = \Omega R^2 / \nu$. Ved at variere disse to parametre kan man kontrollere centerhvirvlen og herved studere dens dynamiske adfærd og eventuelle VB. Ved systematisk at variere parametrene viste Marcel Escudier (1984), at der for sideforhold større end 1.2 kan optræde VB på centerhvirvlen med op til tre distinkte recirkulerende områder. Et summarisk gengivelse af Escudier's arbejde er vist på fig. 2, hvor domæner med et, to og tre separationsbobler er tegnet op på et (λ, Re) diagram. Formålet med dette arbejde var at vise, at VB kan optræde fuldt aksesymmetrisk og stationært.

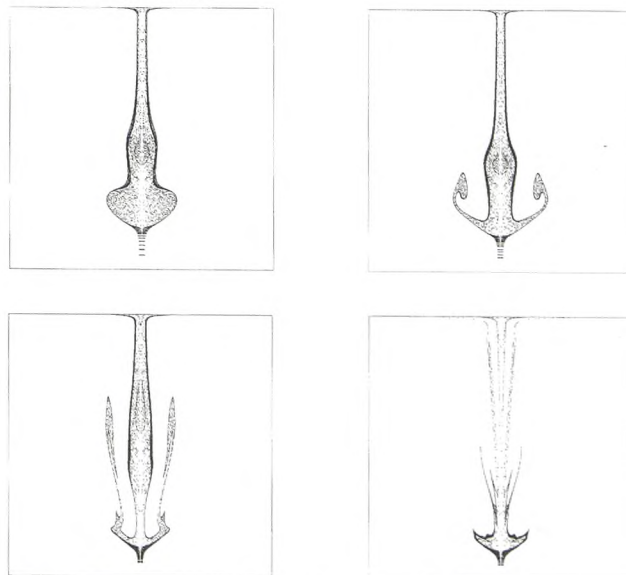
På Afdelingen for Fluid Mekanik, DTH har vi interesseret os for at undersøge centerhvirvlens dynamiske opførsel i det parameterområde, hvor den bliver kaotisk og begyndende turbulensdannelse finder sted. Til dette formål er konstrueret en forsøgsopstilling, som vist på forsidebilledet. Vi kalder den kagedåsen. Vi har her valgt at fiksere opstillingen ved et sideforhold på 2 og lade det roterende låg blive drevet af en justerbar stepmotor, således at Reynoldstallet kan varieres trinløst. Som væske er benyttet en passende blanding af glycerin og vand, som sikrer at Reynoldstallet indenfor få procent kan øges op til ca 10.000. Til at visualisere strømningsmønstret benyttes fyrretræspollen, som belyses af et laserplan. Dette frembringes ved at lade en laserstråle passere et roterende prisme. Når de opslemmede pollen passerer gennem laserplanet, vil de lyse op og give et visuelt indtryk af

strømningens udseende. På forsidebilledet ses hvorledes denne visualiseringsteknik synliggør det indre af centerhvirvlen, på samme måde som når et løg skæres over. Ved systematisk at øge omdrejningshastigheden er en række fænomener blevet synliggjort. I overensstemmelse med Escudier's målinger er det blevet påvist, at et stationært VB med een separationsboble opstår ved $Re = 1450$, og at denne forgrener sig til to bobler i området $Re \in [1800, 2300]$. Ved yderligere at øge Reynoldstallet bliver strømmingen ustabil. Dette sker ved $Re = 2550$, hvor hvirvelkernen begynder at oscillere op og ned langs cylinderaksen med en periode svarende til ca 4 gange lågets omdrejningsperiode. På forsidebilledet og fig. 3 er vist visualiseringer af centerhvirvlen ved $Re = 2300$ og $Re = 2800$. For $Re = 2300$ ses, at der optræder et aksesymmetrisk VB med to recirkulerende bobler, mens kun en enkelt bobble er synlig for $Re = 2800$. Til gengæld er strømmingen ved $Re = 2800$ ustabil, idet bobblestrukturen bevæger sig i en op og nedad gående bevægelse langs cylinderaksen. Endvidere kan her svagt anes, at hvirvlen ikke længere er helt aksesymmetrisk, men at den er overlejret af tredimensionale spiralstrukturer. Ved højere Reynoldstal formindskes centerhvirvlens kerner diameter og erstattes af en hvirveltråd, som er overlejret af uordnede bølgetog.



