

Corioliskraften og Foucaults pendul

Peter Ditlevsen, Niels Bohr Institutet, Geofysisk Afdeling

Indledning

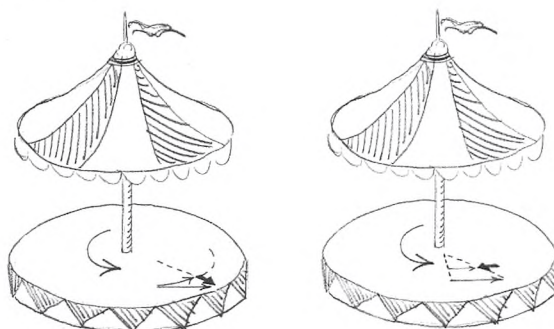
Ved verdensudstillingen i 1851 ophængte den franske fysiker Leon Foucault (1819-1868) et langt pendul fra kuplen i Pantheonkirken i Paris. Pendulet var det første instrument, som direkte viste at jorden roterer og at en lokalitet på jordoverfladen derfor ikke udgør et inertialsystem. Foucaults pendul er et ganske almindeligt pendul, der svinger så længe at vi kan iagttage jorden rotere under pendulets ophængspunkt. Pendulets bevægelse er relativt simpel at beskrive og iagttage og er derfor et godt eksempel for at forstå virkningen af de fiktive kræfter på jorden. Der findes et Foucaultpendul med offentlig adgang i Rotunden hos GEUS på Østervoldgade 10 i København.

Inertialsystemer

Newtons bevægelseslove gælder for bevægelser i forhold til inertialsystemer. Et inertialsystem er et koordinatsystem som enten ligger stille eller bevæger sig med konstant hastighed i forhold til "det absolutte rum". Postulatet om det absolutte rum (og den absolutte tid) er en af de mere vanskelige detaljer ved Newtons love, fordi vi ikke kan observere det. Hvis vi "observerer" det absolutte rum eller et andet inertialsystem ved at observere at Newtons bevægelseslove gælder i dette system laver vi en ringslutning. Når vi sidder med lukkede øjne og snurre rundt på en kontorstol er vi ikke i tvivl om at vi roterer, vi mærker altså at vi roterer i det absolutte rum. Ernst Mach forsøgte i 1893 at formulere sig ud af dette problem ved at referere til fjerne stjerner (eller fjerne galakser) frem for et ikke-observerbart absolut rum som reference for vores bevægelse. Dette kaldes "Machs princip". Problemet blev dog først fyldestgørende løst af Einstein med den generelle relativitetsteori. Her vil vi blot som Newton postulere eksistensen af inertialsystemer. I forhold til disse kan vi så måle positioner, hastigheder og accelerationer.

Fiktive kræfter

Bevægelsen af en partikel med masse set i forhold til et accelereret koordinatsystem kan beskrives med Newtons love hvis der kompenseres med fiktive kræfter som netop modsvarer massen gange koordinatsystemets acceleration. For et hvilket som helst accelereret koordinatsystem er der netop fire fiktive kræfter: Centrifugalkraften, Corioliskraften, en kraft, der modsvarer koordinatsystemets origo's acceleration og endeligt en kraft der modsvarer koordinatsystemets vinkelacceleration. Her skal vi kun beskæftige os med centrifugalkraften og Corioliskraften. De andre to vil være forsvindende små i de tilfælde vi undersøger i det følgende¹.



Figur 1. På den første karrusel er centrifugalkraften illustreret ved den fede vektor. For at følge karrusellen rundt i stedet for at følge den retlinjede inertielle bevægelse skal man påvirkes af en kraft som er modsat rettet centrifugalkraften. På den anden karrusel vil man ved en bevægelse radiale udad skulle øge sin hastighed for at følge med karrusellen, man mærker altså Corioliskraften illustreret ved den fede vektor. Totalt, som optræder i Corioliskraften, kommer fra at der er en ekstra faktor fra at koordinataksen, som følger karrusellen også flytter sig.

