

Fermioner, bosoner, anyoner og kvante Hall effekten

Per Hedegård, Ørsted Laboratoriet, Niels Bohr Institutet

Indledning

Denne artikel skulle egentlig handle om den endelige teoretiske forklaring på, hvorfor kobberoxiderne bliver supralede ved de høje temperaturer man observerer. Det er blot så uheldigt, at vi endnu ikke har forklaringen. Et par af de gamle hanaber, Philip Anderson og David Pines, påstår ganske vist, at de kender den. Et problem er det så, at deres respektive forklaringer er i direkte modstrid med hinanden! I denne situation har jeg valgt at fortælle om en anden og ligeså interessant udvikling i fysikken, som har fundet sted i det seneste ca. 10 år, nemlig studiet af elektroner udsat for stærke magnetfelter. Specielt i det tilfælde, hvor elektronerne er bundet til at bevæge sig i en plan, har det vist sig, at helt fundamentale begreber såsom klassifikationen af alle partikler som enten fermioner eller bosoner, har måttet generaliseres. Emnet er heller ikke aldeles irrelevant, når det drejer sig om at forstå supraleddingen i kobberoxiderne, thi også her er elektronerne i høj grad bundet til at bevæge sig i de 2 dimensionale CuO_2 lag. Det bliver en temmelig lang artikel, da jeg bliver nødt til at gå grundlæggende til værks og starte med lidt elementær kvantemekanik:

Feynmans vejintegraler og kvantemekanikken

Det helt særlige ved kvanteteorien er at man må opgive, at give en deterministisk beskrivelse af de fysiske fænomener. Ifølge Heisenberg kan man ikke samtidig kende en partikels hastighed og dens position. Derfor må man opgive den klassiske mekanik, hvor man præcis kan følge partiklen i dens bane. I stedet må man bruge sandsynligheder. Disse sandsynligheder kan beregnes på en lige så eksakt og deterministisk måde, som den klassiske fysiks partikelbaner. En afgørende konsekvens af kvantemekanikken er, at en partikel i visse situationer opfører sig som en bølge, den udviser for eksempel interferens, og i andre situationer som en partikel, hvilket for eksempel vil sige, at den befinder sig et bestemt sted og kan give et klik i en partikeldetektor. Feynman har givet en formulering af kvantemekanikkens matematiske formalisme, som er meget intuitiv og direkte forståelig — efter kort tids tilvænnning. Man kan finde beskrivelse af Feynmans i hans bog *QED*[1], eller i min egen lille bog om supraledding[2]. Her vil jeg give et kort resumé. I den klassiske fysik kan en partikel kun følge en ganske bestemt bane fra et punkt til et andet i et vist tidsrum, nemlig den bane, der opfylder Newton's 2. lov. En planet skal for eksempel danne en ellipse med solen i det ene brændpunkt. I Feynmans ver-

sion af kvantemekanikken opereres der også med baner. Her skal *alle mulige baner* tages i betragtning. Sandsynligheden for at finde en partikel et bestemt sted $\mathbf{r}$ klokken t , givet at den var på positionen $\mathbf{r}_0$ klokken 0, beregnes ved hjælp af følgende opskrift:

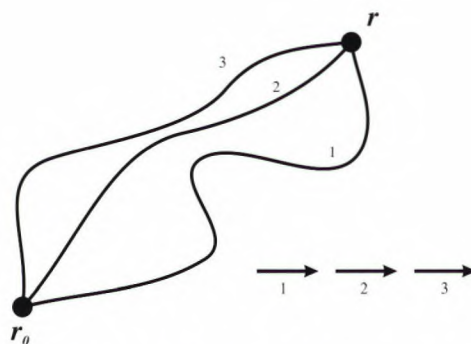
- Til enhver tænkelig bane tilordnes en urviser (med en længde, der er omvendt proportional med antallet af baner). Figur 1a.
- Retningen af viseren for en given bane bestemmes af, hvor hurtigt partiklen bevæger sig og hvilke kræfter partiklen føler langs banen. Helt eksakt kan vinkelen for viseren beregnes ved hjælp af følgende formel

$$\theta = \frac{2\pi}{h} \int_0^t \left(\frac{1}{2} m \dot{x}(t')^2 - V(x(t')) \right) dt'.$$

Figur 1b.

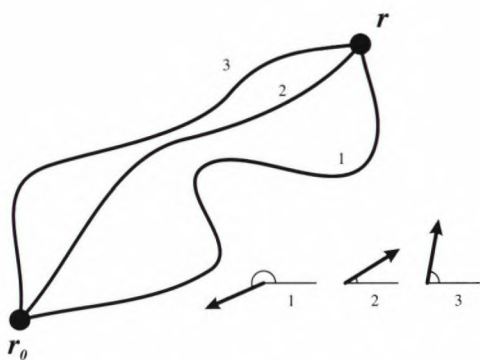
- Alle viserne lægges i forlængelse af hinanden og danner en effektiv viser. Denne resulterende viser kaldes i kvantemekanikken for *sandsynlighedsamplituden*. Figur 1c.
- Sandsynligheden findes ved at kvadrere længden af sandsynlighedsamplituden. Figur 1d.

Her er h Planck's konstant, der som bekendt er meget lille $\sim 6 \cdot 10^{-34}$ Joule-sekund, m er partiklens masse, $x(t')$ er dens position klokken t' og $V(x)$ er den potentielle energi af partiklen når den er i positionen x .

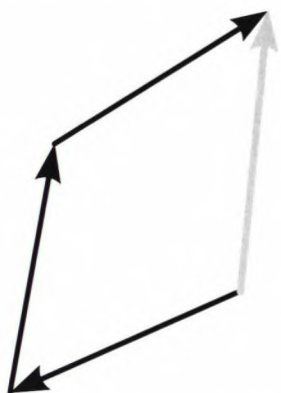


Figur 1a. Tre forskellige baner, der fører fra et punkt $\mathbf{r}_0$ til et punkt $\mathbf{r}$, samt deres tilhørende kvantevisere.

