

Hvordan beregnede Newton centripetalaccelerationen i månens bane ?

Tom Bøgeskov

Principia Mathematica

Isaac Newtons (1642-1727) "Principia"¹ er uden tvivl det mest indflydelsesrige værk nogensinde i naturvidenskabernes historie.

For det første udgør Principia ikke blot den første store syntese, men tillige en omfattende videreudvikling af den nye fysik, der havde fået sit videnskabelige gennembrud med Galilei (1564-1642) i den første halvdel af 1600-tallet. Med tidens nye bevægelsesbegreb, inertialbevægelsen (dvs bevægelse under inertiens lov), som alment princip for al bevægelse i universet slog Principia den første solide bro over fortidens svælg mellem den jordiske og den himmelske fysik, som her blev forenede under fælles mekaniske bevægelseslove.

For det andet lykkedes det Newton at frembringe principper og erkendelser af en sådan holdbarhed, at de kom til at udgøre grundlaget for de næste 200 års fysik, i hele "den klassiske mekaniks" epoke.

Når Newton overhovedet formåede at gennemføre en præstation af dette omfang, så var en af de afgørende forudsætninger hans umådelige matematiske begavelse, som også kom til udtryk i frembringelse af infinitesimalregningen, der i eftertiden har været et uundværligt redskab for den matematiske naturbeskrivelse. Det kan nok på denne baggrund undre, at Newton i Principia kun enkelte steder selv benytter differential- og integralregningens sprog. De fysiske relationer og erkendelser kommer ikke til udtryk i analytiske funktioner og differentialligningers symbolsprog, men i verbalt formulerede fysiske begreber og syntetisk geometriske proportioner. En del af forklaringen herpå er vel den enkle, at skulle han gøre sig håb om at blive forstået ud over en meget snæver kreds, så måtte han formulere sig i det sprog, som var almindeligt anvendt i samtiden.

Ikke desto mindre krævede store dele af det behandlede stof en praktisk inddragelse af grundlæggende ideer fra infinitesimalregningen, først og fremmest anvendelsen af grænseværdibetragtninger, hvilket medførte en ganske betydelig raffinering af det geometriske sprog og dets udtryksmuligheder i forhold til det sprog, vi møder hos Newtons forgængere, fx Galilei og Christiaan Huygens (1629-1695)².

Indholdet i Principia

Principia er opdelt i en indledning og 3 "bøger".

Indledningen indeholder først en række *definitioner* af fysiske begreber: masse, bevægelsesmængde (impuls), "iboende kraft" (dvs inertie = modstand mod acceleration), "indpræget" eller bevægende kraft, centripetalkraft

og acceleration, hvortil kommer en diskussion af begreberne absolut rum og absolut tid samt af absolut og relativ bevægelse. Dernæst følger "axiomer eller bevægelseslove". Det er *de tre Newtonske love*, hvoraf han umiddelbart udleder bla superpositionsprincippet for kræfter ("kræfternes parallelogram") og sætningen om impulsbevarelse for et isoleret system.

1. bog udleder en lang række almene love for bevægelser, specielt under indflydelse af centralkræfter. Her bevises Keplers 2. lov for planetbevægelse (loven om konstant arealhastighed). Her analyseres bevægelse i forskellige banetyper, hovedsageligt keglesnit. For et legeme, der bevæger sig i en ellipsebane, viser Newton det helt afgørende, at centripetalkraften, rettet mod ellipsens ene brændpunkt, er omvendt proportional med kvadratet på afstanden, samt at dette er konsistent med Keplers 3. lov (som relaterer omløbstiden til ellipsens storakse). Det er også her det vises, at massetiltrækningen fra en homogen kugle virker, som om hele kuglens masse er koncentreret i dens centrum, et bevis, der udgør en helt afgørende forudsætning for at generalisere partikeldynamikken til de udstrakte legemer i fx solsystemet.

