

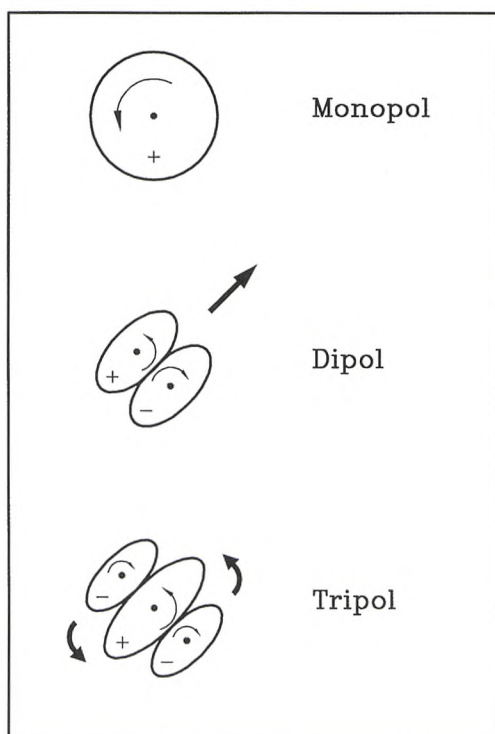
Turbulens og selvorganisering i to-dimensionale systemer

Jens-Peter Lynov og Jens Juul Rasmussen, Forskningscenter Risø

En "anden slags" turbulens

Selv om der ikke findes nogen præcis definition af, hvad turbulens er, så har de fleste nok en intuitiv fornemmelse af, hvad begrebet dækker. Denne fornemmelse går oftest ud på, at en turbulent strømning er fuldstændig uforudsigelig. Områder i strømningen, som på et givet tidspunkt måtte være sammenhængende, vil blive brudt ned til stadig mindre områder uden nogen form for sammenhæng. Processen standser først når korttrækkende gnidningskræfter kan omsætte kinetisk energi til varme. Til at beskrive en sådan tilstand, er det naturligt at anvende metoder fra den statistiske mekanik, hvor man antager at alle fluktuationer i systemet er helt ukorrelerede. Denne fremgangsmåde har da også givet værdifulde resultater til beskrivelse af turbulente systemers dynamik.

Et af de vigtigste eksempler er Kolmogorovs beregninger af energispektret for turbulente fluktuationer i tre-dimensionale systemer. Det forudsagte energispektrum, som har formen $k^{-5/3}$, hvor k angiver bølgetallet af fluktuationerne, er blevet eksperimentelt eftervist i mange forskellige systemer.



Figur 1. Klassifikation af forskellige hvirvelstrukturer. "Tynde" pile angiver den hvirvlende bevægelse inde i hvirvlerne. "Tykke" pile angiver bevægelsen af hele strukturen.

Der findes dog fysiske systemer, hvor antagelserne om statistisk uafhængighed af fluktuationer og opsplitning af sammenhængende områder til mindre områder ikke er særligt gode - ja, hvor den dynamiske udvikling af systemet faktisk er lige omvendt! En stor klasse af disse systemer er dem, hvori den dynamiske udvikling hovedsageligt foregår i to dimensioner. Vi skal senere se, at mange fysiske systemer af praktisk relevans har denne egenskab, men inden disse eksempler nævnes, skal vi kigge lidt på de teoretiske forudsigelser af to-dimensionale systemers dynamiske udvikling.

Hvirveldynamik i to dimensioner

Allerførst må vi præcisere, hvad det er for systemer, vi vil undersøge. Fælles for dem alle er, at de kan beskrives som kontinuumsystemer, dvs. at stof antages jævnt fordelt i rummet. Ydermere vil vi udelukke stoffer i fast tilstandsform. Tilbage har vi, hvad der ofte under ét kaldes for "fluider". Fluider er således et samlebegreb, der i bred forstand dækker over såvel gasser, væsker som plasmaer. Hvis en "fluid" er usammentrykkelig (hvilket er en god antagelse når de karakteristiske hastigheder er mindre end lydhastigheden i det pågældende medium) kan man tænke på en almindelig væske, som vi lægger til grund for diskussionen i dette afsnit. Andre eksempler, som omtales senere, er atmosfærer og plasmaet i Risø's Q-maskine.

