

Turbulens og turbulent diffusion

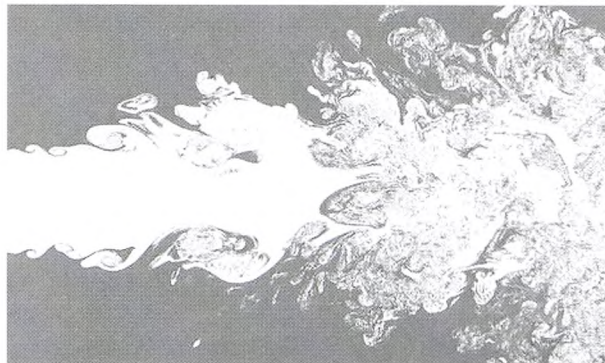
Jakob Mann, Afd. for Vindenergi, Risø, Søren Ott, Afd. for Vindenergi, Risø, Hans L. Pécseli, Fysisk Institut, Universitetet i Oslo, I. Maria Pécseli, Danmarks Miljøundersøgelser, og Jan Trulsen, Institut for Teoretisk Astrofysik, Universitetet i Oslo.

Turbulente, eller kaotiske strømninger har fascineret kunstnere i århundreder. Nogle af de tidligste afbildninger, der kendes, stammer tilbage til Leonardo da Vinci fra omkring år 1500. Turbulente strømninger kan observeres dagligt, og er vel basalt set kendt af alle læsere. Fænomenet illustreres på figur 1, men læserne opfordres til, at tage sig tid til selv at betragte røgen fra en skorsten, mens den deformeres af atmosfærens turbulent. Det behøver såmænd ikke være en dag med nogen videre blæst [1].

Det var imidlertid først omkring 1870 at den engelske fysiker Reynolds udførte nogle banebrydende kvalitative såvel som kvantitative undersøgelser af turbulent. Han lod væsker strømme gennem rør, og førte gennem en lille dyse lidt blæk ind i den ende af røret hvor han tilførte væsken, og kunne derved synliggøre dens bevægelse. Reynolds fandt, at han kunne identificere to tilsyneladende vidt forskellige tilstande for strømmingen; en *laminar*, hvor alle strømlinierne var stort set parallelle, og en *turbulent* eller kaotisk strømning. Overgangen fra den ene til den anden tilstand skete ved en veldefineret strømningshastighed. Man har senere fundet, at ved varierende diametre for rørene og forskellige strømningshastigheder kan overgangen fra den ene tilstand til den anden beskrives ved en simpel parameter $R = UL/\nu$, som vi i dag kalder Reynolds tal, her udtrykt ved strømningshastigheden U , rørets diameter L og væskens kinematiske viskositet ν . Hvis R var lille, var strømmingen laminar, mens man for store værdier for R fandt den turbulente tilstand. Det var tilsyneladende ligegyldigt om den aktuelle værdi for R blev opnået ved stort U og lille L , eller omvendt. Den kritiske værdi for R lå i Reynolds eksperimenter omkring 1000.

Fra et teoretisk synspunkt blev turbulent i mange år betragtet nærmest som utilgængeligt. Ved betragtning af for eksempel figur 1 virker det helt håbløst, at give et analytisk udtryk for vækehastigheden i et punkt i rummet (når man undtager dysens åbning). Det var først gennem banebrydende arbejder af blandt andre Taylor og Prandtl (henholdsvis en engelsk og en tysk fysiker) i begyndelsen af 1900-tallet og den sovjetiske matematiker Kolmogorov's arbejder omkring 1940, at man opnåede de første skridt på vejen til en grundlæggende teoretisk forståelse. Taylors og Prandtl's fortjeneste bestod i at vise hvorledes man med fordel kunne angribe problemet ud fra et statistisk synspunkt. Kolmogorov tilførte disse betragtninger de første forsøg på en kvantitativ forudsigelse af vigtige statistiske størrelser for usammenrykkelige væsker, hvor han især koncentrerede

sig om spektrene for de fluktuerende hastigheder. På grund af forholdene under og lige efter II verdenskrig blev Kolmogorovs arbejder ikke umiddelbart kendt i omverdenen. Det er interessant at bemærke, at en del af hans resultater blev genopdaget af flere andre, for eksempel Onsager, Heisenberg og von Weizsäcker.



Figur 1. Fotografiet viser en vandstråle (en "jet"), der sendes ind i et kar med væske, som til at begynde med er i hvile. Det fremgår, hvorledes strømmingen bliver mere og mere kaotisk bort fra dysen til venstre i billedet.

Analytiske betragtninger

Vi skal her prøve at give en kort opsummering af et hovedresultat, der behandler hastighedsforskelle i turbulente væsker. Analysen opsummeret her er stærkt simplificeret, men gengiver dog korrekt de vigtigste resultater. Vi betragter først et turbulent hastighedsfelt, hvor rum-tids variationen af den lokale vækehastighed er beskrevet ved $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Herved forstås et vektorfelt, hvor der til hvert punkt i rummet til enhver tid er tilknyttet en hastighedsvektor $\mathbf{u}$. Vi går ud fra, at disse hastigheder i en statistisk forstand er homogene, d.v.s. de statistiske egenskaber vedbliver at være de samme, uafhængigt af hvilke punkter i rummet analysen refererer til. Vi går ud fra, at hastighedsfeltet også er isotropt, d.v.s. at de statistiske egenskaber ikke ændres selvom vi beskriver feltet i et koordinatsystem der er drejet i forhold til det oprindelige. Disse antagelser er ensbetydende med at det turbulente hastighedsfelt ikke har noget punkt, der udmærker sig fra andre, og at det heller ikke har nogen udvalgte retninger. Dette modelsystem må naturnødvendigt være uendelig udstrakt (ellers ville det i høj grad betyde noget om man udfører analyse inde i eller udenfor systemet!) og vi kan da ikke have nogen længdeskala L , som karakteriserer systemets størrelse på samme måde som i Reynolds eksperiment. Da der ikke er nogen udvalgt retning, har

vi heller ikke nogen middelstrømningshastighed i mediet. Dette sidste er dog kun en formel begrænsning, man har lov til at ændre beskrivelsen til et referencesystem, der følger med en fast strømningshastighed. Det bør nok fremhæves, at det her beskrevne system er yderst idealiseret, og ikke kan realiseres eksakt i noget laboratorieeksperiment, men det er et, som vi skal se, interessant tankeeksperiment. Man kan vel sige, at hvis ikke engang denne idealiserede situation kan forstås og beskrives, så skal vi heller ikke gøre os forhåbninger ved mere realistiske forhold. Strømningen vist i figur 1 opfylder tydeligvis ikke disse idealiserede forudsætninger, men et begrænset område til højre i billedet *kan* måske betragtes som lokalt homogent.