2. bog, der historisk har vist sig mindre holdbar end de øvrige, behandler legemers bevægelse i medier med gnidningsmodstand og forskellige hydromekaniske spørgsmål. Newton retter her et tilintetgørende slag mod den i samtiden bredt accepterede "hvirvelteori" for solsystemet, som var fremsat af Descartes. Netop undergravningen af tilliden til Descartes' teori var en væsentlig forudsætning for Newtons egen gennemslagskraft³.

I Principias *3. bog* anvendes den i *1. bog* udviklede partikeldynamik på solsystemet. Med indholdet af Keplers 2. og 3. lov som empirisk grundlag udledes, at planeter, satellitter og kometer holdes i deres baner af en centripetalkraft, der er rettet mod et centrallegemes centrum, og at denne kraft er omvendt proportional med kvadratet på afstanden fra dette centrum.

Med den yderligere bestemmelse af kraftens proportionalitet med massen når vi til den Newtonske fysiks mesterstykke, det generaliserede princip om *den universelle gravitation*: alle masser tiltrækker hinanden med en kraft, der er proportional med produktet af masserne og omvendt proportional med kvadratet på afstanden. Af speciel interesse - også med henblik på denne artikels betragtninger over månens bevægelse - er det, at også afvigelser fra Kepler-bevægelsen (perturbationer) ifølge Newton lader sig forklare ud fra gravitationsloven.

3. bog indeholder endvidere en tidevandsteori og en teori for Jordens fladtrykning ved polerne samt for tyng-

Transpector søger personlig computer

Transpector er et ny, prisbilligt, højeffektivt og kompakt massespektrometer til gasanalyse, processtyring og læksøgning.

Systemets elektronik og målehoved er en kompakt enhed, mens processtyring og dataregistrering går via PC, Leybold leverer naturligvis passende software.

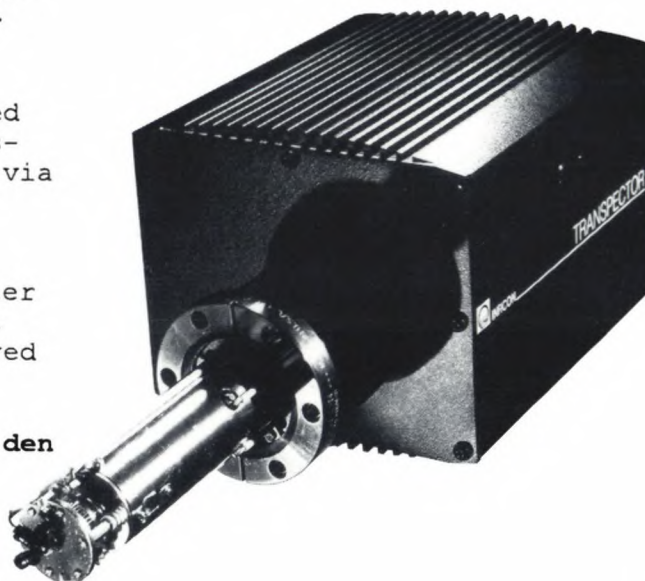
Der findes 7 forskellige varianter af Transpector, bl.a. en kompakt version (0-100Amu med FC målehoved for omkring kr. 40.000,-

Transpector - til enhver opgave den rigtige løsning.

Spørg efter vor skræddersyede Transpector version

LEYBOLD ApS

Roskildevej 342A, 2630 Tåstrup
Tlf.: 43996444



dens variation med breddegraden.

Stoffet i de tre bøger er ordnet i en række *propositioner*, hvoraf der er to typer: dels problem-sætninger, der stiller bestemte opgaver til løsning, dels de egentlige læresætninger, *teoremerne*. Propositionerne følges hypotetisk af *corollarier*, dvs umiddelbare følgeslutninger. Undervejs findes tillige en række *lemmaer* (hjælpesætninger), overvejende af matematisk art.