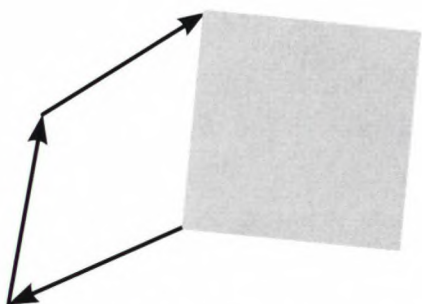
Hvis man prøver at finde kvanteamplituden hørende til forskellige slutpunkter $\mathbf{r}$, vil man få en samling af resulterende visere — en til hvert punkt i rummet. Denne samling af visere kaldes ofte for *bølgefunktionen*.



Figur 1b. De tre visere er blevet drejet i overensstemmelse med kvantemekanikkens grundregler.



Figur 1c. Summen af viserne fra de tre baner



Figur 1d. Sandsynligheden for at komme fra r_0 til r er kvadrattet på summen af banernes kvantevisere.

Med denne opskrift kan man more sig med at udlede mange af den elementære kvantemekaniks resultater. For eksempel er det meget nemt at illustrere det berømte dobbelspalteeksperiment, ved at addere viserne hørende til baner, der går gennem hver sin spalte.

I princippet burde man addere visere hørende til uendelig mange forskellige baner, som en partikel kan bevæge sig. Meget ofte, og specielt for tunge partikler kan man nøjes med at betragte de klassiske baner. Grunden hertil, er at viserne hørende til ikke-klassiske baner har tendens til at udslukke hinanden, dvs. have pile, der peger i modsat retning, således at de i praksis ikke vil bidrage til kvanteamplituden. Det specielle ved den klassiske bane er, at baner, der kun afviger en lille smule fra

den klassiske har en viser, der peger i stort set samme retning, som den klassiske banes viser. Matematisk kan det udtrykkes

$$\theta(x_{\text{klassisk}}) \approx \theta(x_{\text{klassisk}} + \delta x).$$

Det fine er, at denne betingelse kan vises at føre direkte til Newton's 2. lov. Vi har således næsten udledt den klassiske mekanik fra kvantemekanikken.

Magnetfelter og Kvantemekanik

Vi vil især interessere os for elektroner, der bevæger sig i et magnetfelt, sådan som elektronerne i et Hall eksperiment gør det. Kvanteregelen for bevægelse kan ikke beskrives som ovenfor. De magnetiske kræfter hører til den interessante familie af kræfter, som kaldes *gauge-kræfter*.

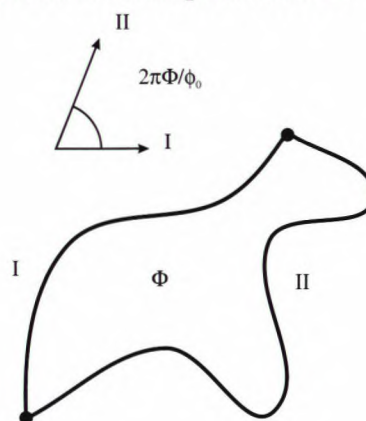
Kvantereglerne ovenfor skal suppleres med følgende, når en partikel bevæger sig i et magnetfelt

- Vælg en fast bane, der forbinder begyndelses og slutpunktet. (Vi skal se, at vi får samme fysiske resultat, uafhængigt af dette valg).
- En anden bane vil sammen med den faste bane definere et areal. Gennem dette areal strømmer der en magnetisk flux Φ . Figur 2.
- Viseren for den anden bane skal drejes en ekstra vinkel

$$\theta_m = 2\pi\Phi/\phi_0,$$

pga. magnetfeltet, hvor $\phi_0 = h/e$ er det såkaldte fluxkvant (e er elektronens elektriske ladning).

Det bemærkelsesværdige ved disse regler er, at viserdrejningen er fuldstændig uafhængig af om elektronen bevæger sig hurtigt eller langsomt langs banen — kun banens geometriske form spiller en rolle.

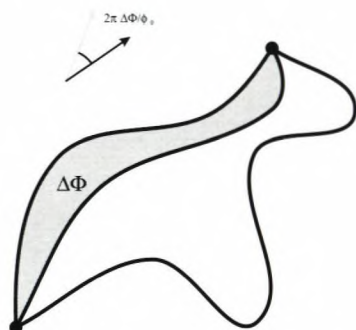


Figur 2a. Sammen med en standardbane omslutter banen en vis magnetisk flux Φ . Dette giver en drejning af kvanteviseren med vinkelen $2\pi\Phi/\phi_0$.

Man kan forholdsvis let vise, at reglerne fører til, at en partikel der følger en klassisk bane, føler den såkaldte Lorentz-kraft:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}),$$

hvor $\mathbf{v}$ er partiklens hastighed og $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ er magnetfeltets styrke, der hvor partiklen befinder sig. Kraften er altid vinkelret på partiklens hastighed, så den har tendens til at bevæge sig i cirkler, stadig når vi tænker klassisk.



Figur 2b. Den faste bane er ændret, og samtlige visere skal drejes en vinkel $2\pi\Delta\Phi/\Phi_0$.

Men reglerne har nogle noget mere mystiske, eller i hvert fald fremmedartede, konsekvenser. Forestiller man sig nemlig at magnetfeltet kun er i en begrænset del af rummet, for eksempel indeni en lang spole. En elektron, der bevæger sig i en ledning, som er lagt, hvor der ikke er noget magnetfelt (se figur 3) vil således ikke føle noget Lorentzkraft, og vi vil ikke i noget klassisk eksperiment med elektronen kunne afgøre, at der faktisk er et magnetfelt. Men i kvantemekanikken har magnetfeltet en virkning. Her skal vi ifølge Feynman addere viserne for alle baner. Selv om elektronbanerne på intet tidspunkt er i et område med magnetfelt så kan arealet udspændt af elektronbanen sagtens indeholde en del af feltet. Specielt for lukkede baner er det tydeligt. Lad os sige, at vi ønsker at vide, hvad sandsynligheden er for at en elektron vender tilbage til sit udgangspunkt. Her skal vi så kun betragte lukkede baner. Ifølge kvantereglen får vi også brug for at vælge en fast bane til at definere en omsluttet flux. For lukkede baner er det nemmest blot at lade den faste bane være den, hvor elektronen ikke rører sig ud af flækken. Hvis elektronen i en sådan bane *ikke* kører en tur rundt om feltet, så vil der ikke være noget magnetisk bidrag til viserens drejning. Kører den derimod én gang rundt om feltet, skal viseren drejes en vinkel $2\pi\Phi/\Phi_0$. Helt generelt gælder, at hvis elektronen tager n ture rundt om feltet, skal den tilhørende visere drejes en vinkel $n2\pi\Phi/\Phi_0$. Det er nu klart, at sandsynligheden for at elektronen vender tilbage til sit udgangspunkt, dvs. kvadratet på længden af alle visere lagt i forlængelse af hinanden, vil afhænge af, hvor stor en magnetflux, der går igennem ringen.