Vi ønsker nu at finde matematiske udtryk for relevante statistiske middelværdier i det førnævnte idealiserede turbulente hastighedsfelt. For en ordens skyld må vi vel gøre klart hvad vi egentlig mener med en statistisk middeværdi i denne forbindelse; det antages at vi, i det mindste i princippet, har et meget stort, helst uendelig stort, antal uafhængige eksperimentelle observationer til rådighed. Vi kalder dette et ensemble af realisationer, og går ud fra, at de alle er karakteriserede af de samme *ydre* parametre. Disse parametre er væskens kinematiske viskositet ν og den gennemsnitlige energidissipation i hastighedsfluktuationerne. Endelig antages det, at systemet er tidsstationært i en statistisk forstand; ligegyldigt hvilket tidspunkt vi vælger at tage middelværdier over ensemblet, får vi det samme resultat; tidsaksen har ikke noget udvalgt begyndelsespunkt. Dette kræver implicit, at hastighedsfeltet har eksisteret uendelig længe, hvilket igen er en kraftig idealisering, men det er dog let at forestille sig et system, der har nået en statistisk ligevægt. I det omfang vi kun ser på tider efter at denne ligevægt er nået, så er fejlen ved en stationaritets-antagelse nok ikke så stor.

Antag, at der konstant tilføres energi til systemet ved bevægelse på store skalaer (ved "omrøring" på en ikke nærmere specificeret måde), samt at fluktuationsniveauet er konstant i tid når det tages som gennemsnit over hele systemet. Dette betyder, at den tilførte energi balanceres af den energi, der dissiperes af viskositeten. Denne energi bliver til varme. Den dissiperede energi pr. kilogram væske pr. tidsenhed kalder vi ϵ . Det vi *ikke* har kontrol over er den måde energien fordeles sig på i detaljer; for eksempel forventes den nøjagtige position og størrelse af hvirvlerne på figur 1 at være statistisk fordelte. Vi kan vælge at tage middelværdien af hastigheden og finder med de givne antagelser at $\langle u \rangle = 0$. Tegnene $\langle \rangle$ viser at vi tager en middelværdi over det før omtalte ensemble i et udvalgt punkt. En mere interessant størrelse er hastighedens middelværdi $\langle u^2 \rangle$, som er forskellig fra 0, og med den givne antagelse om homogenitet og stationaritet er den uafhængig af, hvilket punkt og tidspunkt vi vælger at bestemme den i.

En vigtig størrelse ved beskrivelsen af et turbulent hastighedsfelt er strukturfunktionen Ψ_2 , som giver mid-

delkvadratet af hastighedsforskellen mellem to punkter

$$\Psi_2(\xi) = \langle (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r} + \xi, t))^2 \rangle. \quad (1)$$

På grund af den antagne homogenitet af hastighedsfeltet vil Ψ_2 ikke afhænge af positionsvektoren $\mathbf{r}$, og på grund af stationariteten heller ikke af tiden t . På grund af antagelsen om isotropi forventer vi, at Ψ_2 afhænger af størrelsen $|\xi|$, men ikke af vektoren ξ 's retning. selvom systemet er antaget homogent vil *hastighedsforskelle* alligevel afhænge af separations-afstanden; i to nabo-punkter med meget lille separation er hastighederne målt til samme tid *næsten* ens og dermed $\Psi_2(\xi) \approx 0$ for ξ meget lille. For større separationer er afvigelser i de to hastigheder større, og Ψ_2 bliver større.

Vi bemærker som udgangspunkt, at hastighed måles i enheden meter pr. sekund, eller, om vi frigør os fra SI enhedssystemet; længde pr. tidsenhed, som vi her blot skriver som ℓ/T . Strukturfunktionen Ψ_2 måles da i enhederne ℓ^2/T^2 . Vi noterer os nu, at enhver benævnt funktion, d.v.s. en funktion som udtrykker en størrelse, der måles med en enhed (i modsætning til et rent tal), kan skrives som et produkt af en størrelse med den korrekte enhed og en ubenævnt funktion af en (eller flere) ubenævnte(e) størrelse(r). Dette lyder måske ikke umiddelbart oplagt, men ved at lave et par prøveeksempler, kan man overbevise sig om at det er rigtigt. Det er nu oplagt, at Ψ_2 må indeholde parametrene ν og ϵ . Disse er også de eneste parametre vi har, med de givne antagelser. Enheden for kinematisk viskositet er ℓ^2/T og for ϵ er den ℓ^2/T^3 . Det kan nu let vises, at den eneste kombination af ν og ϵ som giver enheden ℓ^2/T^2 er $(\epsilon\nu)^{1/2}$.

Vi prøver nu at anvende disse betragtninger på $\Psi_2(\xi)$. For at få en dimensionsløs variabel ud fra ξ , som i sig selv måles med længdeenheden, noterer vi os at den eneste ubenævnte størrelse vi kan få ved at kombinere ξ , ν og ϵ er $\xi\epsilon^{1/4}/\nu^{3/4}$. (Læserne opfordres til selv at eftervise dette!) Vi kan derfor skrive

$$\Psi_2(\xi) = (\epsilon\nu)^{1/2} F(\xi\epsilon^{1/4}/\nu^{3/4}) \quad (2)$$

hvor F er en ubenævnt funktion, som foreløbig er ukendt. Vi bemærker nu, at viskositet kun påvirker de mindste skalastørrelser i et hastighedsfelt. Dette er i overensstemmelse med vore daglige iagttagelser, og har et matematisk grundlag i Navier–Stokes ligningen, som bruges ved den analytiske beskrivelse af væsker og gasser. Med udgangspunkt i denne antagelse venter vi, at der findes et område, hvor (2) er uafhængig af ν . For at ν skal forsvinde fra udtrykket (2) kræves det øjensynligt, at $F(\xi\epsilon^{1/4}/\nu^{3/4}) \sim (\xi\epsilon^{1/4}/\nu^{3/4})^{2/3}$ i det pågældende interval for ξ . Dette ses let. I denne grænse, forventer vi da at

$$\Psi_2(\xi) \approx C_1(\epsilon\xi)^{2/3} \quad (3)$$

hvor C_1 er en foreløbig ukendt numerisk konstant. Ubenævnte talkonstanter kan ikke bestemmes udelukkende ved diskussioner som de før anførte.

