

Coriolis og corioliskraften

Niels Kristian Højerslev, Niels Bohr Institutet for Astronomi, Fysik og Geofysik, Københavns Universitet.

Caspard Gustave Coriolis blev født i Paris i Frankrig under Den Store Franske Revolution, 21. maj 1792 (Léon Warnant, 1968: “De la prononciation française”, samt Larousse, 1980: “Dictionnaire de la prononciation” oplyser i begge tilfælde at efternavnet Coriolis skal udtales som “korjorlis” med tryk på sidste stavelse og lydbillede som i pigenavnet Lis, mens de to o-er lyder som o-et i navneordet korps). Coriolis familiebaggrund var aristokratisk, men han overlevede da de blodige revolutionsår som efterfulgte hans fødsel. Den unge Coriolis havde bemærkelsesværdige gode evner og blev som 18-årig immatrikuleret på den nyoprettede Polytekniske Lærestanstalt, École polytechnique i Paris, der tjente som forskole for de tekniske specialskoler såsom École des mines, École des ponts et chaussées, osv. Coriolis valgte at læse videre på den sidstnævnte skole som 20-årig. Få år senere blev den tidligere hovedfagsstuderende i 1816 lærer på den selvsamme skole og havde efter sigende et stort talent for undervisning. Men også nøden tvang Coriolis til undervisning, fordi en del tyder på, at den mindre pengegivende forskning havde godt tag i den kun 24-årige unge mand. For snart 200 år siden indgik familierne sociale forpligtelser over for dens egne medlemmer i modsætning til i dag, så hér fangede bordet for Coriolis. Dengang som nu lå de fleste penge i undervisning og ikke i forskning, så noget har ændret sig – andet ikke.

Coriolis ville vi nok i dag kalde for maskiningeniør af en næsten uddød race. Hans interesser lå omkring maskiner og deres roterende dele, men specialinteresserne trak henimod vandmøller, kraftpåvirkninger fra møllerne og deres deraf udførte arbejde. Det er dokumenteret i hans ganske specialiserede litterære produktion med artiklerne “Calcul de l’effet des machines”, 1829 og “Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines”, 1832.

Året 1835 synes på mange måder at have været et godt år for Coriolis, selvom han på det tidspunkt led af et skrantende helbred, der livet igennem afholdt ham fra at indgå ægteskab om det ikke var lysten eller manglen på samme. Således udkom i 1835 hovedarbejdet “Théorie mathématique du jeu de billard”, der over sine mange sider beskriver stødteori i “det virkelige liv”. Disse teoretiske overvejelser og beregninger sker i tæt samarbejde med billardspilleren M. Mingaud, så Coriolis får valideret sin stødmodel. I samme år udkommer så den lille artikel “Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps”, 1835, hvor begrebet “des forces centrifuges composées” optræder for første gang i Coriolis forfatterskab. Det er disse sammensatte centrifugalkræfter, som i dag går under betegnelsen cori-

oliskræfterne eller de “afbøjende kræfter”, og der kan henvises til den sidste af de to sider 143 som optræder i monografien: Coriolis, Caspard-Gustave. 1792–1843. *Théorie mathématique des effets du jeu de billard etc.* udgivet på forlaget J. Gabay, 1990, ISBN 2-87647-081-0: 224 pp. og 66 figurer. Der skal her lige erindres om at Coriolis som maskiningeniør havde den roterende jord som sin referenceramme, fordi de roterende maskindele han havde sat sig for at undersøge, roterede langt hurtigere end vores roterende jord.



Figur 1. Caspard Gustave Coriolis.