Månens fald mod Jorden

Vi skal i det følgende blot beskæftige os med en lille detalje i det omfattende værk, nemlig Newtons beregning af centripetalaccelerationen i månebanen.

Newton opfattede Månens bevægelse som en inertialbevægelse, der er genstand for en afvigelse pga massetiltrækningen fra Jorden. Det er altså Jordens tiltrækning, der - som centripetalkraft - holder Månen i dens bane og dermed forhindrer den i at forsvinde ud i rummet ad en ret linie.

Da nu kraften og dens virkning er proportionale, og da denne virkning er Månens acceleration, så kan Newton søge et mål for centripetalaccelerationen gennem en bestemmelse af den vejlængde, som Månen i korte tidsintervaller "falder" imod Jorden.

Allerede i følgeslutningerne til principias 1. teorem

leverer Newton den almene forskrift for beregning af faldvejen ved en sådan centripetalkraftbetinget afvigelse fra inertialbevægelsen. Konklusionen lyder:

De kræfter, som bevirker, at legemer i et modstandsløst rum trækkes bort fra retlinede bevægelser for i stedet at bevæge sig ad krumme baner, forholder sig til hinanden som sinus versus til de buer, der gennemløbes i samme tider; disse sinus versus er rettede mod kraftcentret og halverer korderne, hvor disse buer formindskes i det uendelige" [1, side 42].

Det trigonometriske begreb "sinus versus" er stort set ukendt i dansk matematisk tradition, men figurerer stadig i den angelsaksiske verden under betegnelsen "versed sine". sinus versus til Θ defineres som $1 - \cos \Theta$. Når Newton taler om sinus versus til en bue, der gennemløbes i et bestemt tidsinterval t , mener han i virkeligheden længder, der kan bestemmes som $R(1 - \cos \omega t)$.

Vi skal senere se at at Newtons sinus versus til en bue er et mål for Månens afvigelse fra den retlinede inertialbevægelse og kan beregnes, hvis blot Månens omløbstid og afstand fra Jordcentret er kendte.

Tyngdekraften

Det er i 3. bogs teorem IV [1, side 407f], vi finder Newtons værdi for Månens fald og de grundlæggende, men

dermed også kun nødtørftige, anvisninger for beregningen af denne værdi. Han skriver:

"hvis vi nu forestiller os Månen frigjort fra og frataget al bevægelse, således at den falder mod Jorden under indvirkning af hele den kraft, der holder den i dens bane, så vil den på 1 minut falde $15\frac{1}{12}$ pariserfod⁴. Dette resultat får jeg ved en beregning, der er baseret enten på proposition XXXVI i bog 1, eller (hvilket giver det samme) på corollarium IX, proposition IV i samme bog. For sinus versus til den bue, som Månen med sin middelhastighed gennemløber på 1 minut i en afstand af 60 jordradier, er ca. $15\frac{1}{12}$ fod [1, side 408]."

Så vidt er teksten i Principais 3 udgaver den samme. Men 3. udgaven (1726) tilføjer: *"eller mere præcist 15 fod, 1 tomme og $1\frac{4}{9}$ linie."*

Nu er hovedpointen i dette berømte måneteorem, at netop fordi Jordens tyngdekraft aftager med kvadratet på afstanden fra Jordens centrum, og Jord-Måne afstanden er 60 jordradier, så vil et legeme ved jordoverfladen falde den samme længde på 1 sekund (I et homogent gravitationsfelt med tyngdeaccelerationen g er faldvejen $s = \frac{1}{2}gt^2$, i tiden t . I Månens afstand er tyngdeaccelerationen fra Jorden $g/60^2$). Huygens beregner faldlængden i 1 sekund ved jordoverfladen til "meget nær 15 fod og 1 tomme" [5, side 171], og derfor er (og nu kommer Newtons hovedpointe) den kraft, der holder Månen i dens bane, den samme, som får legemer til at falde her på Jorden, nemlig tyngdekraften.