Der er oplagt grund til skepsis hvad angår (3), idet udtrykket divergerer for $\xi \rightarrow \infty$. Intuitivt ville man forvente, at for meget store separationer vil $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ og $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \xi)$ være statistisk uafhængige, hvorved

$$\Psi_2(\xi) \rightarrow 2\langle u^2 \rangle \quad \text{for} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (4)$$

i denne grænse, i modstrid med (3). Udtrykket (3) kan derfor kun forventes at være gyldigt i et begrænset interval. Vi kan antage, at der findes en karakteristisk længdeskala $\mathcal{L}_c$, som begrænser gyldigheden af (3).

Den skarpsindige læser vil nu bemærke, at så må $\mathcal{L}_c$ være en “ydre” parameter, som vi har udeladt i dimensionsanalysen, og det er rigtigt. Man kunne måske tro, at $\mathcal{L}_c$ var proportional med $\nu^{3/4}/\epsilon^{1/4}$, men denne størrelse, som kaldes Kolmogorovs længdeskala, er den karakteristiske størrelse af de *allermindste* hvirvler. $\mathcal{L}_c$ er snarere et mål for størrelsen af de *største* hvirvler. I vores tænkte uendelige system er der ikke nogen grænse for hvirvlers størrelse; men det er der selvfølgelig i et virkeligt system med en endelig størrelse. Den mekanisme, som genererer turbulensen kan også have betydning. Bruger man for eksempel et oscillerende gitter, bliver $\mathcal{L}_c$ proportional med perioden i gitteret. Normalt bliver turbulens sat i gang af bevægelser af forholdsvis store væskemængder, altså store hvirvler. De store hvirvler kolliderer med hinanden og skaber mindre hvirvler, som også kolliderer med hinanden og skaber endnu mindre hvirvler etc. Man taler derfor om en energikaskade, hvor den kinetiske energi af store hvirvler overføres til kinetisk energi af mindre og mindre hvirvler. Det er lidt på samme måde som i en skærveknuser, hvor store sten knuser hinanden og bliver til mindre sten, som igen knuser hinanden osv. Processen stopper når hvirvlerne bliver på størrelse med Kolmogorovs længdeskala og bliver her omdannet til varme. Selvom der skulle være en vis form for organisation i de største hvirvler, er det naturligt at forvente, at enhver form for orden forsvinder undervejs i energikaskaden. De mindste hvirvler er blevet vendt og drejet så mange gange, at alle retninger er blevet lige gode, og deres egenskaber er derfor isotrope. De er også blevet flyttet rundt på så mange gange, at deres egenskaber ikke kan variere ret meget fra punkt til punkt. Det eneste der bestemmer deres egenskaber er derfor selve energiomsætningen ϵ , samt viskositeten ν .

Turbulent diffusion

Udtrykket (3), og andre udtryk afledt af det, er blevet meget overbevisende bekræftet eksperimentelt for store separationsintervaller. Opmuntret af denne succes har man også interesseret sig for andre størrelser, for eksempel de mere generelle strukturfunktioner $\Psi_n \equiv \langle (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r} + \xi, t))^n \rangle$, og fundet at simple skaleringslove, som de før viste ikke længere giver resultater i overensstemmelse med observationer. Turbulente strømninger er et aktuelt og spændende forskningsområde både fra et teoretisk og fra et eksperimentelt synspunkt. Når man tager et blik over den

litteratur der findes over emnet, kan man nu alligevel godt blive lidt overrasket over den umådelige mængde af lærebøger og specialtidsskrifter. Sagen er imidlertid at turbulens har stor praktisk og økonomisk betydning i mange forskellige sammenhænge. For eksempel ville luftforurening ikke være noget problem, hvis det ikke var for turbulens i atmosfæren. Diffusion på grund af termiske bevægelser (det vi normalt kalder “Brownske bevægelser”) er en meget ineffektiv transportmekanisme. Hvis atmosfæren altid var i ro, kunne man blot feje forureningen sammen under fabriksskorstenene når det var fyraften. Et af de vigtigste egenskaber ved turbulens er, at det medfører en meget effektiv transport i atmosfæren. Dette har eksempelvis betydning ved luftbåren spredning af sygdomme specielt indenfor landbruget, samt blanding af kemisk reaktive materialer, for eksempel luft og benzindampe i forbrændingsmotorer. Det er desuden vigtigt, at tage hensyn til turbulens ved design af vinger til flyvemaskiner og vindmøller, og ved transport af olie og gas i rørledninger, etc. I det følgende skal vi illustrere turbulent transport ved et laboratorieeksperiment, og vise, hvorledes resultaterne kan have betydning i for eksempel biologiske sammenhænge.

Diffusion af enkelt-partikler

Det simpleste spørgsmål man kan stille i forbindelse med turbulent transport berører bevægelsen eller forskydningen af en enkelt partikel i en turbulent væske, hvor det antages at partiklen passivt følger med væskens bevægelse. Hvis en punktformig partikel slippes løs til tiden $t = 0$ i punktet $\mathbf{r} \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0)$, vil forskydningen i et meget kort tidsinterval være $\mathbf{r} = \mathbf{u}t$, hvor $\mathbf{u}$ er den hastighed væsken havde på partiklens position til $t = 0$. Tager vi realisationerne i ensemblet, og bestemmer middelværdien finder vi oplagt, at for disse korte tider er $\langle \mathbf{r}(t) \rangle = 0$ da $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$, men at $\langle r^2(t) \rangle \approx \langle u^2 \rangle t^2$ i et kort tidsinterval.