Vi antager at alle bevægelser foregår i (x, y) -planen. Vi indfører nu hastighedsfeltet $\vec{v}(x, y, t)$ og en hvirvelstyrke, eller vorticitet, ω , der er knyttet til det enkelte væskeelement. Hvirvelstyrken er proportional med den lokale hastighed og omvendt proportional med afstanden fra hvirvlens centrum. Med disse to variable kan dynamiske udvikling af systemer, hvor gnidningskræfterne kan negligeres, beskrives ved *Eulers ligning*:

$$\frac{d\omega}{dt} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \omega = 0.$$

Denne partielle differentilligning udtrykker, at et infinitesimalt væskeområde vil bevare sin vorticitet, mens det bevæger sig rundt i systemet. Bevægelsesligningen for vorticitet er, med én væsentlig undtagelse, den samme som bevægelsesligningen for punktformige, masseløse partikler, som flyder rundt i strømningen. Undtagelsen er, at hastighedsfeltet selv afhænger af vorticiteten, hvilket gør Euler-ligningen til en ikke-lineær dynamisk ligning. Netop bevarelsen af vorticiteten adskiller den to-dimensionale dynamik fra den tre-dimensionale. I tre

dimensioner har man en ekstra frihedsgrad for udviklingen af en hvirvel, den kan strækkes, hvorved vorticiteten ændres.

Analytisk kan der findes en række såkaldt "stationære" løsninger til Euler-ligningen. I et passende valgt koordinatsystem har disse løsninger en form, der ikke ændrer sig med tiden. De vigtigste af disse stationære løsninger kaldes: *Monopoler*, *dipoler* og *tripoler*. Disse navne angiver, hvor mange hvirvler løsningen er bygget op af, som skitseret i figur 1. *Monopoler* findes som simple eller af højere orden. Simple monopoler har kun vorticitet af ét fortegn. I højere ordens monopoler veksler fortegnet for vorticiteten i koncentriske ringe. Centret af monopolen ligger altid i samme (x, y) position, og de simple monopoler er stabile. *Dipoler* har én del med negativ vorticitet og én med positiv. Hvis den totale vorticitet i de to dele er numerisk lige store, vil dipolen bevæge sig i en ret bane. *Tripolerne* består af en central del med vorticitet af et fortegn samt to satellitter med vorticitet af modsat fortegn placeret symmetrisk omkring centrum for den centrale del. En balanceret tripol vil rotere omkring sit eget centrum. Selv om multipoler af højere orden kan konstrueres, vil de oftest være ustabile.

Nu er det naturligvis én ting, at et system kan opretholde visse typer af strukturer. Noget andet er, om disse nogensinde vil opstå naturligt. Hvis man starter beregningen af Euler ligningen med en tilfældig fordeling af vorticiteten vil der typisk opstå et meget komplekst mønster. Områder af positiv og negativ vorticitet vil blive trukket ud i smalle bånd, eller filamenter. Lader man beregningen fortsætte er der ingen ende på hvor kompleks og infiltreret denne *filamentation* af strømmingen vil blive. Svaret på om stationære løsninger til Euler-ligningen kan opstå, hvis de ikke er sat ind fra starten, er altså generelt nej.

Men her kommer antagelsen om gnidningskræfterne (viskositeten) ind i billedet. Disse kræfter har som tidligere nævnt kun betydning, hvis skalastørrelserne af fluktuationerne i strømmingen bliver tilstrækkeligt små. Vi har lige beskrevet, at Euler-ligningen via filamentation kan skabe vilkårligt små skalastørrelser, selv om disse ikke oprindeligt var til stede. For at gøre beskrivelsen af den dynamiske udvikling mere fysisk korrekt, må indflydelsen af gnidningskræfterne tages med. Dette gøres ved at tilføje et ekstra led, der kan fjerne kinetisk energi, til Euler-ligningen. Vi får så *Navier-Stokes ligning*:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega$$

hvor ν er den kinematiske viskositet. Det ekstra led er et diffusionsled, som virker kraftigst på små længdeskalaer. Med indførelsen af viskositet har vi fjernet muligheden for stationære løsninger i helt rigoristisk betydning. I det lange løb vil alle forstyrrelser af systemet dø ud, da vi ikke har inkluderet energikilder i vores beskrivelse. Fra et praktisk synspunkt, kan denne viskose dæmpningstid dog være meget lang. Spørgsmålet er da, om systemet af sig selv vil søge mod semi-stationære tilstande, in-