Denne fundamentale effekt kaldes *Aharonov-Bohm effekten*, efter de to fysikere, der i 1956 opdagede denne finesse ved kvantemekanikken. Det er interessant at tænke sig, at der skulle gå 30 år efter kvantemekanikkens fødsel før det blev nogenlunde klart, hvorledes elektroner opfører sig i magnetfelter. Et er naturligvis teoretisk at beregne elektronens bevægelse i et magnetfelt, et andet er at observere det direkte i naturen. Aharonov-Bohm effekten blev eftervist eksperimentelt i begyndelsen af 60'erne. I de seneste år har man imidlertid direkte studeret små ringformede kobberledninger, som dem jeg har skitseret i figur 3. I disse studier har man især benyttet sig af en speciel periodicitet, der gør sig gældende, når man har at gøre med lukkede ringe. Prøv nemlig at variere styrken af magnetfeltet igennem ringen. Når feltet bliver så stærkt, at fluxen Φ gennem ringen bliver lig med fluxkvantet Φ_0 , så skal viserne drejes en vinkel $n2\pi$, hvor n er antallet af ture rundt i ringen for den enkelte bane. Men det vil sige, at samtlige visere skal drejes et helt antal omgange — hvilket faktisk er ækvivalent med ikke at dreje nogen af dem. Vi ser altså at en flux svarende til fluxkvantet vil være ækvivalent med ingen flux overhovedet! Skruer man nu yderligere op for feltet vil det atter kunne mærkes, indtil vi når op på 2 gange Φ_0 . Og så fremdeles: effekten af et magnetfelt er periodisk i den pålagte flux med en periodicitet, der er lig med fluxkvantet $\Phi_0 = h/e$.

Edwards High Vacuum Turbomolekularpumper

- ★ 4 basistyper
- ★ High Power DC-motor
- ★ 40 flangevarianter
- ★ Ny EXT E økonomiversion
- ★ 17 modeller
- ★ Lavt støj- og vibrationsniveau

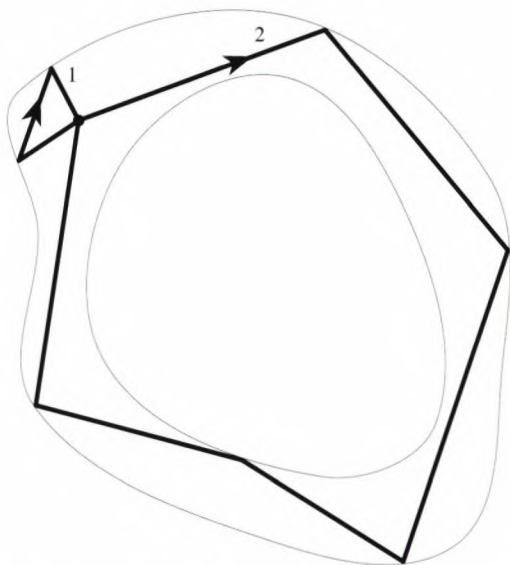


Edwards High Vacuum er en af verdens førende producenter af vakuumpumper og -udstyr. Den nye EXT E version gør det nu muligt at anskaffe en Turbomolekular Vakuumpumpe til en fornuftig pris. Kan køles enten med luft eller vand, og kan styres af den normale EXC350 og EXC500 Turbo-kontroller. Edwards High Vacuum er også Dry Pumps, Diff. Pumps, Vakuüm måleinstrumenter, Frysetøringsanlæg og På-dampningsanlæg.

Ring for yderligere oplysninger!

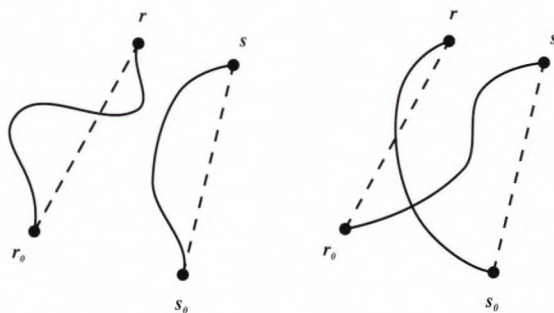
Marielundvej 36
2730 Herlev
4291 75 11

Buch & Holm A/S



Figur 3. Aharonov-Bohm effekten. Elektroner, der bevæger sig rundt i en lukket ledning. Ledningen omslutter en magnetisk flux, der ikke på noget sted rører ledningen. En elektron, der følger banen 1, får ikke drejet sin kvanteviser pga. magnetfeltet, hvorimod banen 2 vil få sin viser drejet.

Inden vi afslutter dette afsnit skylder jeg at forklare, hvorfor det er ligegyldigt, hvilken fast bane man bruger til at definere fluxen Φ i den generelle kvanteregel. Prøv at udskifte den faste bane med en anden fast bane, som illustreret i figur 2b. Mellem disse to faste baner er der nu omsluttet en bestemt flux $\Delta\Phi$. Skiftet fra den ene til den anden faste bane kan nu meget nemt effektueres ved blot at dreje samtlige visere en vinkel $2\pi\Delta\Phi/\phi_0$. Men sådan en fælles drejning af alle visere vil ikke ændre længden af den samlede visere, og vi kan derfor konkludere at den ønskede sandsynlighed er uforandret. I kvanteteorien kaldes en sådan drejning af samtlige visere, der jo er ækvivalent med at definere en ny akse i forhold til hvilken man måler vinkelen θ , for en *gauge-transformation*. Man siger at elektromagnetismen er invariant under gauge-transformationer.