For store tider bliver selv dette basale problem kompliceret, og talrige forfattere har arbejdet med teorier, der kan simplificere de analytiske udtryk. For store tider, d.v.s. lang tid efter at partiklen har forladt sit udgangspunkt, er det dog muligt at give et kvalitativt udtryk for $\langle r^2(t) \rangle$. Vi kan antage, at til disse sene tidspunkter er afstanden mellem partiklens udgangsposition og den aktuelle partikel position større end størrelsen på de største hvirvler i systemet, se for eksempel figur 1. Vi kan gå ud fra, at det er disse store hvirvler, som giver de største partikelforskydninger ved konvektion; alle de små hvirvler vil blot give anledning til, at partiklen “virrer” lidt omkring. Hvis disse store hvirvler levede meget længe, for eksempel i form af store kohærente strukturer, ville de under en halv omdrejning føre partiklen langt bort fra udgangspunktet, for derefter at føre den tilbage igen. Imidlertid er levetiden for disse store hvirvler ikke stor; de overlever typisk en halv omdrejning, det man kalder en “eddy turn

over time". Det er vanskeligt at oversætte, men ordet "eddy" kan tages som synonymt med "hvirvel". Når den ene hvirvel dør ud, er en ny allerede ved at blive skabt af de turbulente fluktuationer, men dennes centrum er som regel et andet sted end den forrige hvirvels. Den nye hvirvel flytter igen på partiklen, og processen fortsætter på denne måde. Som en lidt grov illustration kan vi antage, at partiklen i løbet af en "eddy turn over time, τ_c " flytter sig en afstand $\mathcal{L}$ i en tid τ_c , men *retningen* kan være helt tilfældig. $\mathcal{L}$ repræsenterer en karakteristisk diameter af de største hvirvler. Partikelpositionens x , y og z koordinater efter n sådanne skridt kan da skrives som summen af mange sådanne forskydninger. Som en simpel illustration kan vi bruge en todimensional model (d.v.s. en partikel, der bevæger sig på et plan), og finder partiklens koordinater ved det n -te skridt som $(x_n, y_n) = \mathcal{L} \sum_{j=1}^n (\cos \theta_j, \sin \theta_j)$, hvor θ_j kan antage alle værdier i intervallet $[0, 2\pi[$ med lige stor sandsynlighed. Ethvert skridt antages statistisk uafhængigt af alle andre, d.v.s. alle θ_j antages at være statistisk uafhængige. Ved at midle over alle θ ses at $\langle \mathbf{r}_n \rangle = 0$, men at $\langle r_n^2 \rangle \equiv \langle x_n^2 + y_n^2 \rangle \approx \frac{1}{2} \mathcal{L}^2 n$. Ved at indføre tidspunktet for det n -te trin som $t = n\tau_c$ fås $\langle r^2(t) \rangle \approx \frac{1}{2} t \mathcal{L}^2 / \tau_c$. Vi kan gøre dette udtryk *lidt* mere præcist ved som størrelsesordens-betragtning at benytte, at partiklen under hvirvlens rotation flyttes med væskens lokale hastighed $\mathbf{u}$, og bruge $(\mathcal{L}/\tau_c)^2 \approx \langle u^2 \rangle$ hvilket giver $\langle r^2(t) \rangle \approx \frac{1}{2} t \langle u^2 \rangle \tau_c$. Dette resultat kan vises at være eksakt i den asymptotiske grænse for store t , såfremt τ_c fortolkes som den såkaldte Lagrangeske integraltidsskala. Det er interessant, at resultatet i denne grænse er det samme man får for en klassisk diffusionsproces, hvis vi fortolker $\mathcal{L}^2/\tau_c \approx \langle u^2 \rangle \tau_c$ som en diffusionskoefficient, hvor vi bemærker, at enheden for en sådan diffusionskoefficient er ℓ^2/T , eller *længde* $\times$ *hastighed*. Der er fundet særdeles fin overensstemmelse med en sådan diffusionsmodel ved eksperimentelle observationer af partikelbevægelse i turbulente væsker.

Relativ bevægelse af to partikler

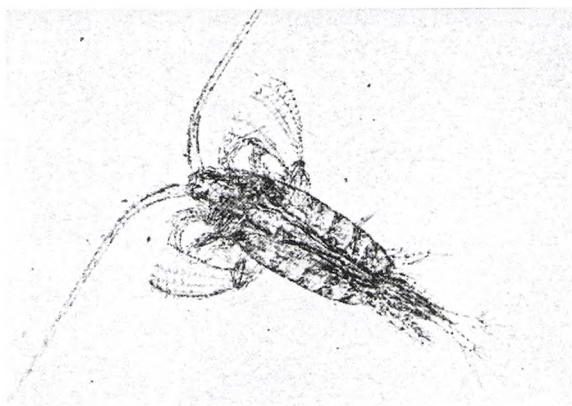
Et andet, og mindst lige så interessant statistisk problem knytter sig til beskrivelsen af den relative bevægelse af to partikler, der i udgangspunktet er separeret med en kendt afstand. I dette tilfælde kan man søge oplysning om to størrelser; de to partiklers middelposition, og desuden deres separation, begge dele som funktion af tiden. Såfremt de to partikler er langt fra hinanden vil vi forvente, at deres bevægelser er statistisk uafhængige, og problemet reduceres i princippet til det foregående en-partikel problem. Hvis partiklerne er tæt på hinanden, kan væskehastighederne på deres to positioner ikke med rimelighed antages at være uafhængige; partiklernes bevægelser siges at være *korrelerede*.

Opmuntret af succesen af en diffusionsmodel for en-partikelbevægelsen kunne man nu fristes til også at søge en model for den relative bevægelse mellem to partikler. Vi forsøger igen at finde udtryk for en karakteristisk