I Principias 3. udgave, hvor Newton angiver en mere præcis faldlængde for Månen, må der imidlertid have været brug for en mere nøjagtig værdi for tyngdekraften end den omtrentlige værdi, som Huygens eksplicit anfører i sit værk om penduluret. Også her støtter Newton sig til Huygens, idet denne i samme værk [5, side 168] tillige angiver sin måling af sekundpendulets længde. Newton skriver i 3. udgaven [1, side 408]:

"Længden af et sekundpendul på Paris' breddegrad er, som Huygens har observeret, 3 pariserfod og $8\frac{1}{2}$ linie. Og den længde, som et tungt legeme falder på 1 sekund, forholder sig til det halve af denne pendullængde som kvadratet på forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter (som Huygens også har vist) og er derfor 15 pariserfod, 1 tomme og $1\frac{7}{9}$ linie." Denne længde afviger kun $\frac{3}{9}$ linie (0,75 mm) fra Newtons præciserede værdi for månens faldlængde i et minut (I vores tilvante formelsprog vises ovenstående relation således: faldvejen i 1 sekund er $s_1 = \frac{1}{2}g \cdot 1\text{sek}^2$. Sekundpendulets længde l_2 er bestemt ved $2\text{sek} = 2\pi\sqrt{l_2/g}$, hvoraf fås $2s_1 = \pi^2 \cdot l_2$).

Nu er der en vis ironi i, at Newton vælger denne løsning. For Huygens' angivelse, "meget nær 15 fod, 1 tomme", er et afrundet resultat på en beregning, hvis forudsætninger er opgivet [5, side 171]; gennemfører man regnestykket, bliver det præcise resultat: 15 fod, 1 tomme og $1\frac{4}{9}$ linie, altså en fuldkommen overensstemmelse med Newtons tal.

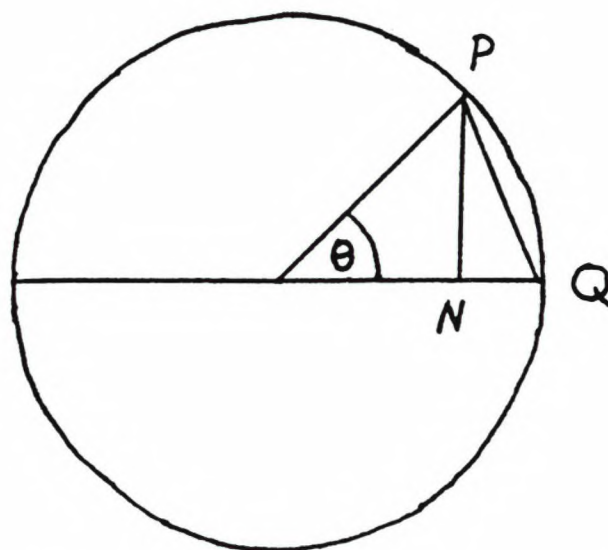
Spørgsmålet er nu, hvordan Newton bestemmer månens faldlængde præcist til 15 fod, 1 tomme og $1\frac{4}{9}$

linie? Svaret ligger ikke lige for, idet de anvisninger, der eksplicit gives i teorem IV (jvnfr. citatet ovenfor), vil vise sig at være utilstrækkelige!

En formel for månens faldlængde

Vil man prøve at finde vej gennem Newtons metode til beregning af den pågældende værdi, er der naturligvis kun een indgang hertil: man må tage fat i de to propositioner fra 1.bog, som han henviser til. Da resultatet imidlertid bliver det samme, nøjes jeg her med at inddrage corollarium IX, proposition IV, som lyder [1, side 46]:

"Den bue, som et legeme, der bevæger sig i en jævn cirkelbevægelse med en given centripetalkraft, beskriver i en given tid, er mellemproportional mellem cirkelns diameter og den vej, det samme legeme vil falde i den samme givne tid under indvirkning af den samme givne kraft."



