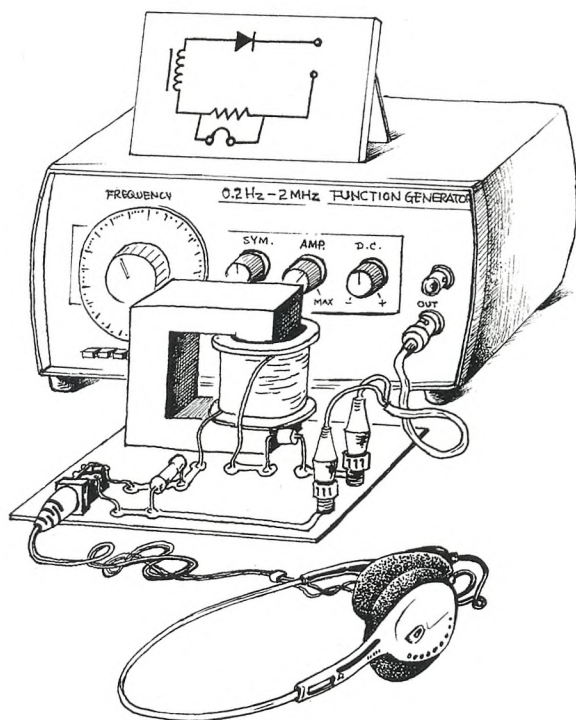


Hør Figentræets Susen.

Bo Christiansen, Mogens T. Levinsen og Jun Zhang

Niels Bohr Institutet, Ørsted Laboratoriet, Universitetsparken 5, 2100 København Ø

Vi vil i denne artikel beskrive det simpleste elektriske kredsløb, der udviser overgang til kaos. Overgangen til kaos sker gennem en kaskade af periodedoblinger. Disse periodedoblinger eller bifurkationer har været et symbol på kaosforskningen siden M. Feigenbaums epokegørende opdagelse i 1975.

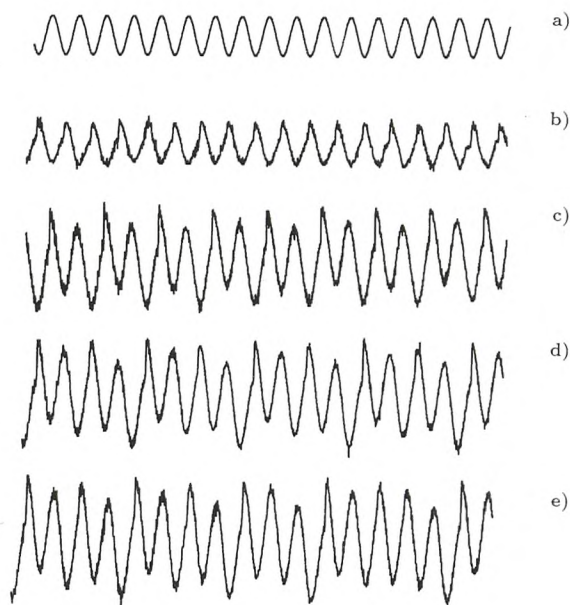


Det system, vi vil omtale her, har den fordel, at systemets tilstand kan høres. Det eneste nødvendige måleudstyr er altså ørerne og et par hovedtelefoner. Vi vil dog også tage et oscilloskop i brug, så vi kan se hvad vi hører.

På fig. 1 er det elektriske kredsløb skitseret. Det består af en 1" ferrit ringkerne med 90 vindinger ($L = 78\text{mH}$) og en ensretterdiode (1N5404, 3A, 280V) koblet i serie med en modstand på 4Ω . Over denne modstand er parallellkoblet et sæt hovedtelefoner med en indre modstand på 32Ω . Kredsen er påtrykt en sinusformet modulation fra en funktionsgenerator med en udgangsimpedans på 50Ω . I det følgende holder vi frekvensen konstant 6kHz, og varierer amplituden.