længdeskala og en karakteristisk hastighed. Hvad hastigheden angår er valget let; det bør være den relative partikelhastighed, som vi introducerede i (1). Med de givne forudsætninger er det simpleste udtryk for en karakteristisk hastighed mellem de to partikler $\mathcal{U} \approx \sqrt{\Psi_2(\xi)} \sim (\epsilon \xi)^{1/3}$. Hvad angår en karakteristisk afstand må vi se på de hvirvler, der har betydning for den relative bevægelse. Den mest effektive separationsmekanisme vil opstå i den situation, hvor de to partikler befinder sig på hver sin hvirvel. Meget små hvirvler, meget mindre end partikelseparationen ξ , vil også her blot give anledning til en "virren" af partikler i forhold til hinanden, og ikke bidrage nævneværdigt til deres separation. Sandsynligheden for at finde partiklerne med én hver på to meget store hvirvler (store i forhold til partikel separationen) med diameter $\mathcal{D}$, som ligger "kant mod kant", kan estimeres som forholdet $\xi/\mathcal{D}$, på nær en talkonstant, som ikke er meget forskellig fra 1. Sandsynligheden for at begge partikler er på samme store hvirvel er tilnærmet $(\mathcal{D} - \xi)/\mathcal{D} \gg \xi/\mathcal{D}$. Vi kan da med stor rimelighed gå ud fra at så længe vi begrænser os til at diskutere hvirvler med størrelse $\mathcal{D} \gg \xi$, så vil begge partikler mest sandsynligt befinde sig i samme hvirvel. En stor hvirvel vil imidlertid ikke gøre andet end at flytte de to partikler mere eller mindre parallelt, og bidrager derfor ikke til deres separation. Den mest effektive spredningsmekanisme vil skyldes hvirvler, som er tilnærmet af størrelsen ξ . For en givet partikelseparation er den karakteristiske størrelse $\mathcal{L}$ for de "effektive" hvirvler altså separationen selv, d.v.s. ξ . For partikler der i begyndelsen var nær hinanden, sker forskydningen i begyndelsen med små skridt. Når afstanden øges, bliver større og større hvirvler effektive ved separationen, og forøgelsen af partikelafstanden accelererer. Dette sker dog ikke direkte proportionalt med partikelseparationen, idet "eddy turn over time" for de større hvirvler er større end for små; vi kan bruge estimatet $t \sim \xi/\mathcal{U} \sim \xi^{2/3}/\epsilon^{1/3}$, hvor $\mathcal{U}$ er introduceret tidligere. Hvis vi forestiller os partikelseparationen på et sent tidspunkt som resultatet af mange enkelte skridt, er det sidste skridt større end alle de foregående, og også det der tager den længste tid. Igen kan vi, som et estimat, bruge den forrige størrelsesordens-betragtning og får relationen mellem middeltidspunktet af partikelafstanden og tidsvariablen til at være $\langle \xi^2 \rangle \sim \epsilon t^3$. Denne relation kendes som *Richardson's lov*, og har været eftervist eksperimentelt med stor nøjagtighed i et betydeligt tidsinterval.

Det er let at forestille sig sammenhænge, hvor det er relativ diffusion mellem to partikler, som er den fysisk relevante problemstilling, og ikke den *absolutte* diffusion. I biologisk sammenhæng kan vi for eksempel forestille os fødeprocessen for fiskelarver, der typisk lever af plankton [2]. I dette tilfælde er både "byttet" og fiskelarven karakteriseret ved at have en negligerbar egenbevægelse. Dette betyder at en fiskelarve, eller anden tilsvarende organisme der befinder sig i stille vand, hurtigt vil tømme sit "nærområde" for bytte, og derefter

vil sulte. Hvis der er en jævn, laminar, strømning i vandet ændrer dette selvfølgelig ingenting, idet både bytte og fiskelarve føres med vandet, uden at de relative afstande ændres. Hvis strømmingen bliver turbulent er sagen imidlertid en anden. Somme tider fjerner de to sig fra hinanden, andre gange nærmer de sig, og ind imellem kommer byttet nær nok på fiskelarven til at det kan blive indfanget. Et vigtigt spørgsmål er i denne forbindelse, hvor meget bytte pr. sekund en fiskelarve kan indfange for givne turbulensparametre og koncentration af bytte i det omgivende vand. Argumenterne er selvfølgelig de samme for en mængde småorganismer, hvor vi i figur 2 viser et illustrativt eksemplar.

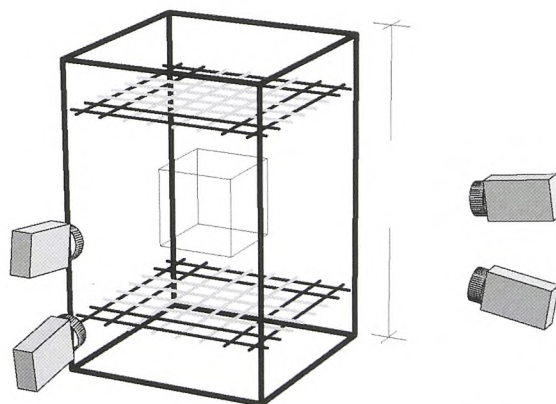


Figur 2. “*Centropages violaceus*”, en planktonisk marin copepod. I nogle forbindelser optræder den som byttedyr, i andre (overfor alger og lignende) som “rovdyr” [2].

Eksperimentelle observationer

På grund af blandt andet den store opmærksomhed omkring forureningstransport i atmosfæren, er der udført mange eksperimentelle undersøgelser af turbulent diffusion. I det følgende skal vi kort omtale et mindre laboratorieeksperiment, som er opstillet specielt med henblik på at studere relativ partikelbevægelse [3]. Eksperimentet er skitseret i figur 3. Ved at bevæge de to plastikgitre i tankens bund og top (typiske frekvenser for bevægelsen er 1–3 Hz) skabes et kontrolleret og reproducerbart turbulens-niveau i kammeret. Små plastikugler med diameter 0.5–0.6 mm og samme vægtfylde som vand opslemmes i beholderen, og deres trajektorier følges med 4 videokameraer, som vist på figur 3. Et billede eksponeres hver 1/25 s, med et stroboskop, der er synkroniseret med videokameraerne. (For de særligt interesserede kan det nævnes, at stroboskopet stammer fra et diskotek). Man har altså adgang til partiklernes position 25 gange pr. s, og kan derefter udregne deres hastighed med stor nøjagtighed. Vi kan gå ud fra, at partiklerne passivt følger med vandets bevægelse, og målingen giver derved også *vandets* lokale hastighed. I et eksperiment følges omtrent 1000 partiklers baner samtidigt i op til 40 s. Mange trajektorier er dog kortere, da det ikke altid er muligt entydigt at forbinde partikelbaner, hvis der lokalt sker et stort

“spring” på steder med lokalt store hastighedsfluktuationer. I figur 4 vises en trajektorie for en enkelt udvalgt partikel. Typiske partikelhastigheder er 15 mm/s.

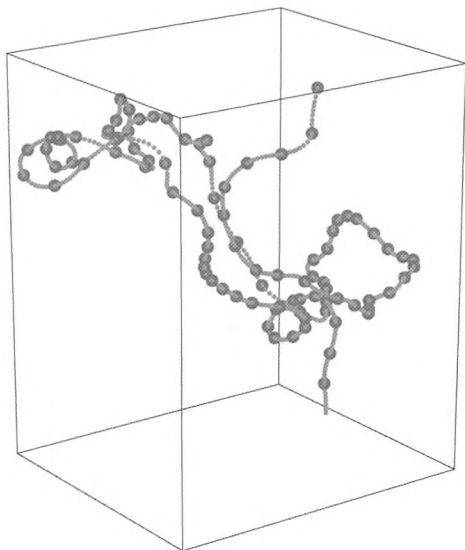


Figur 3. Skematisk præsentation af et laboratorie-eksperiment, hvor et turbulent hastighedsfelt i vand genereres ved to bevægelige gitre i eksperimentets bund og top [3]. Banerne af små plastikugler kan følges ved 4 videokameraer, hvor positioner bestemmes indenfor det markerede delvolumen midt i eksperimentet. Kammerets indre mål er $32 \times 32 \times 45 \text{ cm}^3$.