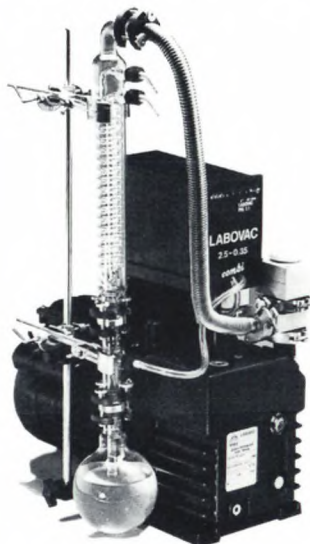
På figuren, som kunne forestille Månens bane om Jorden, betegner QP den bue, som Månen gennemløber i en given tid, fx et minut. Buens længde betegnes l_1 . Uden tiltrækningen fra Jorden ville den fra Q have fulgt tangenten til cirklen. I forhold til denne "inertielle bane" er månen i samme tid "faldet" stykket QN. Nu er det en kendt sætning fra den klassiske geometri (betragt eventuelt et par ligedannede retvinklede trekanter), at korden PQ er mellemproportional til QN og cirkelns diameter, $2R$, altså $PQ^2 = 2R \cdot QN$.

Lader vi nu P nærme sig Q, sådan at "buen formindskes i det uendelige", så vil (ifølge Principias Lemma VII, side 37) forholdet mellem korden PQ og buelængden l_1 blive et "ratio of equality", dvs nærme sig 1. Heraf følger, at $l_1^2 = 2R \cdot QN = 2R \cdot R(1 - \cos \Theta)$, hvor $R(1 - \cos \Theta)$ er den størrelse, som Newton kalder sinus versus til en bue.

Vi har, at $l_1 = R\Theta_1$, hvor Θ_1 er den vinkel, retningen til Månen ændrer sig i et minut. Dermed får vi endelig følgende formel for Månens faldvej mod Jorden i 1 minut:

$$s_1 = QN = \frac{1}{2}R \cdot \Theta_1^2; \quad (1)$$

MODERNE VAKUUMTEKNIK TIL FORSKNING OG INDUSTRI



SASKIA HOCHVAKUUM- UND LABORTECHNIK GmbH I ILMENAU er et succesrigt resultat af øst-vest genforeningen i Tyskland. SASKIA's et- og to-trins finvakuumpumper fra 4 til 200 m³h⁻¹ har rotor-skiver af et nyt PTFE materiale som sænker støjniveauet med ca. 3 dBA og tillader pumperne at arbejde konstant ved højt tryk eller med aggressive gasser. Med en frekvensregulering kan pumpehastigheden fordobles, så man f.eks. hurtigt kan evakuere et anlæg og derefter anvende pumpen som holdepumpe ved lav hastighed. SASKIA's kemisk resistente membran-pumper har liniærdrevne membraner, hvilket sikrer en lang levetid og lavt effektforbrug. En membranpumpe på ca. 30 W kan med de store afgifter på brugsvand hurtigt tjene sig ind, hvis den erstatter en vandstråle-pumpe. SASKIA's TOWER pumpestande er kemipumpestande kombineret med kondensatorer og med instrumentering for indstilling af trykket. SASKIA leverer oliefri pumpestande kombineret med turbomolekularpumper i et handy design og rootspumpestande op til 20.000 m³h⁻¹.