den en væsentlig del af den oprindelige kinetiske energi i systemet er omdannet til varme. Her er svaret overraskende: Ja! De to-dimensionale strømminger udviser under meget generelle betingelser muligheden for selvorganisering. Og den tilstand, som strømmingen søger hen mod kan ofte med god tilnærmelse beskrives som en løsning til Euler-ligningen! Denne udvikling er helt modsat den, man normalt kender fra tre-dimensionel turbulens, og selv om man kan sandsynliggøre nogle af grundene til denne forskel, så savner mange af de eksperimentelle og numeriske resultater for to-dimensionale strømminger stadig en tilfredsstillende teoretisk forklaring.

Hvis man betragter energispektret for den to-dimensionale turbulens, finder man et fænomen, der kaldes "invers kaskade". Ved den inverse kaskade transporteres energi fra kortere til længere karakteriske bølgelængder. Denne opførsel er altså lige modsat Kolmogorovs resultat for tre-dimensionel turbulens, som er omtalt i indledningen. Det vil føre for vidt her at gå i detaljer med, hvorledes denne inverse kaskade kan forklares ud fra de dynamiske ligninger. Det har sammenhæng med, at man for to-dimensionale strømminger (uden viskositet) har bevarelse af systemets totale vorticitet og endnu vigtigere af den totale enstrofi (lig fladeintegralet af enstrofitætheden, som er proportional med ω) i tillæg til bevarelsen af den totale energi. Dette kan vises at lede til nogle restriktioner på udviklingen af energispektret som får energien til at kaskade til længere og længere bølgelængder, mens enstrofien vil kaskade den modsatte vej, dvs. til kortere og kortere bølgelængder. Resultatet af denne udvikling vil således være at de energibærende hvirvler bliver større og større, mens enstrofien koncentrerer sig i tynde lag ved på hvirvlernes rande.

Uanset detaljerne i den inverse kaskade er det dog en eksperimentel kendsgerning, at to-dimensionale systemer kan danne store, sammenhængende hvirvelstrukturer med levetider, som er mange gange større end hvirvlernes egne omdrejningstider. Denne proces kaldes selvorganisering. De resulterende strukturer kaldes *kohærente strukturer*. De har stor indflydelse på den turbulente strømnings dynamik. Specielt kan strukturerne have afgørende indflydelse på den turbulente transport i strømmingen. Normalt kan turbulent transport beskrives som en diffusionsproces, hvor partiklerne udsættes for mange små uafhængige påvirkninger fra de turbulente fluktuationer og udfører Brownske bevægelser. Er strømmingen domineret af kohærente strukturer, kan disse indfange partikler eller fluid-elementer og transportere dem over afstande, der er store sammenlignet med strukturerne egen udstrækning. Transporten får således en karakter, der er helt forskellig fra en diffusionsproces, og der findes endnu ingen kvantitativ beskrivelse af denne form for transport. I det følgende skal vi se på nogle eksempler på kohærente strukturer i forskellige fysiske systemer.

Kohærente strukturer i naturen

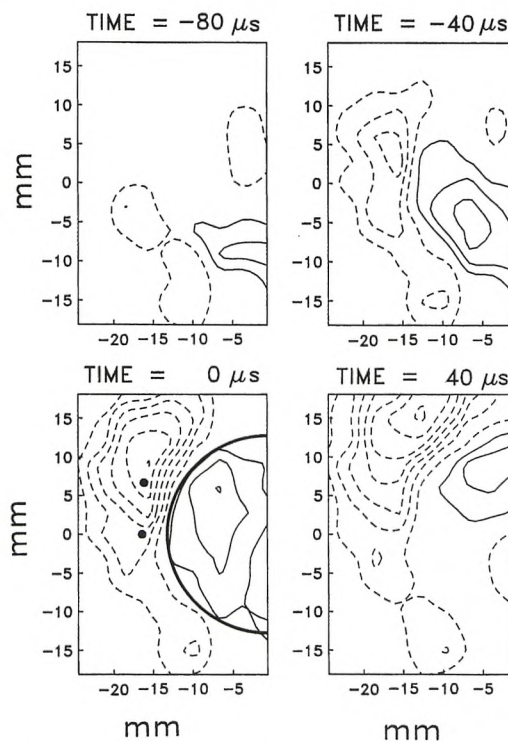
Betegnelsen "kohærent struktur" bruges ofte i sam-

menhæng med forskellige fysiske systemer og kan afhængigt af problemet have forskellig betydning. Typisk benyttes begrebet om lokaliserede løsninger til ikke-lineære dynamiske systemer, og det dækker således også bl.a. soliton-løsninger til én-dimensionale systemer. Når vi taler om kohærente strukturer i denne artikel, er det udelukkende i betydningen: Langlivede, lokaliserede hvirvelstrukturer. Og indtil videre ser vi kun på to-dimensionale systemer.