Figur 4. Identiske partikler. To ens partikler starter i r_0 og s_0 og slutter i r og s . Både forløbet i figuren til højre og forløbet i figuren til venstre opfylder disse krav.

Mange partikler — fermioner og bosoner

Indtil videre har vi kun studeret en elektron af gangen. I et virkeligt fysisk system er der naturligvis mange elek-

troner — ca. 10^{22} pr. cm^3 . Men de er allesammen ens. Lad os starte med kun at studere to elektroner.

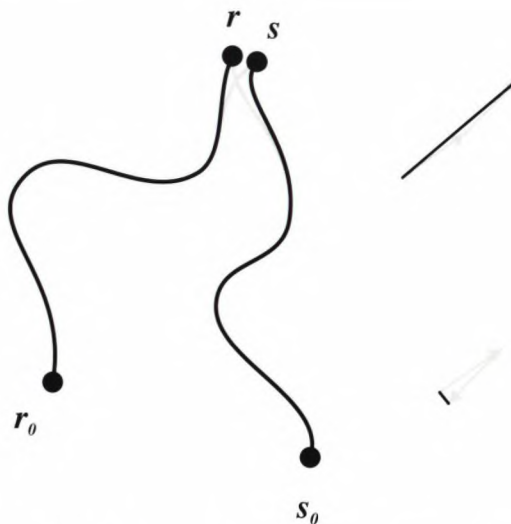
Hvis vi ved en måling har kunnet konstatere, at de på et vist tidspunkt befinder sig i to punkter r_0 og s_0 , hvad er da sandsynligheden for på et senere tidspunkt at finde de to elektroner i to andre punter r og s ? Man må jo i kvantemekanikken opgive at følge den enkelte elektron i dens bane, så da elektronerne er fuldstændig identiske, er begge historiske forløb illustreret i figur 4 mulige. Vi vil kalde en samling af baner for partiklerne for en *historie*. De præcise regler for N partikler er følgende:

- Vælg et tilfældigt sæt af standard veje, der forbinder start og slutpositionerne.
- For enhver historie beregnes nu en samlet vinkel ligesom i enpartikel-tilfældet ovenfor, eventuelt suppleret med vekselvirkningsled:

$$\theta = \sum_{i=1}^N \theta(x_i) + \int_0^t W(x_1(t'), \dots, x_N(t')) dt'.$$

- Tæl, hvor mange ombytninger af partikler, der har fundet sted, sammenlignet med standardvejene. Kald dette antal M .
- For hver af de M ombytning skal viseren drejes en bestemt vinkel:

fermioner: π bosoner: 0



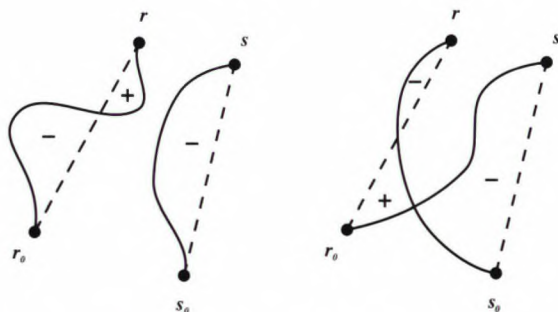
Figur 5. Fermioner og bosoner. For den grå historie, hvor partiklerne byttes om skal kvanteviseren være uforandret for bosoner og drejes 180° for fermioner. Det giver konstruktiv interferens for bosoner og destruktiv interferens for fermioner, hvis slutpunkterne ligger tæt på hinanden.

Denne er den eneste forskel på fermioner og bosoner. Denne uskyldigt udseende ekstra drejning har en fysisk

effekt, hvis konsekvenser næppe kan overdrives. For at illustrere dette kan vi spørge hvad sandsynligheden er for at finde to identiske partikler lige i nærheden af hinanden, som illustreret i figur 5.

For enhver historie vil der være en næsten ens historie, med den ene forskel, at partiklerne her bliver byttet om. For fermioner betyder det, at viserne for de to historier næsten udslukker hinanden, hvilket fører til en meget lille sandsynlighed for at finde de to fermioner i nærheden af hinanden. Hvis de to slutpositioner er ens vil sandsynligheden blive lig med nul. Denne konsekvens af kvantemekanikken kaldes *Pauli-princippet*. I almindelighed kan man vise, at ikke blot kan to fermioner ikke være i samme position. De kan for eksempel heller ikke være i en tilstand med samme hastighed.

Helt anderledes er det for bosonerne. I figuren kan vi se, at de to historier her vil trække på samme hammel og faktisk øge sandsynligheden for at finde de to bosoner på samme sted. Dette generaliserer til en slags omvendt Pauliprincip, der siger at to bosoner faktisk foretrækker, at være i samme kvantetilstand. Hvis vi i stedet for kun at betragte to bosoner havde set på mange bosoner, lad os sige N , så ville vi finde, at sandsynligheden for at finde en partikel nummer $N + 1$ i samme tilstand som de N første vil vokse proportionalt med N . Som beskrevet i Ref. [2], rummer denne egenskab for bosoner den egentlige forklaring på så forskellige kvantefænomener, som laseren og supraledning. I laseren er de bosoner, der er i samme tilstand, fotoner, dvs. lyspartikler. I en supraleder udgøres bosonerne af par af elektroner (de såkaldte Cooper-par), idet det er forholdsvis nemt at vise ud fra de generelle regler ovenfor, at et par af fermioner kan approksimeres med en boson.



Figur 6. Identiske partikler og magnetfelter. Standardbanerne definerer hvorvidt partiklerne er byttet om og gør det omsluttende magnetfelt veldefineret.

Lad os nu vende tilbage til vort emne, nemlig elektroner i et magnetfelt. Den regel vi beskrev ovenfor for en enkelt partikels bevægelse i et magnetfelt skal generaliseres på følgende måde for mange partikler

- Sammen med standardbanerne, der bruges til at definere ombytningerne, vil alle partikelbanerne danne en samling af lukkede kurver. Figur 6.