Mange har hørt om historien om astronomen Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868) og foucaultpendulet. Foucault ophængte en 28 kg tung messingkugle i en 64 meter lang metaltråd under kuplen i Panthéonkirken i Paris i 1851. Pendulets svingningsplan efter forsøgets start viste sig ikke at ligge fast, som tiden gik. I løbet af en halv såkaldt penduldag på ca. 14 timer havde pendulets svingningsplan (defineret som den svagt krumme flade bestemt af to på hinanden efterfølgende svingningsydepunkter) bevæget sig hele kompasset rundt og tilbage til svingningsplanen ved starttidspunktet. Foucaulteksperimentet viste, at vores jord roterer i forhold til fiksstjernerne, og at jorden følgelig ikke er et såkaldt initialsystem i newtonsk

forstand. Astronomen Foucault arbejdede naturligvis inden for helt andre tidsskalaer end maskiningeniøren Coriolis, hvilket kan forklare det interessante forhold, at Foucault i 1851 tilsyneladende ikke kendte til Coriolis' arbejde fra 1835. Sådanne forhold er nu heller ikke ganske ukendte i Danmark, hvor astronomer og fysikere sagtens kan være uvidende om, hvad polyteknikere går og laver.

I Coriolis sidste leveår gik tiden med at arbejde på l'École polytechnique, i l'Académie de Science og endelig med at opdatere den gamle bog fra 1829, som nu optrådte med titlen "Traité de la mécanique des corps solides!". Næppe træt af dage men plaget af sygdom trods en ung alder døde Coriolis 51 år gammel den 19. september 1843. Han blev begravet på Montparnasse Kirkegård og må i høj grad siges at tilhøre det naturvidenskabelige parnas.

Der har i geofysiske kredse været en tendens til at tage patent på Coriolis, men der skulle gå omkring 40 år fra hans død til introduktionen af corioliskraften blandt meteorologer og oceanografer. Et godt eksempel herpå er den danske stadsingeniør i København og senere professor Ludvig A. Colding (1815–1888), der blev tilbudt jobbet om første direktør for Danmarks Meteorologiske Institut uden dog at acceptere tilbuddet. Colding skriver i forbindelse med den værste storm over Danmark 12.–14. november 1872 således ikke et eneste ord om corioliskraften i rækken af artikler til Videnskabernes Selskab fra publikationsperioden 1876 til 1881. Og her skal det for god ordens skyld fremhæves, at Coldings arbejder regnes for fremragende, skelsættende og af international værdi, selv om han ikke har inkluderet eller kendt til jordens afbøjende kraft.

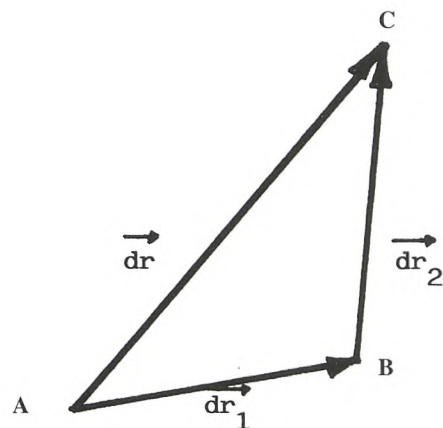
Corioliskraften

Der er gjort mange "pædagogiske" men helhjertede forsøg på at beskrive og udlede corioliskraften. Efter gennemlæsning af en lang række lærebøger, artikler og kompendier må konklusionen blive, at det ikke er lykkedes for nogen at levere en helt lydefri vare. Til dato har undertegnede derfor argumenteret for, at corioliskraften udleder man med brug af vektoranalytiske metoder. Coriolis gjorde selv dette men uden vektorformalismens velsignede velsignelser. Nedenfor vover forfatteren dog alligevel et øje, og siden er det op til læseren at vurdere, om varen er leveret eller om der igen er tale om en bytter.

Grundlæggende betragtninger

Hvis vi vil gå fra A til C kan vi tage den direkte vej $AC = d\vec{r}$ eller omvejen over B, dvs. $AB = d\vec{r}_1$ og siden $BC = d\vec{r}_2$. Det siger sig selv, at den direkte vej er den korteste, men vi nedskriver alligevel vektorligningen med lighedstegn:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 \quad (1)$$



Figur 2.