Hvornår er det så rimeligt at tale om et to-dimensionalt system? Først må vi påpege, at man godt kan have to-dimensionale løsninger til tre-dimensionale problemer, men disse løsninger kræver en høj grad af symmetri, som eksempler kan nævnes et uendeligt langt hvirvelrør, eller en røgring (hvirvelring). Hvis dynamikken i systemet under mere generelle forhold skal være to-dimensionalt, må systemet have en form for anisotropi, hvor forholdene er forskellige i den ene retning i forhold til de to andre. En sådan anisotropi kan have flere årsager; her nævnes nogle af de vigtigste: 1) *Systemets geometri*. Det fysiske system har meget større udstrækning i to dimensioner end i den tredje. Eksempler: Sæbehinder, galakser, jordens atmosfære og oceaner. For at bevægelsen med god tilnærmelse kan beskrives som to-dimensionalt gælder det, at udstrækningen af de dynamiske strukturer skal være væsentlig større end systemets tykkelse i den tredje dimension. 2) *Stratificering*. Systemet befinder sig i et tyngdefelt og har en stabil tilstand med varierende massefylde. Vandrette bevægelser har ofte kun en svag kobling til lodrette. Eksempel: Jordens oceaner. 3) *Rotation*. Systemet er i fastlegeme rotation med konstant omdrejningsfrekvens, og fluidbevægelserne er så langsomme, at Coriolis-kraften har en dominerende effekt. Eksempler: Atmosfærer og oceaner på roterende planeter. 4) *Magnetfelt*. Vi har ikke diskuteret plasmadynamik i denne artikel, men det kan vises, at visse typer af lav-frekvente fluktuationer i et magnetiseret plasma har en to-dimensionalt dynamisk udvikling i planet vinkelret på magnetfeltet. Denne udvikling er beskrevet ved Euler-ligningen. Blot skal vorticitet-variablen skiftes ud med ladningstætheden. Lorentz-kraften i dette system spiller en rolle, der er ækvivalent med Coriolis-kraften i det roterende system. Eksempel: Magnetisk indesluttet fusionsplasmaer som fx. tokamakplasmaer.

Det mest storslåede eksempel på en langlivet hvirvelstruktur er Den Store Røde Plet på planeten Jupiter. Denne hvirvel har en udstrækning på ca. 25.000 km (dvs. dobbelt så stor som jordens diameter), og på trods af, at de omgivende atmosfærebevægelser er stærkt turbulente, har hvirvlen bevaret sin identitet i over 300 år. Mange af detaljerne omkring dynamikken i Jupiters atmosfære er stadig uafklarede. I jordens atmosfære finder vi også store langlivede hvirvelstrukturer, der optræder som højtryk og lavtryk. Som regel har disse strukturer en levetid, der ikke er lang sammenlignet med hvirvlernes egne omdrejningstider, hvorfor de ikke opfylder definitionen på kohærente strukturer. Anderledes er forholdene i jordens oceaner. Her kan langlivede hvirvler med størrelser