- Den samlede magnetflux (regnet med fortegn) gennem disse lukkede kurver giver, hvilken vinkel viseren hørende til den givne historie skal drejes:

$$\theta_m = 2\pi \sum_{\text{lukkede kurver}} \Phi_i / \phi_0.$$

På samme måde som i enkeltpartikel tilfældet er det nemt at vise, at en ændring af standardbanerne ikke vil føre til andet end en samlet drejning af alle historier visere, og dermed ikke føre til nogen ændring af sandsynlighederne.

Alt det vi har diskuteret indtil nu har været kendt siden Aharonov og Bohm i slutningen af 50'erne gjorde opmærksom på de særlige forhold, der gør sig gældende for kvantemekanik i magnetfelter. Vi skal nu vende os mod de seneste ti års fascinerende udviklinger. Vi starter i Norge.

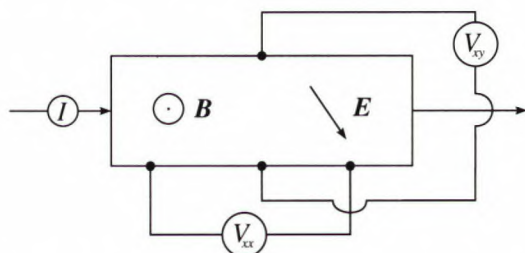
Anyoner og Kvante-Hall Effekten.

Det grundlæggende paradigme, at alle partikler i naturen enten er fermioner eller bosoner, har domineret fysikken siden opdagelsen i slutningen af tyverne. Hele vores forståelse af den omgivende natur bygger i den grad på Pauli-princippet: det er elektronerne, og deres struktur, der forklarer, hvorfor atomerne binder sig sammen og danner molekyler og faste stoffer. Stoffernes hårdhed, deres varmfylde, hvor godt de leder elektrisk strøm og varme — forklaringen på alle disse egenskaber er fuldstændig domineret af Pauli-princippet. Tilsvarende er kernefysikken også i Pauli-princippets vold. Her er de identiske fermioner protonerne og neutronerne.

Det vakte derfor en vis opmærksomhed blandt en lille kreds af teoretiske fysikere, da to normænd, Jon Magne Leinaas og Jan Myrheim i 1977 viste, at kvantemekanikken faktisk tillader partikler, der hverken er fermioner eller bosoner. I starten var det dog en temmelig akademisk opdagelse: Kun hvis partiklerne bevæger sig udelukkende i en *to-dimensionel* verden, var der denne mulighed, og ingen havde den fjerneste anelse om, hvorvidt sådanne eksotiske partikler findes i naturen. Frank Wilczek har døbt partikler, der hverken er fermioner eller bosoner, *anyoner* (hvad-som-helst-oner).

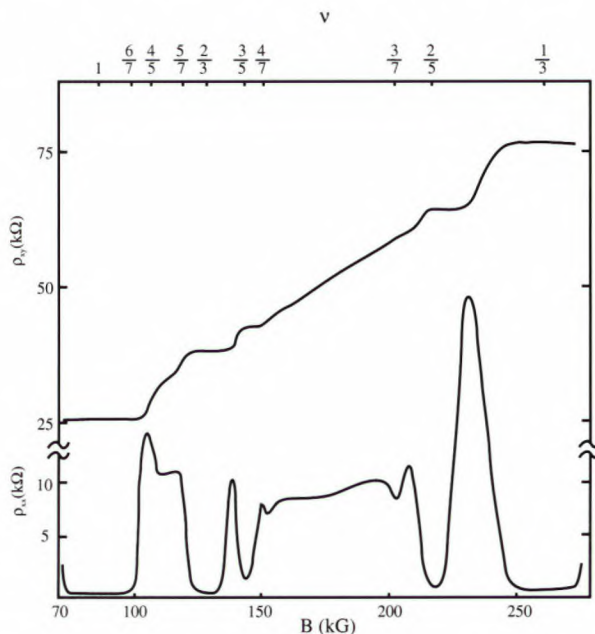
I 1980 opdagede Klaus von Klitzing den såkaldte *Kvante-Hall Effekt*. Ved omhyggeligt at anbringe to forskellige men specielle halvledere ved siden af hinanden er det muligt at præparere en gas af elektroner, der er bundet til at bevæge sig på den to-dimensionale grænse mellem de to halvledere. Denne elektron-gas skulle vise sig at have helt specielle egenskaber. Især hvis den udsættes for et meget stærkt magnetfelt, hvor feltlinierne går vinkelret på den plan, som elektronerne bevæger sig i. For visse værdier af det pålagte magnetfelt forsvinder den elektriske modstand af elektrongassen. Hall-modstanden er forholdet mellem den spændingsforskel, der opstår vinkelret på en elektrisk strøm,

og strømstyrken. Samtidig med at al modstand forsvinder, antager Hall modstanden med meget stor præcision værdier, der viser sig at være simple rationelle multipla af det såkaldte modstandskvant $R_K = h/e^2 = 25812.806\Omega$. Denne størrelse kaldes sommetider en *Klitzing* efter sin opdager, som i øvrigt i 1985 fik Nobelprisen for sit arbejde. I figur 7b kan man se, hvordan Hall modstanden og den sædvanlige modstand opfører sig som funktion af magnetfeltets styrke.



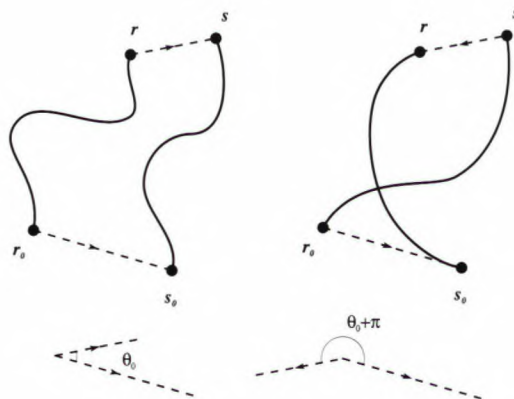
Figur 7a. Hall eksperimentet. Til venstre ses en skematisk opstilling. En strøm I løber igennem Hall prøven, der er udsat for et magnetfelt B vinkelret på prøven. Der opstår et spændingsfald V_{xy} vinkelret på strømmen og et spændingsfald V_{xx} langs med strømmen. Den almindelige modstand fås som $R_{xx} = \frac{V_{xx}}{I}$ og Hall modstanden som $R_{xy} = \frac{V_{xy}}{I}$. De tilhørende specifikke modstande kaldes ρ_{xx} og ρ_{xy} .