ALLE FORMER FOR OLIEFRI & OLIESMURTE ROTATIONSVAKUUMPUMPER • FEDTSMURTE TURBOMOLEKULAR- SPIRO- & HYBRIDPUMPER • DIFFUSIONS- & CRYOPUMPER • VAKUUMMÅLEINSTRUMENTER, VENTILER, HV & UHV FITTINGS • HELIUMLØKSØGERE & MASSESPEKTROMETRE • SPUTTER- ELEKTRONKANON & ÆTSEANLÆG • RF & HV STRØMFORSYNINGER • RUSTFRI SPECIALKAMRE & DELE • OMBYGNING AF VAKUUMANLÆG

WENZEL VAKUUM TEKNIK APS • NYBROVEJ 283 • DK-2800 LYNGBY • TLF. 45 87 97 35
SHOWROOM, SERVICE, LAGER • NYBROVEJ 193 • BIL 30 42 63 00 • FAX 45 93 32 93

den kan altså beregnes, når blot Månens omløbstid og dens afstand fra Jorden er kendt. Newton angiver i 3. bogs teorem IV (side 408) følgende værdier som grundlag for sin beregning: Månens sideriske omløbstid: 27 døgn, 7 timer og 43 minutter. Jordens omkreds (målt af Picard): 123 249 600 pariserfod. Månens middelfastand fra Jordens centrum: 60 jordradier. Med disse værdier finder man $s_1 = 15,00900$ fod.

Følger man Newtons anvisning og bruger den deraf afledte formel, kommer man til, at Månens fald mod Jorden i 1 minut skulle være $s_1 = 15$ fod og $1\frac{3}{10}$ linie, altså et resultat, der er en del mindre end Newtons mest præcise værdi, og som endog kun med en vis skævhed kan accepteres som "ca. $15\frac{1}{12}$ fod". Men der er ikke yderligere hjælp at hente i teorem IV's beregningsanvisninger.

Solens tiltrækning

Nu forholder det sig imidlertid således, at den faldlængde, vi her har beregnet ud fra observationerne, må være betinget af den samlede sum af de kræfter, som er involveret. Faldlængden inkluderer altså også virkningen af solens tiltrækning og den må derfor korrigeres for denne virkning, hvis resultatet skal være sammenligneligt med tyngdekraften på Jordens overflade !

Den faldlængde, vi i første omgang har fundet, er

altså ikke proportional med tyngdekraften G fra Jorden i Månens bane, men med kraften $G - F$, hvor F er den kraft, hvormed Solen i gennemsnit trækker Månen og Jorden fra hinanden (fordi en af dem for det meste er nærmere ved Solen end den anden).

Newton har allerede i Proposition III, 3. bog hævdet, at F forholder sig til centripetalkraften i månebanen som $1/178,725$ (ganske ironisk er hans formål der at bevise, at denne kraft er så lille, at man kan se bort fra den - men nu har vi alligevel brug for den !).

I 1. bogs Proposition LXVI, corollarium XVII (side 184) har Newton vist, at F - opfattet som middelværdien af en acceleration - forholder sig til Jordens acceleration mod Solen som radius i månebanen til radius i Jordens bane om Solen. Ved at benytte formlerne for jævn cirkelbevægelse på de to baner finder man, at forholdet F/G er lig med kvadratet på forholdet mellem Månens og Jordens omløbstider, hvilket giver det ovennævnte forholdstal. Heraf får vi $F = \frac{G}{178,725} = \frac{G-F}{177,725}$ eller $G = \frac{178,725}{177,725} \cdot (G-F)$. Vores faldlængde s_1 , som skyldes $G - F$, skal med andre ord multipliceres med denne brøk for at give den faldlængde, der alene skyldes Jordens tiltrækning. Denne korrektion giver præcis 15 fod, 1 tomme og $1\frac{4}{9}$ linie.

Resultatet, som er fremkommet ved en karakteristisk

samvirken af teoretisk viden om fald- og cirkelbevægelse, empiriske målestørrelser og tankeeksperimenter, er ækvi- valent med 4,902352 meter. Månens fald ad denne længde i 1 minut i en afstand fra Jorden på 60 jordradier svarer til en tyngdeacceleration ved jordoverfladen på $9,805 \text{ m/s}^2$ og en acceleration i månebanen på $2,7 \text{ mm/s}^2$.