Idet vi med god nøjagtighed kan antage, at en partikels hastighed repræsenterer væskens hastighed på partiklens position, er det muligt at opnå en ganske detaljeret statistisk beskrivelse af den turbulente strømnings karakteristiske parametre. I figur 5 vises for eksempel en eksperimentelt bestemt anden ordens strukturfunktion, $\Psi_2(\xi)$. Den fuldt optrukne kurve er det analytiske resultat (3). For små separationsafstande, ξ , ses overensstemmelsen at være god. Vi kan trygt gå ud fra, at turbulensen i det givne eksperiment i et rimeligt stort længde interval *virkelig* følger en universel hastighedsfordeling.

I eksperimentet er det også muligt at udføre detaljerede undersøgelser af turbulent diffusion. Her skal vi diskutere en proces, som har relation til det problem der blev omtalt sidst i forrige afsnit. Vi ønsker at estimere den turbulente fluks af for eksempel plankton til en fiskelarve, og vil vise, at eksperimentet diskuteret her kan bidrage til at belyse også dette og lignende spørgsmål. Fra eksperimentet har vi som nævnt samtidige observationer af op til 1000 partikler. Vi kan nu vælge én af dem til at være fiskelarve med en valgt rækkevidde $\mathcal{R}$, og alle de andre til at være bytte [4]. Lige så snart byttet er indenfor en afstand $\mathcal{R}$, lader vi det blive “spist” d.v.s. vi fjerner det fra databasen. Vi har nu en konkurrence mellem to effekter; på den ene side bliver larvens nærområde tømt for bytte fordi de bliver indfanget, på den anden side tilføres der hele tiden mere bytte på grund af den turbulente “omrøring”. Denne konkurrence illustreres ved at tælle antallet af bytte som indfanges pr. sekund, d.v.s. fluksen af bytte. Hvis vi kun udfører den her skitserede analyse én gang, er kurven meget uregelmæssig, men med den store datamængde der er til rådighed kan man udnævne

mange af polystyrenkuglerne til at være fiskelarver, og tage middelværdien af de mange flukskurver og på den måde få en god statistik. I det allerførste tidsinterval er tætheden af bytte størst, og vi forventer, at der indfanges mest bytte der, hvorefter flukskurven vil aftage for eventuelt at nærme sig en stationær værdi. I figur 6 viser vi eksempler på eksperimentelt bestemte flukskurver for tre forskellige værdier af $\mathcal{R}$.



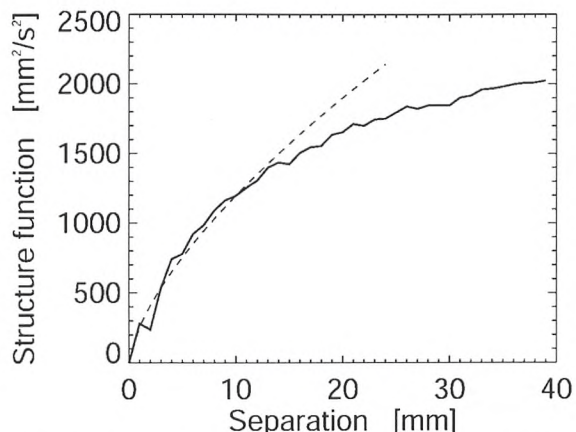
Figur 4. Banen af en udvalgt partikel. De små cirkler er partikel positionen bestemt ved hjælp af stroboskopet, og den optrukne linie er den numerisk interpolerede bane, eller trajektorie.

Igen ved brug af skalaargumenter kan vi opstille et analytisk udtryk for parametervariationen af den turbulente fluks til en kugle med radius $\mathcal{R}$. En partikel-fluks måles i enheden *tæthed* $\times$ *hastighed* $\times$ *areal*, som giver antal partikler pr. tidsenhed. Tætheden er her selvfølgelig tætheden af bytte i vandet, og vi kan lige så godt bruge en referencetæthed på for eksempel 1 partikel pr. mm^3 . Den relevante hastighed er igen den relative hastighed givet ved (3), udregnet ved fiskelarvens rækkevidde $\xi = \mathcal{R}$, mens det relevante areal er overfladen af den kugle som fiskelarven kan tømme for bytte, $4\pi\mathcal{R}^2$. Vi søger igen en ubenævnt funktion af en ubenævnt variabel. Den eneste ubenævnte variabel vi kan konstruere ud fra tiden, t , samt ϵ og $\mathcal{R}$, er $t\epsilon^{1/3}/\mathcal{R}^{2/3}$. Den normerede fluks måles i enheden *længde*³/*tid*, og ud fra $\mathcal{R}$ og ϵ kan vi kun danne én anvendelig kombination, nemlig $\epsilon^{1/3}\mathcal{R}^{7/3}$. Her har vi antaget, at $\mathcal{R}$ er større end de mindste turbulenshvirvler, så viskositeten ν indgår ikke. For den normerede turbulente fluks, $J(t)$, af bytte til en fiskelarve med rækkevidde $\mathcal{R}$ har vi altså

$$J(t) = \epsilon^{1/3}\mathcal{R}^{7/3} f(t\epsilon^{1/3}/\mathcal{R}^{2/3}), \quad (5)$$

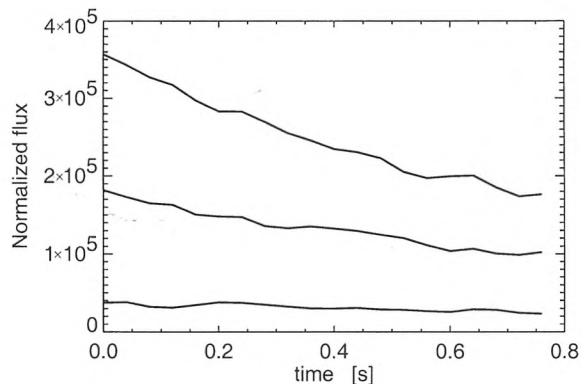
hvor f en universel, ubenævnt, funktion af en ubenævnt variabel. Vi kan forvente, at $J(t)$ efter nogen tid når en

ligevægt, hvor der er balance mellem det spiste bytte og det der tilføres ved den turbulente bevægelse i væsken. I denne grænse er funktionen f konstant, i overensstemmelse med for eksempel figur 6. Når J kan antages konstant, er skaleringen med parametrene ϵ og $\mathcal{R}$ alene givet gennem koefficienten $\epsilon^{1/3}\mathcal{R}^{7/3}$ i (5), igen på nær en numerisk koefficient [5, 6].