Vi har efterhånden en ganske god forståelse af, hvad der sker i elektrongassen, når den bliver udsat for stærke magnetfelter. Teoretiske arbejder af især R. B. Laughlin, B. I. Halperin og mange andre har vist, at det er en slags supraledning, der forklarer målingerne. Samtidig viser det sig, at elektronerne i en vis forstand splitter op og bliver til en gas af anyoner. For at forstå alt dette, må vi først se på, hvad Leinaas og Myrheim opdagede.



Figur 7b. På kurven vises både den almindelige modstand ρ_{xx} og Hall-modstanden ρ_{xy} . Det ses at modstanden forsvinder i visse intervaller af det ydre magnetiske felt. I disse intervaller har Hall-modstanden en konstant værdi, de såkaldte Hall plateauer.

Vi vil starte med at foretage en gaugetransformation. Det gør vi ved at give en alternativ definitionen af fermioner og bosoner, der i 2 dimensioner er ækvivalent med den vi allerede har diskuteret. Betragt igen 2 identiske partikler, og en historie, der forbinder begyndelses og slutpunkterne for de to partikler. Til ethvert tidspunkt i historien findes der en vektor, der forbinder de to baner. Ved historiens slutning vil denne vektor været drejet en vis vinkel, θ . For samtlige historier antager denne vinkel en af to værdier, θ_0 og $\theta_0 + \pi$, afhængigt af, om de to partikler byttes om, som illustreret i figur 8.



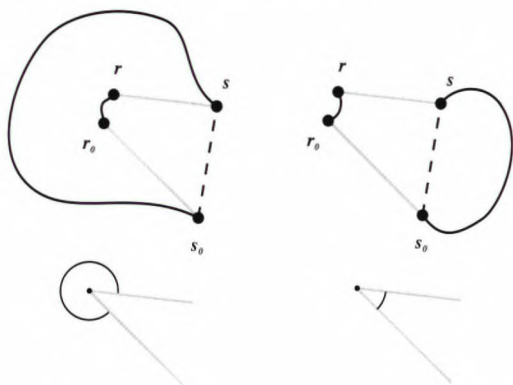
Figur 8. Alternativ definition af fermioner og bosoner. Den relative vektor mellem to partikler drejer en vinkel θ . Den er lig θ_0 , hvis der ikke sker ombytning af partiklerne, og $\theta_0 + \pi$, hvis de ombyttes. Kvanteviseren skal drejes en vinkel $\alpha\theta$, hvor α er et lige helt tal for bosoner og et ulige helt tal for fermioner.

Ved hjælp af denne observation er det nu nemt at tage hensyn til Fermi og Bose egenskaberne. For bosoner drejes kvanteviseren en vinkel $2n\theta$ (n er et helt tal). Herved bliver samtlige historier nemlig drejet vinkelen $2n\theta_0$, hvilket er helt ækvivalent med den definition ovenfor, da en ens drejning af samtlige visere ikke kan ændre sandsynlighederne. For fermioner skal vi dreje kvanteviseren vinkelen $(2n + 1)\theta$ (n er et helt tal). Herved vil de historier, hvor partiklerne ombyttes, få en ekstra drejning på π , i overensstemmelse med den tidligere definition. Hvis vi har flere end to partikler, skal man blot addere θ -vinklerne for alle mulige forskellige par af partikler.

Vi kan nu se, at det er muligt at generalisere disse regler. Hvis vi i stedet drejer kvanteviseren en vinkel $\alpha\theta$, hvor α er et fast tal, så har vi en type partikler, som er fermioner, hvis α er ulige, bosoner hvis α er lige og anyoner hvis α antager en hvilken som helst ikke heltallig værdi.

Denne definition af anyoner er jo afhængig af, at vinkelen θ er veldefineret. Det er den helt klart i 2 dimensioner (undtagen i punkter, hvor banerne måtte skære hinanden — og sådanne vil vi se bort fra). I 3 dimensioner, derimod, er det ikke muligt at definere en sådan vinkel. Man kunne forsøge at bruge azimutvinkelen i et

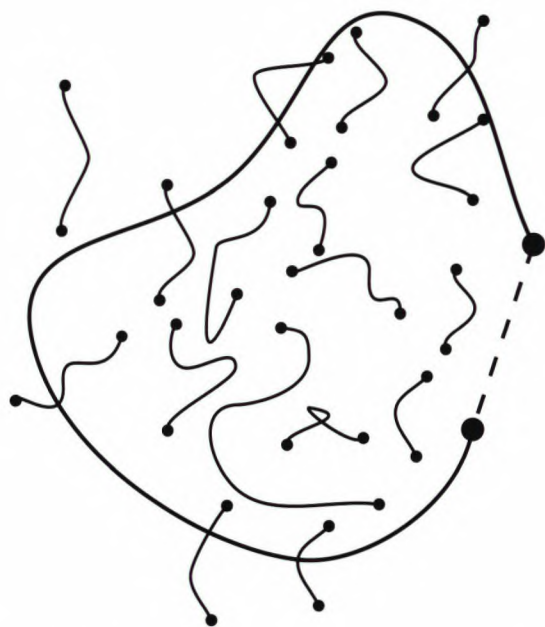
polært koordinatsystem, men den er udefineret for alle de punkter, hvor polarvinkelen er nul.



Figur 9. Forskellen i den drejning kvanteviseren skal have mellem tilfældene, hvor den ene partikel henholdsvis kører rundt om den anden eller ikke gør det, er givet ved $2\pi\alpha$. Dette er ækvivalent med at sige, at den omkredsede partikel repræsenterer en magnetisk flux vinkelret på planen, der er lig med $\alpha\phi_0$.