Ved at differentiere ligning (1) med hensyn til tiden, t eller ved division med dt fås:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \equiv \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (2)$$

hvor definitionen for hastighed er benyttet. Bemærk at da dt er den samme på begge sider af ligning (2) må farten være mindre langs AC end langs omvejen AB og BC.

Endnu en differentiation af ligning (2) med hensyn til tiden giver

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \frac{d\vec{v}_2}{dt} \equiv \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \quad (3)$$

hvor definitionen for acceleration er benyttet. I den aktuelle sammenhæng omskriver vi de 3 ovenstående ligninger til

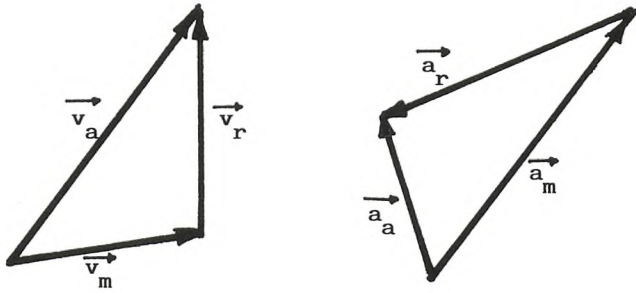
$$d\vec{r}_a = d\vec{r}_m + d\vec{r}_r \quad (4)$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_m + \vec{v}_r \quad (5)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_m + \vec{a}_r \quad (6)$$

hvor indices a, m, r henholdsvis refererer til "absolut", "medføring" og "relativ". Eksempelvis er $\vec{v}_a$ et legemes absolut hastighed taget i forhold til et initialsystem mens medføringshastigheden, $\vec{v}_m$ beskriver forflytningen af et legeme i forhold til initialsystemet men netop ikke i forhold til et underlag i bevægelse. Endelig beskriver den relative hastighed, $\vec{v}_r$ forflytningen i forhold til fikspunkter på det bevægede underlag. Går man f.eks. op ad en trappe og en rullende trappe med samme skridthastighed, så går man lige hurtigt op ad trapperne med hastigheden, $\vec{v}_r$ men kommer hurtigst op på næste etage på den rullende trappe på grund af dennes $\vec{v}_m$. En grafisk løsning

på ligningerne (4), (5) og (6) er illustreret nedenfor:

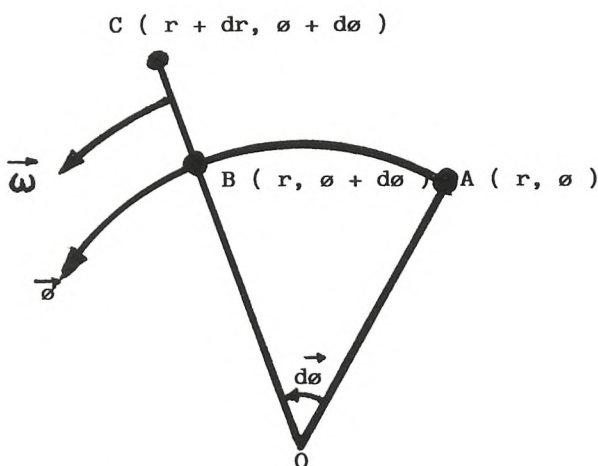


Figur 3.

Den simple coriolismodel

Som udgangspunkt betragtes en plan roterende skive, der roterer med konstant vinkelhastighed, $\vec{\omega}$ mod uret. På denne skive bevæger et legeme med massen, m sig omkring med den konstante hastighed, $\vec{v}_r$. Legemet bevæger sig på skinner, som er fastgjort til underlaget. Vi betragter kun kræfter, som er relevante i sammenhængen, hvilket indebærer, at skiven kan have en vilkårlig orientering i rummet uden at legemet påvirkes af det. Vender man f.eks. skiven "på hovedet" falder legemet ikke "ned".