Centrifugalkraften er den udadrettede kraft vi mærker når vi sidder stille på en karrusel, som bevæger sig rundt. Hvis vi bevæger os rundt på en karrusel, som roterer mod urets retning, mærker vi yderligere en kraft mod højre i forhold til vores bevægelsesretning på karrusellen. Det er

¹En god matematisk udledning af de fiktive kræfter findes i Knudsen og Hjorth: "Elements of Newtonian Mechanics", Springer 2002.

²Hvis karrusellen roterede med uret, ville Corioliskraften virke mod venstre, men af uvist hvilken grund drejer alle de karruseller forfatteren nogensinde har set mod uret. Læsere med kendskab til en karrusel, der drejer med uret, opfordres til at viderebringe denne væsentlige oplysning til Kvants redaktion. Alternativt kan læseren komme med bud på en forklaring på dette "symmetribrud".

Corioliskraften². De to fiktive kræfter er illustreret i figur 1.

Newtons anden lov siger at accelerationen af et legeme er givet ved $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, hvor $\mathbf{F}$ er kraften på legemet og m er massen. Det betyder at de fiktive kræfter i en accelereret referenceramme må være givet ved *massen* gange koordinatsystemets acceleration. Derfor er det enklere at operere med accelerationer i stedet for kræfter, altså at dividere massen ud af Newtons bevægelsesligning. Det vil blive gjort i det følgende.

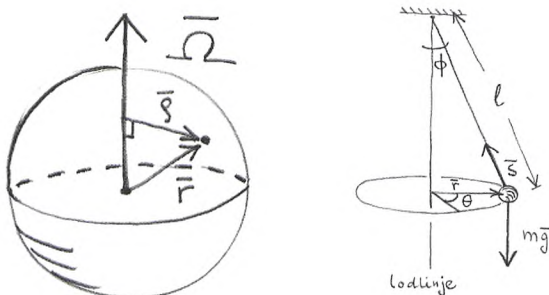
Foucaults pendul

Det er Corioliskraften fra jordens rotation som er på spil ved Foucaultpendulets bevægelse. Når vi beskriver pendulets acceleration $\ddot{\mathbf{r}}$ i et koordinatsystem som ligger stille på jordoverfladen har centrifugalaccelerationen og Coriolisaccelerationen følgende former:

$$\mathbf{A}_{ce} = \Omega^2 \rho \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_{Co} = -2\Omega \times \dot{\mathbf{r}} \quad (2)$$

Vektoren ρ peger fra jordens rotationsakse til punktet $\mathbf{r}$, og Ω er jordens rotationsvektor, se figur 2.



Figur 2. Venstre figur viser en partikels position $\mathbf{r}$ i et koordinatsystem med origo i jordens centrum som roterer med jorden. Vektoren ρ angiver afstand og retning fra jordens rotationsakse. Højre figur viser Foucaultpendulet, hvor origo er skæringspunktet imellem lodlinjen og svingningsplanet. Corioliskraften afhænger af hastigheden $\dot{\mathbf{r}}$, så den er uafhængig af hvor origo for det roterende koordinatsystems vælges. Positionen $\mathbf{r}$ kan angives med de to vinkler θ og ϕ (ikke at forveksle med breddegraden Φ).

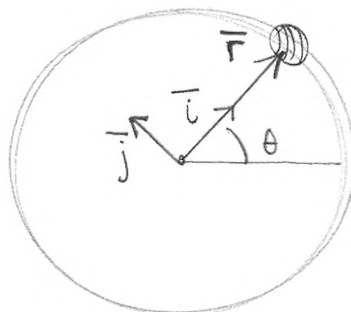
Pendulet er vist på figur 2. Det svinger på en (to-dimensional) kugleflade under påvirkning af tyngdekraften, de fiktive kræfter fra jordens rotation og en snorkraft som holder pendulet på kuglefladen. Summen af kræfternes komponent vinkelret på fladen giver anledning til accelerationen i retning af ophængspunktet og bestemmer snorkraftens størrelse. Den interessante bevægelse er

i kuglefladen. Vi betragter situationen med små udsving hvor kuglefladen kan tilnærmes ved en horisontal plan.