Detaljerne i dette kredsløb er ikke så vigtige. Vi har blot skrevet dem med for at vise et kredsløb der virker. Den mest interessante komponent er dioden. Den er ikke-lineær på flere måder. Ensrettereffekten beror på, at spændingen over den ikke er proportional med strømmen igennem den. Men diodeovergangen virker også som en

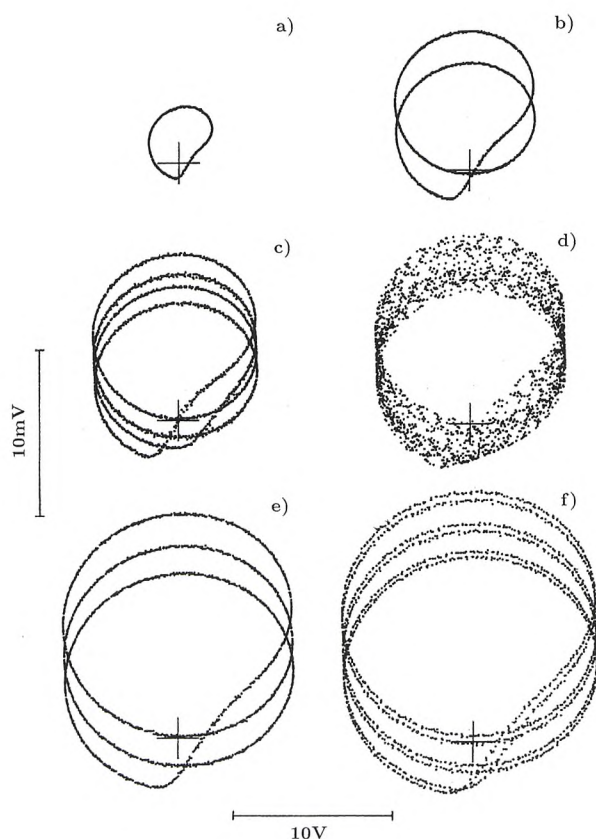
kondensator, med en kapacitet, der er stærkt afhængig af spændingen over dioden. Man skal vælge en diode med en så stor kapacitans som muligt. I praksis vælges en diode beregnet til store strømme, eller man bruger kollektor-base dioden i en stærkstrøms transistor.



Er amplituden af modulationen lille, hører vi en ren tone med en frekvens på 6kHz. Øger vi nu amplituden langsomt, er det eneste, vi hører, en stigning i lydstyrken. For lave amplituder opfører systemet sig altså præcist, som vi ville forvente af et lineært system. Øges amplituden yderligere, sker der imidlertid pludselig en drastisk ændring. For en veldefineret amplitude falder tonen til et dybere leje. Det vi hører er den første bifurkation. Læg mærke til, at den påtrykte frekvens er uforandret 6kHz, det er kredsens svar der ændrer frekvens. Når vi atter øger amplituden vil dette lydbillede være uændret i starten. Vi oplever dog snart den næste bifurkation: Igen falder tonen til et dybere leje. Et trænet øre vil kunne afsløre, at frekvensen bliver halveret ved hver bifurkation. Kort efter den anden bifurkation bliver vi udsat for en ubehagelig oplevelse, når hovedtelefonerne fyldes af en hvæsende støj, der lyder, som når radioen er indstillet mellem to stationer. Det vi hører er lyden af kaos. Denne støj er deterministisk: den er en konsekvens af systemet selv og kan ikke fjernes ved at forbedre forsøgsbetingelserne.