Figur 5. Eksperimentelt bestemt anden ordens strukturfunktion, $\Psi_2(\xi)$. Den punkterede kurve viser resultatet (3).

Vi kan teste parametervariationen af udtrykket (5) ved at udføre data-analysen for flere værdier af $\mathcal{R}$, og finder resultatet vist i figur 7, hvor vi med cirkler viser partikelfluksens værdi til et sent tidspunkt (ca. 0.8 s). For små værdier af $\mathcal{R}$, er overensstemmelsen med (5) ganske overbevisende. Bemærk at overensstemmelsen er bedst for de længdeskalaer, hvor (3) er en god tilpasning til den eksperimentalt fundne anden ordens strukturfunktion, se figur 5. Ved at udføre eksperimentet med forskellige turbulens niveauer, d.v.s. andre værdier for ϵ , kan vi på samme måde analysere variationen med ϵ -parameteren. Også i dette tilfælde er overensstemmelsen rimelig god, omend ikke helt så overbevisende som for parameteren $\mathcal{R}$.

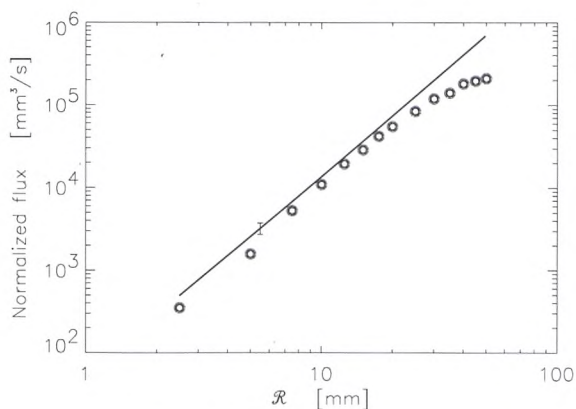


Figur 6. Eksperimentelt bestemt fluks af bytte til en "fiskelarve" for tre forskellige rækkevidder, $\mathcal{R}$.

Analysen beskrevet før kan let gentages for en "fiskelarve" forankret i en fast position, ved simpelthen at bestemme partikelfluksen til en kugle med givet

centrum. Man finder da, for små $\mathcal{R}$, at denne partikelflukt faktisk er større end den man finder for det passivt konvekterede tilfælde. De to flukse er først sammenlignelige, når $\mathcal{R}$ er af samme størrelsesorden som de største hvirvler i den turbulente bevægelse. Dette bekræfter den intuitive forventning, at små organismer i et fast punkt kan drage nytte af *enhver* bevægelse i vandet. I dette tilfælde får de tilført føde selv ved en homogen strømning, som ikke giver anledning til forandring af de relative afstande mellem partikler, der følger med i vandets bevægelse. Ud fra *dette* synspunkt ville det således egentlig være en fordel for mikroorganismer at være forankret i et fast punkt i vandet. Dette ser man sjældent, og det må da antages, at der er andre, mere tungtvejende, fordele ved at flyde med strømmen. Det er foreslået, at de på denne måde undgår at blive spist af deres forældre(!) men får til gengæld lidt større problemer med at skaffe føde.

Det er også muligt på en simpel måde at indbygge for eksempel en "reaktionsevne" for fiskelarverne i analysen. Vi kan, som eksempel, forlange, at byttet er indenfor rækkevidde i mere end et bestemt tidsinterval før vi lader det blive indfanget og spist. Det viser sig påfaldende nok, at dette egentlig ikke har nogen dramatisk effekt. Forklaringen er antageligt, at for store rækkevidder, vil der komme så meget bytte indenfor rækkevidde, at det ikke betyder noget videre om nogle af dem forsvinder for hurtigt til at blive indfanget. For korte rækkevidder vil variationen af hastighedsfeltet indenfor $\mathcal{R}$ på den anden side være moderat, således at det meste af det bytte, der måtte være, som oftest har en lille relativ hastighed i forhold til fiskelarven, og derfor har en stor sandsynlighed for at blive indfanget.



Figur 7. Variationen af fluksen J ved et bestemt tidspunkt, her $t = 0.8$ s, for flere værdier af rækkevidden $\mathcal{R}$. Den fuldt optrukne linie er resultatet fra (5), hvor en numerisk koefficient er bestemt på anden måde, med usikkerheden angivet ved den lille lodrette streg.

Konklusion

Studier af turbulens byder stadig på nye udfordringer, og uventede problemstillinger. Dette delområde af klassisk fysik har vist sig at være af stor betyd-

ning for mangeartede praktiske problemer i forbindelse med, for eksempel, studier af forurening i atmosfæren og oceanerne, samt praktisk udnyttelse af vindenergi. Væsentlige indsatsområder er studier af turbulens under inhomogene forhold, ved meteorologiske grænselag. En forståelse af inhomogene turbulente strømninger er afgørende for at optimere placeringen af en vindmølle. Denne type problemer studeres ofte eksperimentelt. Imidlertid er der selv for homogen isotrop turbulens uafklarede problemer; i diskussionen i afsnittet om analytiske betragtninger blev det stiltiende antaget, at ϵ var en konstant, som i princippet kan antages kendt. I virkeligheden er ϵ en statistisk varierende størrelse. I nogle områder er turbulensintensiteten stor, andre steder mindre. Det er kun *middelværdien* $\langle \epsilon \rangle$ vi kan antage kendt. En konsekvens af dette problem er, at skaleringen af højere ordens strukturfunktioner $\Psi_n(\xi) = \langle (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r} + \xi, t))^n \rangle$, $n \geq 2$ ikke følger den simple lov $\Psi_n(\xi) \sim (\epsilon \xi)^{n/3}$ som argumenterne i forbindelse med (3) ellers kunne indbyde til (selvom afvigelserne dog ikke kan siges at være dramatiske). Generaliseringen af udtryk som (3) med hensyntagen til fluktuationerne i ϵ optog allerede Kolmogorov, og dette såkaldte *intermittensproblem* har endnu ikke fundet sin endelige afklaring. Også forholdene omkring de mindste skalastørrelser, dér hvor dissipationen har betydning, er kun delvis afklarede. Eksperimentet illustreret i figur 3 bliver nu opgraderet med henblik på detaljerede studier også af disse forhold.