En afsluttende kommentar

Som anført sætter Newton blandt forudsætningerne for denne beregning Månens afstand fra Jordens centrum til 60 jordradier. Der er imidlertid ingen grund til at tro, at han anså denne værdi for at være helt præcis: han indleder 3. bogs teorem IV med at anføre en række værdier, som de er anslåede af tidligere astronomer, og som spænder over et interval fra 56,5 til 60,5 jordradier, hvorefter han fortsætter: "lad os *antage* (assume) en middelfast på 60 radier" (min kursivering).

Man kan da spørge, hvorfor Newton overhovedet foretager sin korrektion. Er den egentlig ikke meningsløs, når man tager den usikkerhed i betragtning, der gør sig gældende for Jord-Måne-afstanden? Hvis sigtet med korrektionen alene var at finde den præcise værdi af den pågældende faldlængde, måtte svaret utvivlsomt blive et ja.

Imidlertid er selve teoremets hovedsigte netop ikke af en sådan praktisk art, men derimod at fundere det kvalitative udsagn at *det er den samme kraft, der virker i månebanen og ved jordoverfladen*. Og da bliver det for en principiel logisk betragtning nødvendigt at korrigere for solens virkning, hvis en sammenligning med tyngdekraften ved Jorden skal begrunde denne konklusion. Det bliver nødvendigt at eliminere fremmede kræfter for derved at *isolere* den ene kraft for at kunne konkludere, at virkningerne ved jordoverfladen og i månebanen er virkninger af denne, "den samme kraft".

Det er i denne sammenhæng ikke uden interesse, at Newton allerede i 1666 havde noteret sig den samme konklusion, men på grundlag af måltal, der var langt mere upræcise⁶.

Det erkendelsesteoretiske princip, vi her kan spore, peger på, at tesen om at "tyngden rækker helt ud til Månens bane" oprindeligt er fremkommet som et kvalificeret gæt, der hviler på indsigt i bevægelseslovene, og som efterfølgende er blevet underbygget af stadigt mere præcise måltal.

Den "verden af præcision", som er den moderne fysiks verden, var først under udvikling netop i 1600- og 1700-tallet, hvor den på mange områder snarere var et tilstræbt ideal end en realitet.

Referencer:

- 1) *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Naturfilosofiens matematiske principper) udkom i Newtons levetid i tre forskellige udgaver: 1687, 1713 og 1726. Den første engelske oversættelse udkom i 1729 og er baseret på værkets 3. udgave. Det er Florian Cajoris revision fra 1934 af denne oversættelse, der idag er almindeligt tilgængelig i paperback-udgave: *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World* (University of California Press). Mine sidehenvisninger refererer til denne udgave.
- 2) Tidligere formodninger om, at Newton først skulle have affattet Principia i infinitesimalregningens sprog og derefter "oversat" den til geometrisk sprog, kan formentlig anses for en skrøne. Der er i det mindste aldrig fundet manuskripter, der kunne dokumentere noget sådant.
- 3) Olaf Pedersen, Omkring Newtonismens gennembrud, *Fysisk Tidsskrift* 86, nr. 3 (1988).
- 4) 1 pariserfod ("pied de roi") = 0,3248 m. Foden deles i 12 tommer og tommen i 12 linier. Månen falder altså ca. 4,9 m i det første minut.
- 5) C. Huygens, *Horologium Oscillatorium* (1673), som oversat i *The Pendulum Clock* (Ames, Iowa 1986). Det vides, at Newton fik et eksemplar af Huygens ved udgivelsen. Huygens var om nogen pioneren i arbejdet med at måle tyngdeaccelerationen.
- 6) Ole Knudsen, Om kraftbegrebets udvikling hos Newton, *Gamma* nr. 71, (1988), side 12-14.



Tom Bøgeskov er mag. art. i litteraturvidenskab og har især beskæftiget sig med filosofi, ide- og videnskabshistorie.