Lad os nu med oscilloskopet se hvad det var vi hørte. I fig. 2a er modulationen vist som funktion af tiden. I fig. 2b,c,d og e har vi på samme måde strømmen gennem

kredsen målt som spændingen over modstanden på 4Ω . Sammenligner vi fig. 2b, der viser signalet før den første bifurkation, med fig. 2a, ser vi, at de to signaler har samme periode. I fig. 2c, som viser signalet efter den første bifurkation, er der samme afstand mellem to på hinanden følgende bølgetoppe som i fig. 2a, men man skal to perioder hen for at se et signal af samme højde. Der er altså opstået et signal af den dobbelte periode. Det betyder ikke, at modulationens periode er fuldstændigt forsvundet fra signalet. Signalet fra kredsen indeholder både modulationens periode og den dobbelte periode. Grunden til at vi med øret opfatter en skarp overgang er, at øret er mere følsomt for de lavere frekvenser. I fig. 2d ser vi signalet efter den anden bifurkation. Det er nu klart, at perioden her er fire gange så stor som perioden af modulationen. Figur 2e viser det kaotiske signal. Dette signal adskiller sig fra de foregående ved *ikke*, at være periodisk.



Figur 3 viser systemets tilstande på en anden måde. Her er oscilloskopet sat i 'x-y mode', så strømmen gennem kredsen vises som funktion af spændingen over den. Her ses periodiciteten hhv. aperiodiciteten tydeligere end i den foregående figur. Der skal tre variable til at specificere systemets tilstand, f.eks. spændingen, strømmen og tiden. Systemets faserum er altså 3-dimensionalt, og det vi ser på oscilloskopet og i fig. 3, er en 2-dimensionel projektion af faserummet. De baner systemet følger i faserummet kaldes attraktorer. Den kaotiske attraktor i

fig. 3d er underlig og kaldes derfor en *strange attractor*. Det underlige ved den er, at den er en fraktal. Kort fortalt gentager den sig selv på mindre og mindre skalaer, på samme måde som det billede, man ser, hvis man stiller sig mellem næsten parallelle spejle. Kan læseren ane en sådan struktur i fig. 3d?

Øges amplituden over den værdi, hvor vi først fandt den kaotiske tilstand, observerer vi et virvar af forskellige periodiske og kaotiske tilstande. Vi kan finde nye periodiske tilstande som den i fig. 3e, der har en periode, som er tre gange modulationens periode. Disse periodiske tilstande kan gennemgå periodedoblinger (fig. 3f) og eventuelt selv blive kaotiske.

Hvorfor fortsætter serien af bifurkationer i fig. 2 ikke, men slutter efter to? Svaret er at bifurkationerne faktisk fortsætter i det uendelige. Man skal bare ændre amplituden med mindre og mindre skridt for at komme fra en bifurkation til den næste. På den måde kan der være uendeligt mange bifurkationer i et endeligt amplitudeinterval efter samme princip, som da Achilles indhentede skildpadden. Der hvor bifurkationerne 'kondenserer', sætter kaos ind. Præcisionen i vort eksperiment gør at vi kun hører de to første bifurkationer. Serien af bifurkationer kaldes et figentræ, og det var Feigenbaums fortjeneste at han opdagede de matematiske love, der styrer træets vækst. Vil man gå på rov i figentræet gøres det bedst numerisk. Det system, vi har beskrevet her, er et af de simpleste kontinuerte systemer som udviser kaotisk opførsel. Man kan uden det store besvær skrive kredsløbsligningerne ned og simulere dem numerisk. Man kan dog gøre livet lettere for sig selv ved at klatre i Feigenbaums fodspor og studere iterationer af simple afbildninger. Hvordan man gør det samt forbindelsen mellem disse afbildninger og realistiske, kontinuerte systemer og mange andre interessante ting kan man f.eks. læse om i Ref. 1.

Referencer:

- 1) Universality in Chaos, Adam Hilger Limited 1984, red. P. Cvitanovic.



Mogens T. Levinsen, lektor ved Center for Chaos and Turbulence Studies ved Niels Bohr Institutet. Interesseområder: Komplekse systemer og superledning. Bo Christiansen er Ph.D fra Ørsted Laboratoriet, 1992, på et arbejde om kvasikrystaller i overfladebølger. Arbejder nu ved Herlev Gymnasium. Jun Zhang, er kandidat fra Wuhan universitet, Kina, 1985. Han arbejder nu på et Ph.D projekt ved Ørsted Laboratoriet om rørstrømning og vækst af grænselag.