Kolmogorovs arbejder fra 1941 var, som sagt, de første skridt mod en teoretisk forståelse af turbulens. På trods af dette tidlige arbejde, mangler vi i dag en sammenhængende fysisk teori for turbulens. For eksempel findes der ikke en teoretisk metode som leder til en korrekt bestemmelse af konstanten C i ligning (3). Det samme gælder for andre konstanter, der indgår i lignende relationer, som man kan udlede ved hjælp af dimensionsanalyse. Som sagerne står, må alle disse konstanter bestemmes eksperimentelt hver for sig.

Vi har ovenfor argumenteret for, at de mindste skalaer i turbulens er isotrope. Det samme gjorde Kolmogorov for 60 år siden, og denne antagelse er en af grundpillerne i beskrivelsen af turbulens. En mængde eksperimenter, senest nogle foretaget ved Cornell Universitetet, udfordrer denne antagelse, og noget tyder på, at anisotropi faktisk *kan* overleve energikaskaden. Det betyder at vi må give afkald på forestillingen om at de mindste hvirvler har universelle egenskaber. Turbulens byder på mange helt fundamentale udfordringer.

I denne artikel har vi beskrevet anvendelsen af relativ turbulent diffusion på et marinbiologisk problem med den tankevækkende konklusion, at turbulens tilsyneladende er af afgørende betydning for denne del af fødekæden. Oceanografi, atmosfærefysik og astrofysik er eksempler på andre fagområder, hvor turbulens spiller en stor rolle. Turbulens har desuden betydning for en række praktiske og tekniske problemer, for eksempel indenfor den hurtigt voksende

vindmølleindustri. Der er derfor ingen tvivl om, at der også fremover vil være efterspørgsel på viden om turbulentens.

Referencer:

- [1] H. Tennekes og J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, MIT-press (1972).
- [2] T. G. Nielsen og P. J. Hansen, *Dyreplankton i Danske Farvande*, Tema-rapport fra DMU. No. 28 (1999).
- [3] S. Ott og J. Mann, *J. Fluid Mech.*, **422**, 207 (2000).
- [4] J. Mann, S. Ott, H.L. Pécseli, og J. Trulsen, *Phys. Rev. E*, **65**, 26304/1-4 (2002).
- [5] T. Kjørboe og E. Saiz, *Mar. Ecol. Prog. Ser.*, **122**, 135 (1995).
- [6] T. Osborn, *J. Plankton Res.*, **18**, 185 (1996).



Forfatterne fra venstre mod højre: Søren Ott og Jakob Mann er seniorforskere ved Afdelingen for Vindenergi, Forskningscenter Risø. Hans Pécseli er professor ved Fysisk Institut, Universitetet i Oslo. Maria Pécseli er biolog, uddannet ved Universitetet i Århus, og p.t. på DMU, Roskilde.



Jan Trulsen er professor ved Institut for Teoretisk Astrofysik, Universitetet i Oslo.

Læserbrev

Hr. redaktør.

I KVANT for december 1999 fik vi endelig en artikel om kvante-teleportation, og efter en halv snes gennemlæsninger i de forløbne år blev det meget hurtigt klart, at det her drejede sig om stof for specialister snarere end for opvakte gymnasiaster (disse bør jo i øvrigt passe deres arbejde).

Selv er jeg på ingen måde specialist, men enhver har jo *sine* fortrin, og blandt disse er ikke-specialistens som bekendt *bedreviden* (*melior sciens*). Ud over denne anser jeg mig egentlig ikke for i større grad at være mere kompetent end andre, men mener blot, at det nok kunne være på sin plads at rette et par misforståelser hos de unge mennesker, så deres læsere undgår de samme.

Straks ved artiklens begyndelse får vi at vide, at ordet "teleportation" betyder at flytte noget ved tankens kraft. Dette synes mig at være en noget søgt symbolik i betragtning af, at det jo er den måde, vi alle flytter os på til daglig. Hvorfor ikke bare kalde benzin for benzin??

I den omhandlede artikel bruges udtrykket imidlertid om at flytte et objekt ved at flytte den information, som beskriver det. Dette er – får vi at vide – trivielt på et *makroskopisk* plan, hvorfor fåret Dolly kunne klones, medens det, efter det såkaldte *ikke-kloningsprincip*, ikke kan klones mikrofysisk. Man synes her som en slags parallel til Schrødingers halvdøde kat at have fået et halvklonet får, som mangler sin mikrofysik. Man må jo derfor retfærdigvis vente at se det stakkels dyr færdigklonet ved artiklens teleportation og skuffes betragteligt, da det viser sig, at det kun er en laserstråle, man vil flytte. Viel Geschrei und wenig Dolly!!! En sådan "laser faire" (fransk: udtales læsé fær, dvs. opgiven af ævret) må jo støde den kvalificerede læser.

Nu foregår teleporteringen i stedet ved hjælp af en noget "firkantet" opstilling, idet "Alice" nemlig under anvendelse af *kvadratur* sender sorteper videre til de sagesløse "Bob" og "Victor", som modtager den med større eller mindre "fidelitet", alt efter, hvor troværdig de finder den.

Ak ja. Igen denne moderne hang til overflødig high-tech. *Kvadratur!* Havde det så endda kun været rektangulært. Men hvad er der galt med et ganske almindeligt *rundt* ur? Der er forhandlere nok: En kort rundtur, og man har et rundt ur – eller for den sags skyld så mange, det skal være. Til overflod forekommer der også sidst i artiklen et "apparat", hvis ydelse dog må forbedres for at realisere det. Om det er rundt eller firkantet afsløres ikke.

At det hele så sker efter et princip som "ikke lokalitet" er for så vidt forståeligt, som man jo dårligt kan flytte noget uden at det skifter opholdssted, men at det også skal være nødvendigt at opgive det gode danske "non locality", som alle andre bruger, er mindre forståeligt.

Det siger noget om hele kvaliteten, at man som referencer anvender de tre kendte kvantekværlanter Einstein, Podolsky og Rosen – skønt Bohr jo for længst har diskvantificeret disse.

Idet jeg håber med dette indlæg at have bidraget til en mere afbalanceret forståelse af disse vanskelige emner hos den intelligente del af læserne, er jeg med venlig hilsen

Deres ærbødige

A. K. Selbo

Doctor mel. scient.

Selskabet for Naturlovenes Udbedring.