Siden denne nye mulighed så dagens lys har teoretiske fysikere arbejdet ihærdigt på at beregne egenskaberne af en sådan anyon gas. Det er ikke så nemt som det umiddelbart ser ud til. Vi skal nemlig se, at hvis α ikke er heltallig, så svarer anyon-tilfældet til, at partiklerne vekselvirker magnetisk med hinanden. Lad os betragte en af partiklerne og se, hvad der sker, hvis dens bane fører den rundt om en anden partikel, som illustreret i figur 9. Forskellen mellem den vinkel kvanteviseren skal drejes for baner, der som i figur 9 til venstre fører den ene partikel rundt om den anden, og baner — figur 9 til højre — hvor dette ikke er tilfældet, er givet ved $2\pi\alpha$. Dette er præcis den samme drejning viseren ville få, hvis partikel nummer 2 var blevet erstattet med et uendeligt tyndt magnetisk fluxrør, med en flux på $\alpha\phi_0$. Gjorde man nemlig dette, ville den ene type baner omslutte magnetisk flux, og den anden ville ikke. De generelle regler for partiklers bevægelse i et magnetfelt, beskrevet i afsnittet ovenfor ville diktere præcis den ønskede drejning af kvanteviseren. Denne opdagelse er overordentlig bemærkelsesværdig. Den siger, at en samling af anyoner, er det samme som en samling af bosoner, der hver er blevet udstyret med et fluxrør af styrke $2\pi\alpha\phi_0$! Dette rummer nøglen til forståelsen af kvante Hall effekten.

Dette trick, hvor alle slags partikler kan laves om til bosoner, mod at hænge et fluxrør fast på partiklerne, er ikke kun begrænset til anyoner. Fermioner er jo i en vis forstand også en slags anyoner, blot med en særlig værdi for α . Den to-dimensionale elektrongas, der lever på grænsen mellem to halvledere i von Klitzings eksperiment, kan således også opfattes som en bose-flux-gas. Hvis tætheden af elektroner er ρ , dvs. i et areal A er der gennemsnitlig $N = \rho A$ elektroner, så vil en given elektron i gennemsnit opleve, at den bevæger sig i et (fiktivt) magnetfelt med feltstyrken $B_{\text{fiktiv}} = (2n + 1)\rho\phi_0$.



Figur 10. Middelfelt teori. I gennemsnit vil en partikel omkredse et antal partikler, $A\rho$, der repræsenterer en flux på $A\rho\alpha\phi_0$ og en virkelig flux AB , hvor A er banens areal. For særlige elektrontætheder vil disse to fluxer ophæve hinanden.

Her har vi antaget, at vi har opfattet fermionerne som anyoner med $\alpha = 2n + 1$. Vi kan nu gøre som i eksperimentet og pålægge et virkeligt magnetfelt med en retning der er modsat den retning, vi forestiller os, at det fiktive felt har. I virkeligheden er det naturligvis omvendt: Eksperimentet angiver en retning for det virkelige felt, og vi lader fluxrørene have deres felt i den modsatte retning.

De to modsatrettede magnetfelter vil præcis ophæve hinanden, hvis tætheden af elektroner opfylder

$$\rho = \frac{1}{2n + 1} \frac{B}{\phi_0}.$$

For en given elektrontæthed kan denne ligning også opfattes som en betingelse, det ydre felt skal opfylde, for at sikre, at nettofeltet forsvinder. I almindelighed skal vi angive elektrontætheden i forhold til fluxkvantitet: $\rho = \nu \frac{B}{\phi_0}$. Tallet ν antager værdier af simple brøker når modstanden forsvinder. Det er angivet foroven i figur 7b.

Denne teoretiske betingelse er sammenfaldende med den betingelse man eksperimentelt har fundet må være opfyldt, for at modstanden forsvinder og for at Hallmodstanden antager sine magiske værdier. Hvorfor er der denne overensstemmelse? Jo, når det fiktive magnetfelt og det virkelige magnetfelt præcist ophæver hinanden, så opfører elektronerne sig som bosoner, der bevæger sig i et område uden magnetfelt. Men fra superlederne (og den superflydende væske bestående af He_4) ved vi, at bosonerne ved lave temperaturer har tendens til at anbringe sig i den samme kvantetilstand.

Dette betyder for eksempel, at al elektrisk modstand forsvinder, præcist som det observeres eksperimentelt. Men, hvordan kan vi forstå, at Hall modstanden antager de meget præcise værdier? Bosonerne føler jo ikke noget magnetfelt. Her skal vi huske på, at bosonerne ikke blot bærer på en ladning, som giver den elektriske strøm, $I = e \frac{dN}{dt}$, men de bærer også på en magnetisk flux, der giver anledning til en flux-strøm, $I_{\text{flux}} = (2n+1)\phi_0 \frac{dN}{dt}$. (Størrelsen $\frac{dN}{dt}$ er antallet af elektroner, der passerer en linie på tværs af strømmen pr. sekund). Ifølge Faradays lov, vil en fluxstrøm inducere en spænding på tværs, der præcist er givet ved $V_H = I_{\text{flux}}$. Forholdet mellem denne spænding og den elektriske strøm er derfor den ønskede $R_H = \frac{V_H}{I} = (2n+1) \frac{\phi_0}{e} = (2n+1)R_K$, altså et ulige antal modstandskvanter.

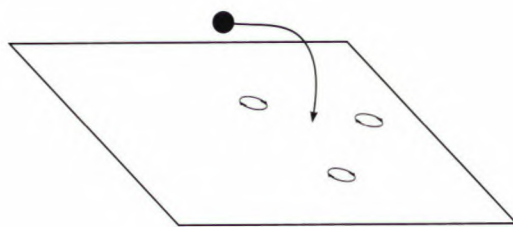
Vi kan nu se, at vi er på rette spor. Vi har forklaret, at modstanden forsvinder og at Hall-modstanden er kvantiseret. Der er dog et par eksperimentelle kendsgerninger vi endnu ikke har gjort rede for:

- Vi har kun forklaret de ulige modstandskvanter, dvs. 1, 3, 5 osv. Men på figuren kan vi se, at også for magnetfelter svarende til $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}$ og en del flere har vi at modstanden forsvinder og Hall modstanden er kvantiseret.
- Modstanden er væk og Hall modstanden er kvantiseret eksakt, ikke kun ved de magiske magnetfelter (eller elektrontætheder om man vil), men i et interval omkring disse.