Legemet bevæger sig nu et meget lille vejstykke fra A til C i tiden mellem t og $t + dt$, dvs. i tidsrummet dt . Det er formelt muligt som set indledningsvis, at opdele denne bevægelse i en cirkulær og en radial bevægelse, som det fremgår af nedenstående figur. Det indebærer formelt, at legemet skal bevæge sig på skinner fra A til B i en lille cirkelbevægelse og fra B til C i en anden lille radialbevægelse i tidsrummet dt for begge bevægelser vedkommende – se figur 4:

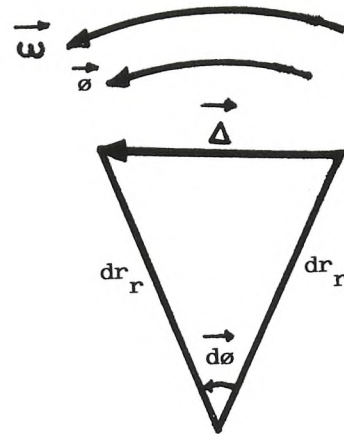


Figur 4.

Radiær kørsel på skinner

I løbet af tiden, dt bevæger massen, m sig radiært udad fra $r = r_r$ til $r = r_r + dr_r$, hvor medførings-hastigheden er større. Den radiære forflytning fra r_r til $r_r + dr_r$ (som er den eneste mulige forflytning på skiven, fordi m kører på skinner) andrager $dr_r = |\vec{v}_r| dt$, mens hastighedsændringen, $d\vec{v}_r = (r_r + dr_r)\vec{\omega} - r_r\vec{\omega} = dr_r\vec{\omega} = |\vec{v}_r| \cdot \vec{\omega} \cdot dt$. Bemærk her den af undertegnede indførte vektorformalisme som direkte viser, at $d\vec{v}_r$ går i retningen af $\vec{\omega}$ som vist i figur 4, dvs. vinkelret til venstre på OA for små dt . Det ses herefter direkte at $\vec{a}_r \equiv \frac{d\vec{v}_r}{dt} = |\vec{v}_r| \cdot \vec{\omega}$. Skinnerne giver nu en acceleration $\vec{a}_r$ rettet mod venstre i figur 4 og kraftpåvirkningen på skinnerne bliver $m \cdot \vec{a}_r$. Derved bliver m udsat for en ligeså stor men modsat rettet kraft til højre! Dette indses ved at benytte sig af Newtons tredje Lov om aktion og reaktion.

Under køreturen på skinnerne i tiden dt , drejer skinnerne sig i forhold til et initialsystem, som det er vist i figur 5.



Figur 5.

Skinneforflytningen i løbet af dt kaldes i vores forbindelse for $\vec{\Delta} = dr_r d\phi$ og den er rettet mod venstre i figuren. Med den her indførte vektorformalisme er $d\phi = \vec{\omega} dt$. Dermed fås samlet med brugen af de tidligere fundne resultater at $\vec{\Delta} = |\vec{v}_r| dt \cdot \vec{\omega} dt$, hvorved $\frac{\vec{\Delta}}{dt^2} \equiv \vec{a}_m = |\vec{v}_r| \cdot \vec{\omega}$; dvs. $\vec{a}_m = \vec{a}_r$ med præcis samme argumentation som før. Samlet fås derfor med brug af ligning (6) at coriolisaccelerationen,

$$\vec{c} = 2|\vec{v}_r|\vec{\omega} \quad (7)$$

for den radiære bevægelse på skinner. Bemærk at accelerationen af m (eller rettere corioliskraften på m) går vinkelret til højre for m 's radiære bevægelsesretning på den roterende skive bedømt fra fikspunkter på den roterende skrive men vinkelret til venstre set fra initialsystemet.