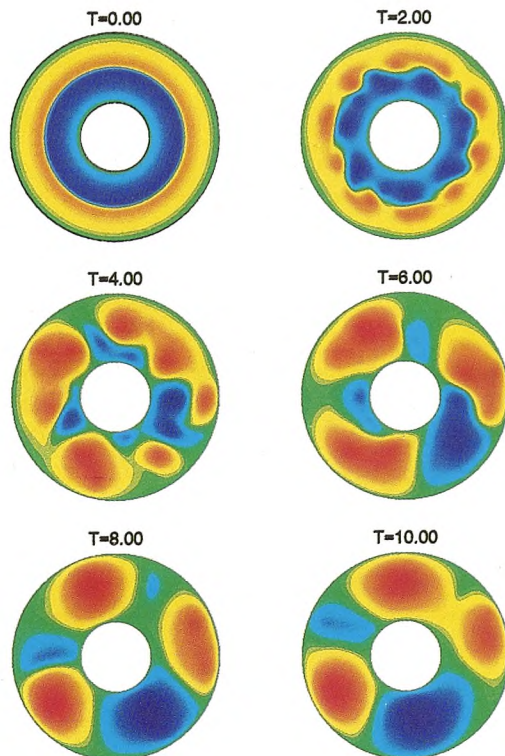
mellem 10 og 100 km dannes i forskellige havdybder. I nogle tilfælde har sådanne hvirvler været fulgt i mere end et helt år. Disse langlivede hvirvler kan transportere vand med karakteristiske fysiske, kemiske og biologiske egenskaber over store afstande til områder, hvor man normalt ikke finder disse egenskaber. De kan således have stor betydning for havenes varmetransport, miljøforhold og økologi.



Figur 2. Udviklingen af en kohærent hvirvelstruktur i et magnetiseret plasma. Konturlinierne angiver det elektrostatiske potentiale. Positive værdier af det relative potentiale er angivet med fuldt optrukne linier, negative med stiplede linier. I hvirvlen med negativ potentiale bevæger plasmapartiklerne sig i urets retning. Reference tidspunktet (time = 0) angiver "trigger-tidspunktet" anvendt ved den statistiske behandling. Den fuldt optrukne halvcirkel viser kanten af søjlen, hvori plasmaet produceres. Bemærk at kun et udsnit af plasmasøjlen er vist.

Som et enkelt eksempel på menneskeskabte kohærente strukturer, kan nævnes vingetip-hvirvlerne fra flyvemaskiner. Disse hvirvler er altid til stede, når der er løft på vingerne. Hvis flyet flyver i en højde, hvor udstødningen fra motorerne kondenseres, vil indfangningen af denne kondens i hvirvlerne gøre disse synlige som to lange hvide bånd efter flyvemaskinen. Dette er et eksempel på, at symmetriske strømningsforhold kan gøre dynamikken i et tre-dimensionalt system næsten to-dimensionalt, her i et lodret snit vinkelret på flyets bevægelsesretning. Tilsammen danner de to hvirvler en kohærent dipol, og effekten af denne dipol kan tydeligt mærkes nær landingsbaner, hvor kraftige luftstrømme kan opstå, længe efter et fly er landet. Gennem vekselvirkningen med den stillestående luft lige over landingsbanen, kan disse kraftige luftstrømme opretholdes i ret lange tidsrum. Luftstrømmene er meget farlige for efterfølgende flyvemaskiner, og sikker-

hedsgrænserne for afstanden mellem landende fly er da også netop valgt af hensyn til dette fænomen.

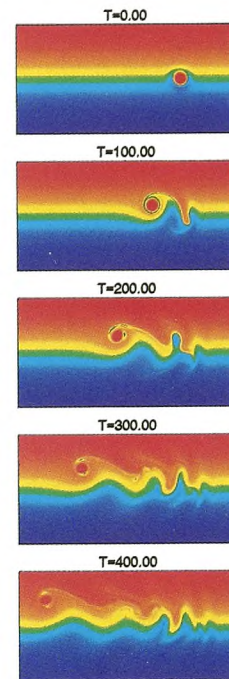


Figur 3. Udviklingen af perturbationen i potentialet i en simulering af de dynamiske forhold i Q-maskinens randplasma. Positive værdier er angivet med rødt, mens negative værdier er angivet med blåt.

Kohærente strukturer i laboratoriet

Et eksempel på kohærente strukturer i et magnetiseret plasma er vist i figur 2. Her angiver konturlinierne det elektrostatiske potentiale. Billederne bygger på et stort antal punktmålinger på plasmaet. I hvert punkt har man ventet på et karakteristisk (stort) triggersignal på en referenceelektrode, der er placeret et fast sted. På grund af plasmaets turbulente natur kommer dette på et uforudsigeligt tidspunkt. Tidsangivelserne på figurene er så forskellen fra triggertidspunktet til måletidspunktet. Desuden er værdien i hvert punkt en middelværdi af et antal målinger. Eksperimentet er udført i Risø's Q-maskine. Plasmaet produceredes indenfor en ca. 1 m lang cylinder med en diameter på 3 cm. Denne cylinder blev holdt svævende af et stærkt magnetfelt i cylinderaksens retning, og figuren viser et snit tværs gennem plasmasøjlen (randen af søjlen er indikeret ved den fuldtoptrukne halvcirkel paa figuren for $T = 0$). Det ses, at kohærente strukturer optræder på ydersiden af plasmacylinderen, hvor de foretager en roterende bevægelse omkring cylinderaksen. Strukturernes opstaar spontant i en baggrund af turbulente fluktuationer med et bredt spektrum. Lignende kohærente strukturer findes også i de store fusionseksperimenter. De menes, at have en stor indflydelse på den tur-