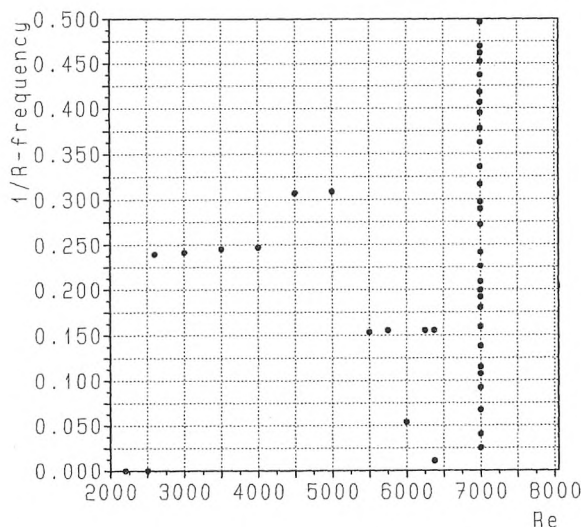
Figur 4. Spektret af strømningens hastigheder i kagedåseeksperimentet, målt ved varmebortledning fra en varm tråd. a) Øverst: Ved et Reynoldstal på 3694. b) Nederst: Ved et Reynoldstal på 6481. Frekvensaksen er normaliseret til lågets omløbsfrekvens, så en frekvens på 1 svarer til én svingning pr. lågomløb.

Strømningens tidlige opførsel analyseres ved at måle varmetransporten væk fra en tynd metaltråd. Metaltråden er limet til cylinderens bund og opvarmes elektrisk. Hvis der foregår en luft eller væskestrømning, vil der fra tråden konvekteres en varmemængde, der afhænger af strømningens hastighed. Ved at variere den påtrykte spænding, kan tråden holdes på en konstant temperatur. Spændingen giver da et udtryk for den tidlige ændring af strømningens hastighed, $\phi = \phi(t)$ på målestedet, der er nogle få mm² stort. Dette signal analyseres ved bl.a. at benytte FFT (Fast Fourier Transformation) og faseafbildninger, hvor signalet korreleres med sig selv over en vis tidsforsinkelse, T , dvs $\phi(t)$ vs $\phi(t+T)$. Herved er bl.a. fundet, at strømmingen kan være domineret af både en og to uafhængige frekvenser, men aldrig af tre, og at omslag til kaotisk opførsel finder sted via Ruelle-Takens scenarium. Belgieren Ruelle og hollænderen Takens viste i starten af 70'erne, at når et dynamisk system forsøger at producere mere end to uafhængige frekvenser, er der potentielt mulighed for at det bliver kaotisk. Det vil sige, at fremkomsten af en tredje frekvens umiddelbart vil generere mange uafhængige frekvenser. I et energispektrum ses dette ved, at de distinkte frekvensspidser forsvinder og erstattes af et kontinuert, bredbåndet spektrum. Et sådant forløb er illustreret på fig. 4, hvor energitætheden er plottet som funktion af frekvens for henholdsvis $Re = 3694$ og $Re = 6481$. Det ses her, hvorledes spektret for $Re = 3694$ (fig. 4a) er domineret af 2 frekvenser, $f_1 = 0.53$ og $f_2 = 1.02$, mens energien for $Re = 6481$ (fig. 4b) er fordelt kontinuert over et bredt spektrum af frekvenser. Ruelle-Takens scenariet er dog ikke det eneste scenarium, der er konstateret. Ved visse Reynoldstal optræder der periode-dobling og tripling, mens der i andre Reynoldstals områder er konstateret tilfældige og pludselige udbrud af oscillationer i ellers stabile forløb.



Figur 5. Simulerede hvirvelsammenbrud. a) Stabilt sammenbrud med to tilbagestrømningszoner ved $Re = 2200$ b-d) Dynamikken i VB efter at Reynoldstallet pludselig sættes op til 2800.