Cirkulær kørsel på skinner

Denne situation beskriver en cirkulær bevægelse af m på skinner fra A til B (eller fra B til A for den mod-

sat rettede vinkelhastighed, $-\vec{\omega}$) i den faste afstand, r fra rotationsaksen. Bedømt ud fra initialsystemet holdes m i den cirkulære bane af skinnerne, som leverer den nødvendige kraft lig med centripetalaccelerationen multipliceret med m . Massen, m påvirker hermed skinnerne på skiven med en ligeså stor og modsat rettet kraft. Figur 4 illustrerer situationen for medløb. Den samlede hastighed $\vec{v}_a = \vec{v}_m + \vec{v}_r$, hvor $\vec{v}_m$ skal regnes positiv, når $\vec{v}_m$ og $\vec{v}_r$ har samme retning i den cirkulære bevægelse (jævnfør med eksemplet fra før med trappen og den rullende trappe). I tilfælde af medløb skal den samlede centripetalacceleration, $\vec{a}_a$ af m naturligvis være rettet ind mod rotationsaksens centrum bedømt fra initialsystemet og have værdien $|\vec{a}_a| \equiv a_a = \frac{v_a^2}{r} = \frac{(v_m + v_r)^2}{r} = \frac{v_m^2}{r} + \frac{v_r^2}{r} + 2\omega v_r$ da $v_m = r\omega$ og $\vec{v}_m$ samt $\vec{v}_r$ går i samme retning. Massen, m holdes hele tiden på plads af skinnerne i den cirkulære bane, hvorved skinnerne påvirker m med kraften $m \cdot \frac{v_a^2}{r}$ rettet ind mod rotationsaksen. Omvendt må m påvirke skinnerne med en ligeså stor men modsat rettet kraft $= m \frac{v_a^2}{r}$. Leddet $\frac{v_m^2}{r} = r\omega^2$ bliver herefter identificerbart med centrifugalaccelerationen på m som følge af den roterende skive, $\frac{v_r^2}{r}$ er den for m nødvendige centripetalacceleration og endelig er ledet $2\omega v_r$ den føromtalte coriolisacceleration, som også er rettet vinkelret til højre for bevægelsesretningen. For medløb fås $\frac{v_m^2}{r} + \frac{v_r^2}{r} - 2\omega v_r = r\omega^2 + \frac{v_r^2}{r} - 2\omega v_r$. Her skal det bemærkes at centrifugalaccelerationen bevarer sit fortegn i modsætning til coriolisaccelerationen. Det betyder at centrifugalaccelerationen altid er rettet væk fra centrum mens coriolisaccelerationen altid er rettet vinkelret til højre for m 's bevægelsesretning, som kan være ind mod eller væk fra centrum for henholdsvis medløb og modløb. Det er hermed vist for den cirkulære bevægelse, at der optræder et accelerationsled, coriolisaccelerationen hvor

$$|\vec{c}| = 2 |\vec{v}_r| \cdot |\vec{\omega}| \quad (8)$$

Kombination af ligning (7) og (8) fører til konklusionen, at for alle bevægelser på skiven vil der være en corioliskraft, $\vec{k}$ på m som er rettet 90 grader til højre for m 's bevægelsesretning der i størrelse andrager:

$$|\vec{k}| = m \cdot |\vec{c}| = 2m |\vec{v}_r| \cdot |\vec{\omega}|. \quad (9)$$