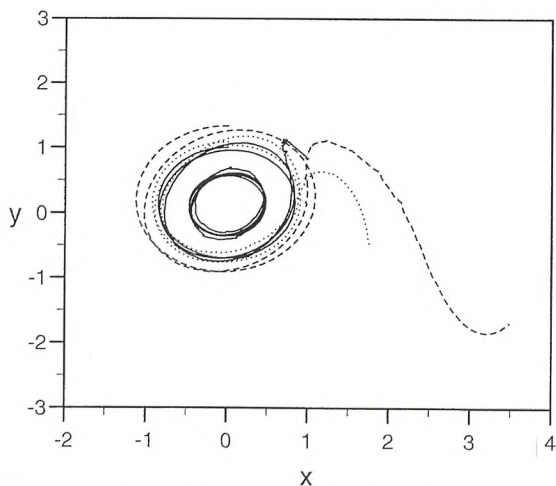
bulente transport af plasma på tværs af magnetfeltet. Udviklingen af fluktuationerne i Q-maskinens plasma er vel beskrevet med en to-dimensionel model, og vi forestiller os de kohærente hvirvelstrukturer dannet ved en selvorganiserende proces, som beskrevet i afsnit 2.



Figur 4. Udviklingen af en monopole-hvirvel i et anisotrop system. Rød farve viser positiv (potentiell-)vorticitet.

Til at støtte denne antagelse har vi foretaget en numerisk simulering af de dynamiske forhold i Q-maskinen ud fra Navier-Stokes ligningen (se figur 3). Vore computerkoder er baserede på såkaldte "spektrale metoder", der tillader en meget nøjagtig og detaljeret løsning af de dynamiske ligninger. I figur 3 ses den tidslige udvikling af det elektrostatiske potentiale i det ydre område af plasmasøjlen. Den indvendige del af denne søjle er ikke medtaget i beregningen, da den dynamiske udvikling er fuldt beskrevet ved forholdene i den ydre skal. Koden er startet med en ladningsfordeling, der svarer til den tidsligt midlede fordeling i eksperimentet. Til denne fordeling er adderet lidt tilfældig støj. Vi ser, at begyndelsesbetingelsen er ustabil, og at den hurtigt bryder op i en række små "øer". Denne opførelse er i overensstemmelse med teoretiske beregninger af den lineære udvikling af de ustabile fluktuationer. Den følgende dynamiske udvikling af systemet viser dog, at disse små øer kun er begyndelsen på en langt mere kompliceret proces. Øer med henholdsvis positiv og negativ potentiale smelter efterhånden sammen til store områder. Til sidst er der kun et par områder med henholdsvis positiv og negativ potentiale tilbage. Eksistensen af sådanne store hvirvel-lignende strukturer er i god overensstemmelse med de eksperimentelle resultater (som for eksempel i figur 2), men langt fra de gængse lineære teoretiske udtryk, der forudsiger at fluktuationer med korte bølgelængder skulle dominere udviklingen.

Resultaterne i figur 3 er opnået ved numerisk løsning af Navier-Stokes ligning, og der er derfor en direkte analogi til et tilsvarende fluidproblem. Man skal blot oversætte ladningsfordeling med vorticitet og det elektrostatiske potentiale med hastighedspotentialet (strømningsfunktionen). Starttilstanden i figur 3 svarer således til en ringformet jet med små fluktuationer i hastigheden.



Figur 5. Partikeltrajektorier i monopolen vist i figur 4 i det medfølgende referencesystem.