På trods af det betragtede fluidsystem er bygget op omkring en simpel cylindergeometri, findes der ikke nogen analytisk løsning til det. Det er derfor nødvendigt at foretage computersimuleringer, hvis man ønsker at studere fluidsystemet mere detaljeret end det er muligt eksperimentelt. Hertil har vi udviklet en algoritme til numerisk løsning af Navier-Stokes bevægelsesligninger, som er de grundlæggende ligninger til beskrivelse af væske- og gasstrømninger. Et af de fænomener vi har undersøgt numerisk, er den kvalitative ændring hvirvlen undergår, når Reynoldstallet ændres. Et sådant regneeksperiment kan udføres ved at indsætte "partikler" i beregningsdomænet og simulere deres position numerisk. Dette er vist på fig. 5a–d), hvor et antal partikler er injiceret i et lille område omkring cylinderaksen. På fig. 5a) ses hvorledes, partiklerne fordeler sig i det indre af centerhvirvlen ved et Reynoldstal på 2200. Strømningsfeltet er her stationært, og det ses hvorledes partiklernes position synliggør hvirvelformen på samme måde som laboratorieeksperimentet på forsidebilledet. På fig. 5b–d) angiver en serie snapshots hvorledes hvirvlen skifter form ved en pludselig ændring af omdrejningshastigheden til $Re=2800$. Denne ændring medfører, at partiklerne kollektivt bliver presset ned mod cylinderens bund, samtidigt med at de foldes ind mod aksen. Dette resulterer i dannelsen af "fingre", der under indflydelse af hvirvlens op- og nedgående bevægelser og succesive foldninger, bliver tyndere og tyndere samtidigt med, at de bevæger sig op mod cylinderens top.



Figur 6. Karakteristiske frekvenser i strømningens dynamik fra et antal simulationer.

Omslagsscenariet er undersøgt ved at analysere energispektra og faseafbildninger af tidlige forløb af systemets variable. Det er her tilstrækkeligt at analysere nogle få variable, idet systemet i faseplanet overalt vil antage den samme kvalitative opførsel. En skematisk gengivelse af systemets omslagsscenarium kan ses på fig. 6, hvor de fundamentale frekvenser er vist som funktion af Reynoldstallet. Det ses her, at systemet i overensstemmelse

med eksperimentelle observationer bliver periodisk ved $Re = 2550$. Grundfrekvensen er her $f_1 = 0.24$, hvilket svarer til den eksperimentelt observerede periode på ca. 4 gange lågets omdrejningsperiode. Denne frekvens stiger langsomt til 0.25 ved $Re = 4000$. I området fra $Re = 3500$ til ca. 5000 er der observeret et hysterese-fænomen, hvor løsningen pludselig springer til en frekvens $f_2 = 0.31$. Ved $Re = 5500$ er der periodedobling og ved $Re = 6000$ periodetripling. 2-frekvens opførsel opstår ved $Re = 6300$, og ved $Re = 7000$ ses egentligt kaos at opstå.

Vi kan næppe komme meget videre i direkte simuleringer ved hjælp af rå regnekraft. Fx repræsenterer fig. 6 alene ca. 150 regnetimer på en kraftig vektorprocessor. Her kommer nyere teori-dannelser indenfor ikke-lineære systemers dynamik os til hjælp, idet det har vist sig, at komplekse systemer bestemt af koblede partielle differential ligninger ofte kan karakteriseres ved lav-dimensionale attraktorer. Dette muliggør, at de styrende ligninger ved en passende projektion kan transformeres til et lavdimensionalt billedrum og herved kan der gives en betydeligt simplere tolkning af – og indsigt i – dynamikken af strømningers opførsel. Vi er således nu igang med at studere et system hvor 40.000 ligninger erstattes af et system med under 100 frihedsgrader.

Der er ingen tvivl om at de teoridannelser, der er opstået i forbindelse med "kaosteori", har åbnet op for nye veje til forklaring og beskrivelse af komplekse systemers dynamik. Vortex breakdown er kun et af talrige eksempler på, at klassiske fluidstrømninger med fordel kan betragtes ud fra en sådan synsvinkel.

Til slut en tak til Carsten Hein Westergaard, Optikgruppen ved Fysisk Institut, som har bidraget til den eksperimentelle opstilling, og til Erik Adler Christensen og Peter Leth Christiansen, begge LAMF, samt Morten Brøns, MAT, for godt samarbejde ved udviklingen af den lavdimensionale projektningsmodel.

Referencer:

- 1) Lambourne, N.C. & Bryer, D.W. (1962) Aero. Res. Coun., Rep. and Mem. no. 3282.
- 2) Escudier, M.P. (1984) Exp. in Fluids 2, pp 189-196.



Jens Nørkær Sørensen er lektor ved Afdelingen for Fluid Mekanik (AFM), Danmarks Tekniske Højskole. Civilingeniør, 1981; Lic. Tech. fra AFM, 1986; Ophold ved ONERA i Frankrig 1986-1989; Adjunkt ved AFM 1989-1993; Lektor fra 1993.