Den mindre simple coriolismodel

Den mindre simple model lader antagelserne om konstant vinkelhastighed $\vec{\omega}$, og konstant hastighed, $\vec{v}_r$ falde. Dermed bliver både $\vec{\omega}$ og $\vec{v}_r$ analytiske vektorfunktioner af tiden, t . I stil med tidligere beregner vi forflytningen fra $\vec{r}_r$ til $\vec{r}_r + d\vec{r}_r$ i tidsrummet mellem t og $t + dt$, hvor $d\vec{r} \equiv \langle \vec{v}_r \rangle dt$, idet $\langle \vec{v}_r \rangle$ er den relative middelhastighed. Der gælder for et bestemt tidspunkt, $t + dt_1$ at $\vec{v}_r(t + dt_1) = \langle \vec{v}_r \rangle$, hvor $0 \leq dt_1 \leq dt$. Analogt hermed gælder at $\vec{\omega}(t + dt_2) = \langle \vec{\omega} \rangle$ hvor $0 \leq dt_2 \leq dt$

og hvor $dt_1 \neq dt_2$ i det typiske tilfælde. Taylorrækkeudvikling af henholdsvis $\vec{v}(t + dt_1)$ og $\vec{\omega}(t + dt_2)$ giver:

$$\langle \vec{v}_r \rangle = \vec{v}_r(t + dt_1) =$$

$$\vec{v}_r(t) + \frac{d\vec{v}_r(t)}{dt} \cdot dt_1 + \frac{1}{2} \frac{d^2\vec{v}_r(t)}{dt^2} \cdot dt_1^2 + \dots \quad (10)$$

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \vec{\omega}(t + dt_2) =$$

$$\vec{\omega} + \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \cdot dt_2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\vec{\omega}(t)}{dt^2} \cdot dt_2^2 + \dots \quad (11)$$

Først betragtes den radiære bevægelse hvor $d\vec{v}_r = dr_r \cdot \vec{\omega} \equiv |\langle \vec{v}_r \rangle| \cdot dt \cdot \vec{\omega}$ hvorved:

$$dr_r \cdot \vec{\omega} = |\vec{v}_r(t)| \vec{\omega}(t) dt + ([\dots] dt_1 + [\dots] dt_2) dt \quad (12)$$

Ligning (12) er fremkommet ved at multiplicere ligning (10) og (11) med hinanden for siden at ordne de mange produktled i de to kantede parenteser så leddet dt_1 altid kan sættes uden for den første kantede parentes og dt_2 uden for den anden. Det er herefter let at vise at $\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = |\vec{v}_r(t)| \vec{\omega}(t)$ idet sidste led i den store parentes i ligning (12) forsvinder når dt gøres tilstrækkelig lille (bemærk her at $dt \geq dt_1$ og $dt \geq dt_2$).

Herefter skal forflytningen $\vec{\Delta} = |\langle \vec{v}_r \rangle| dt \langle \vec{\omega} \rangle$ beregnes idet $d\vec{\phi} \equiv \langle \vec{\omega} \rangle dt$ - se tidligere i teksten samt figur 5. Ved igen at benytte ligningerne (10) og (11) samt regnemethoden angivet i ligning (12) fås

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta}}{dt^2} = |\vec{v}_r(t)| \vec{\omega}(t) \quad (13)$$

for små tidsintervaller, dt . Derved fås samlet for coriolisaccelerationen $\vec{c}(t)$ for radialbevægelsen:

$$\vec{c}(t) = 2 |\vec{v}_r(t)| \vec{\omega}(t) \quad (14)$$

Situationen er enkel for den cirkulære bevægelse, fordi ligningen $a_a = \frac{v_a^2}{r} = r\omega^2 + v_r^2 \pm 2\omega v_r$ (med- og modløb) er gyldig til alle tider for vilkårlige $\vec{v}_r(t)$ og $\vec{\omega}(t)$. Helt generelt er det hermed vist at

$$|\vec{c}| = 2 |\vec{v}_r(t)| |\vec{\omega}(t)| \quad (15)$$

for vilkårlige bevægelser på skiven der tillades at rotere med vilkårlig vinkelhastighed.