Et eksempel på udviklingen af en "isoleret" hvirvel og dens evne til at transportere partikler er vist i figurerne 4 og 5. Resultatet kan også her fortolkes både som "almindelig" fluidodynamik og som plasmafysik. Den dynamiske ligning, der er løst numerisk, er i dette tilfælde en anden end Navier-Stokes ligning, og den kan benyttes til dels at beskrive oceanhvirvlers udvikling under indflydelse af en Coriolis-kraft, der varierer med breddegraden, og dels at beskrive kohærente strukturers udvikling i et magnetiseret plasma med varierende tæthed. Mens en monopolære hvirvelløsninger til Euler-ligningen er ubevægelige (bortset fra deres rotation), vil en hvirvelløsning til dette system på grund af systemets to-dimensionale anisotropi ikke ligge stille. Den vil bevæge sig og efterlade et bølgemønster, mens den undergår en indre reorganisering til en tripolar struktur som vist på figur 4. Under denne udvikling vil nogle af de partiklerne, der oprindeligt er indfangne i hvirvlen, efterhånden blive tabt, dels fordi hvirvlen reorganiserer sig og dels fordi den dæmpes langsomt, energien udsendes som bølger. Figur 5 viser partiklernes trajektorier i et referencesystem, der følger med den kohærente struktur. De fleste af partiklerne ses at være transporteret med hvirvlen over afstande, der er meget store i forhold til hvirvlens udstrækning. På grund af den dynamiske lignings generelle form har dette resultat således både geofysisk og plasmafysisk relevans.

Afsluttende bemærkninger

Det er vores håb, at vi ved at studere fundamentale pro-

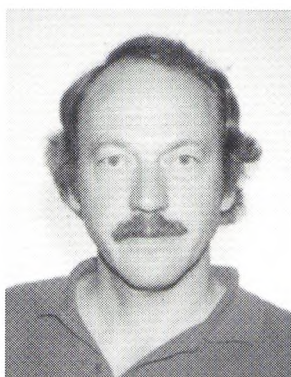
cesser i forskellige kontinuumsystemer, vil kunne opnå en forståelse, der vil gøre udviklingen af simple fysiske modeller mulig. På denne måde ønsker vi, at kunne give rimeligt nøjagtige estimater af disse ikke-lineære systemers egenskaber, muligvis i en statistisk form, uden først at skulle lave omfattende eksperimentelle og numeriske undersøgelser. Til denne opgave forventer vi, at de kohærente strukturer vil spille en rolle som en slags "elementarpartikler", og deres vekselvirkninger indbyrdes, med eksterne kraftfelter og med afgrænsende vægge vil optræde som tilsvarende "elementarprocesser".

De fremtidige studier vil stadig bygge på en kombination af teoretiske, numeriske og eksperimentelle undersøgelser, som vi finder afgørende for en detaljeret forståelse af den ikke-lineære dynamiske udvikling. De eksperimentelle undersøgelser foretages nu i roterende og statificerede væsker, hvor to-dimensionale hvirvelstrukturer naturligt dannes udfra stort set vilkårlige perturbationer. Disse hvirvelstrukturer kan visualiseres ved at tilsætte farvestof, og strømningsfeltet kan kvantificeres ved hjælp af en partikel sporings teknik, hvilket gør en detaljeret sammenligning med teoretiske og numeriske resultater mulig.

Resultaterne præsenteret i denne artikel er blevet til i et samarbejde inden for Kontinuumfysiksektionen på Forskningscenter Risø. Følgende har bidraget: L. Bækmark, E.A. Coutias, J.S. Hesthaven, P. Michelsen, A.H. Nielsen, M. Nielsen, H.L. Pécseli, B. Stenum og G.G. Sutyrin.



Jens-Peter Lynov er civilingeniør med en lic. techn. grad inden for plasmafysik. Han er nu seniorforsker og leder af Sektionen for Kontinuumfysik i Afdelingen for Optik og Fluid Dynamik paa Forskningscenter Risø. Hans forskning er koncentreret om teoretiske og numeriske studier af kontinuumsystemers ikke-lineære dynamik.



Jens Juul Rasmussen er civilingeniør med en lic. techn. grad inden for plasmafysik. Han er nu seniorforsker i Kontinuumfysiksektionen i Afdelingen for Optik og Fluid Dynamik paa Forskningscenter Risø. Hans forskning er koncentreret om teoretiske og eksperimentelle studier af ikke-lineære dynamiske processer i kontinuumsystemer.