Forklaringen på disse fakta, hænger sammen med, at der i elektrongassen faktisk vil skabes virkelige anyoner, når tætheden af elektroner afviger fra de værdier, der svarer til de ovenfor nævnte, der giver ulige modstandskvanter. Vi har jo indtil videre kun brugt anyonideen til at gøre fermioner til bosoner (med tilhørende flux'er), men vi har ikke set rigtige anyoner, dvs. partikler, hvis kvantevisere ikke skal drejes en hel eller en halv omgang under ombytning af partiklerne.

Lad os undersøge, hvad der sker, hvis vi til et system med en magisk elektrontæthed føjer én ekstra elektron. Vi vil derved forstyrre systemet. Men det er en karakterisk ting ved kvantesystemer, at de kan ikke forstyrres (eller eksiteres) på en hvilken som helst måde. Tænk for eksempel på et brintatom. Hvis vi "tilføjer" et lyskvant til sådan et, så kan det kun gøres ved at løfte elektronen i brintatomet til en af de særlige energitilstande for atomet. På samme måde er det i en Kvante-Hall superleder, som vi her studerer. Dette system kan kun forstyrres ved at danne en eller flere såkaldte Abrikosov hvirvler. Sådanne hvirvler kender man fra rigtige superledere. Her opstår de hvis superlederen udsættes for et stærkt magnetfelt. Magnetfeltet vil så kunne gennemtrænge superlederen i et fluxrør. Elektronerne i superlederen vil danne en hvirvel rundt om fluxrøret. Det specielle ved en sådan hvirvel, er at ikke en hvilken som helst flux kan trænge igennem. Faktisk vil den netop være

ét fluxkvant ϕ_0 . På præcis samme måde er det i vores Kvante-Hall superleder. Men en hel elektron er jo udstyret med en flux på $2n+1$ fluxkvanter, så hvis man adderer en hel elektron, så vil den "opløses" i Kvante-Hall superlederen og danne $2n+1$ uafhængige hvirvler!



Figur 11. Når man tilføjer én elektron til en $n = 1$ (dvs. $2n+1 = 3$) Kvante-Hall superleder, så vil den resultere i dannelsen af 3 hvirvler.

Vi kan nu forstå, hvorfor man ser superledning og modstandskvantisering i et helt interval omkring de magiske værdier for elektrontætheden. Er antallet af elektroner nemlig lidt større end det magiske, så vil der i systemet være et vist antal hvirvler. I enhver virkelig halvleder, vil der desuden være en mængde af "urenheder" som vil være i stand til at fange eller "pinne" hvirvlerne, som derfor ikke kan bevæge sig og ødelægge Kvante-Hall superlederen.

En hvirvel er i sandhed en eksotisk "partikel". Som vi har set vil der til hver ekstra elektron være knyttet $2n+1$ hvirvler, som derfor vil have en ladning på $\frac{1}{2n+1}$ af elektronens ladning! Man kan desuden forholdsvis let vise, at hvirvler er anyoner med et α på $\frac{1}{2n+1}$, dvs. kvanteviseren skal drejes en vinkel $\frac{\pi}{2n+1}$, hvis to hvirvler byttes om. Leinaas og Myrheims teoretiske partikler findes altså i naturen! Dette var en medvirkende grund til at de to nordmænd modtog IBM prisen for 1991.

Hvis der bliver tilstrækkelig mange hvirvler, dvs. hvis elektrontætheden afviger for meget fra den magiske, så vil vi have en ladet anyon-gas, der bevæger sig rundt i et magnetfelt, der dog ganske vist er noget reduceret, da kun fluxen fra hver af anyonerne bidrager. Vi kan nu gentage hele proceduren: Ved at udstyre hvirvlerne med nogle tynde fluxrør kan vi opfatte dem som bosoner, der bevæger sig i et yderligere reduceret magnetfelt. Ved en særlig værdi af hvirveltætheden, vil det effektive magnetfelt, som hvirvlerne opfatter, forsvinde og vi har nu en ny Kvante-Hall superleder. Det er forholdsvis ligetil at vise, at en sådan mekanisme kan forklare de øvrige observerede Kvante-Hall-tilstande.

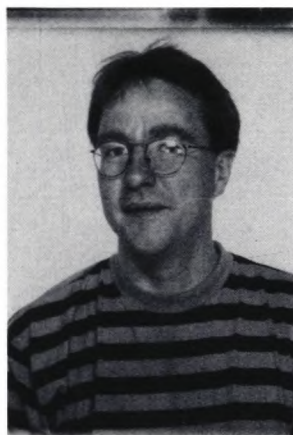
Konklusion

Jeg håber, at det efter den noget lange tour, er klart, at kombinationen magnetfelter og kvantemekanik er fyldt med fascinerende og fundamentale effekter. Det har været mange år og har krævet mange elegante og særdeles forfinede eksperimenter at finde vej gennem Kvante-

Hall-effektens gåder, før man nåede frem til det forholdsvis simple billede jeg har gennemgået i denne artikel. Høj- T_c superledernes gåder har vist sig at være om muligt vanskeligere, og vi står i dag uden det afgørende gennembrud, der gør os i stand til på simpel måde at forstå, hvad der foregår inde i samlingen af kobber og ilt atomer. Men lad os snakkes ved om 5 år. . .

Referencer:

- [1] Richard P. Feynman: *QED – The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, 1985.
- [2] Per Hedegård, *Forenede Elektroner A/S*, Munksgaard 1991.



Per Hedegård, Lektor ved Ørsted Laboratoriet, Niels Bohr Institutet. Arbejder med teoretisk faststoffysik. Har i de senere år specielt interesseret sig for superledere og kvantemekanik i magnetfelter.