Ovenstående udledning kan gennemføres for enhver roterende skive der beskrives udfra et initialsystem. I geofysik har vi valgt horisontalplanen og vertikalplanen af praktiske grunde, så ligning (15) skal benyttes på disse to planer. Samlet fås da at ligning (15) kan siges at gælde helt generelt, dvs. for alle rumlige bevægelser til alle tidspunkter. Corioliskraften søger således hele

tiden at give et legeme en acceleration gående vinkelret på legemets øjeblikkelige banebevægelse. Corioliskraften "driver ikke værket" så man kan derfor tale om kraften som en passiv eller regulerende kraft. Forudsætningen for at have en corioliskraft og en deraf foranlediget coriolisacceleration er bevægelser i planer, der accelererer i forhold til et fastliggende referencesystem, som vi også kalder for et initialsystem. I et initialsystem er det kun naturkræfterne, som er virksomme, så her optræder ingen corioliskraft. Corioliskraften virker altid vinkelret på legemer der bevæger sig i systemer, som accelererer i forhold til initialsystemet. Vores roterende jord er et eksempel på sådant et system, der accelererer i forhold til fiksstjernehimlen. På nordlig halvkugle der roterer mod uret, søger corioliskraften altid at trække et legeme i bevægelse vinkelret til højre. Det gælder uanset om bevægelsen er radiær eller cirkulær eller en kombination af begge dele. På sydlig halvkugle, der roterer med uret, er kraften rettet vinkelret til venstre. Da corioliskraften ændrer sig jævnt og ikke springvis med breddegraden må den være lig med nul på ækvator, der som bekendt danner overgangen mellem nordlig og sydlig halvkugle.

Afsluttende bemærkninger

Corioliskraften her på vores nordlige breddegrader er en "stærk geofysisk" kraft, hvor vertikalkomponenten har omtrent den samme størrelse som horisontalkom-

posanten. Vinkelhastigheden, $\vec{\omega}$ regnes for konstant og den beskriver jordens omløbstid i forhold til et initialsystem, dvs. en omløbstid på et stjernedøgn, som er på knapt et døgn. Værdien på $\vec{\omega}$ sættes til $7.292115 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Normalt regnes der i geofysik kun med horisontale corioliskræfter som i værdi andrager sinus til breddegraden multipliceret med massen, m og faktoren $2|\vec{v}_r|$. Typiske værdier for $|\vec{v}_r|$ i lufthavet ligger på op til 40 m/s men overstiger sjældent 4 m/s i havet.

Det kan til sidst være nyttigt med følgende skaler-ing der typisk er gældende for oceanografiske forhold i Danmark: Forholdstallene for tyngdekraften : corioliskraften : tidevandskræfterne alle i vertikal retning ligger på omkring 100,000:1:0,01.



Niels K. Højerslev er dr.scient. og lektor på Geofysisk Afdeling, Niels Bohr Institutet for Astronomi, Fysik og Geofysik (nkh@gfy.ku.dk).

Breddeopgave nr. 7 og 8

af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

Breddeopgave nr. 7 stammer fra sommereksamen 2000 og lyder:

I reaktoren DR3 på RISØ skabes der urenhedsatomer i rent silicium gennem kernereaktioner ved neutronbestråling. Opnås der herved en p-type halvleder eller en n-type halvleder? Begrund svaret.

Breddeopgave nr. 8 stammer fra vintereksamen 1999 og lyder:

Ledningsevnerne af henholdsvis rent silicium og rent germanium er størrelsesordensmæssigt henholdsvis 10^{-11} og 10^{-7} gange ledningsevnen af typiske metaller. Hvad er forholdet imellem båndgabene i silicium og germanium? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar findes side 24.

PFEIFFER VACUUM

Totalleverandør

Af vacuumkomponenter

- vacuumsystemer
- turbopumper
- lamelpumper
- rootspumper
- vacuum måleudstyr
- vacuum ventiler
- massespektrometre
- on-line analyse
- læksovningsudstyr
- vacuum olier og smøremidler
- alt tænkeligt vacuumudstyr

Vi ses til DFS årsmøde

Tel. 4352 3800 Fax 4352 3850
efa@pfeiffer-vac m.dk