Hvis pendulet er i ro, vil Corioliskraften være nul og pendulets snor vil være en lodline og følge lodlinjen. Lodlinjens retning er givet ved summen af centrifugalkraften og tyngdekraften. Denne sum kan vi kalde den effektive tyngdekraft repræsenteret ved den effektive tyngdeaccelerationen $\mathbf{g}$, hvorefter vi kan glemme alt om centrifugalkraften fra jordens rotation. Newtons 2. lov for pendulets bevægelse i planen er:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{g}{l}\mathbf{r} - 2\Omega \sin \Phi \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (3)$$

Prikkerne betyder som sædvanligt differentiation med hensyn til tiden, g og l fremgår af figur 2. Det første led på højresiden er tyngdeaccelerationens komponent vinkelret på snoren. At betragte kuglefladen som en horisontal plan svarer til tilnærmelsen $\sin \phi \approx \phi$.



Figur 3. Pendulets position i planen kan beskrives i et polært koordinatsystem.

Det sidste led på højresiden er Coriolisaccelerationen, $\mathbf{k}$ er en lodret enhedsvektor og Φ er breddegraden. Se appendix for flere detaljer.

Vi indfører $2\Omega \sin \Phi = f$, hvor f kaldes Coriolisparameteren. Den optræder i ligningerne for ocean og atmosfærestørrelser og er af størrelsesorden 10^{-4} s^{-1} .

Polære koordinater

Nu kunne vi løse (3) direkte i et kartesisk koordinatsystem, men lad os i stedet opstille ligningerne i et polært koordinatsystem, der følger pendulet. I dette tilfælde har vi $\mathbf{r} = r\bar{\mathbf{i}}$ (se figur 3). Enhedsvektorerne $\bar{\mathbf{i}}$ og $\bar{\mathbf{j}}$ er tidsafhængige og ved en nem udledning fås:

$$\dot{\bar{\mathbf{i}}} = \dot{\theta}\bar{\mathbf{j}}, \quad \dot{\bar{\mathbf{j}}} = -\dot{\theta}\bar{\mathbf{i}} \quad (4)$$

(Vink: ligningerne kan enten udledes geometrisk eller ved at differentiere udtryk som $1 = \bar{\mathbf{i}} \cdot \bar{\mathbf{i}}$). Nu

får vi så venstresiden af (3) ved at differentiere to gange:

$$\begin{aligned}(\dot{r}\bar{i}) &= \dot{r}\bar{i} + r\dot{\bar{i}} = \dot{r}\bar{i} + r\dot{\theta}\bar{j} \\ (\ddot{r}\bar{i}) &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{i} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{j}\end{aligned}\quad (5)$$

Højresiden udtrykkes let i de polære koordinater, og vi får de to ligninger i radial (langs $\bar{i}$) og azimutal (langs $\bar{j}$) retning:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{l}r + f r\dot{\theta} \quad (6)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -f\dot{r} \quad (7)$$

Alle andre led end $\ddot{r}$, som optræder på venstresiderne, er fiktive accelerationer som følge af at koordinatsystemet følger med pendulet, og derfor er accelereret. I (6) er leddet $r\dot{\theta}^2$ centrifugalaccelerationen, hvor fortegnet skifter fordi det flyttes til højresiden. Denne acceleration er udadrettet og af nøjagtig samme form som (1). Bemærk at $\dot{\theta}$ er vinkelhastigheden. I (7) er leddet $-2\dot{r}\dot{\theta}$ Coriolisaccelerationen. Sammenlign dette led med (2) og bemærk at de begge har form; $2 \times$ vinkelhastighed $\times$ hastighed. Det sidste led $-r\ddot{\theta} = -r\dot{\omega}$ har ikke noget navn. Dette led er nul for jordens bevægelse fordi rotationen er konstant ($\dot{\Omega} = 0$). Endelig findes der som tidligere nævnt en fjerde fiktiv acceleration. Den kommer fra at nulpunktet for vores koordinatsystem er accelereret (f. eks. jordens centrum i sin bane omkring solen). Den acceleration er en størrelsesorden mindre end de øvrige, så den ser vi bort fra. Vi har altså i dette tilfælde direkte udledt formen for fiktive kræfter. Det koordinatsystem vi benytter er accelereret i forhold til et i forvejen accelereret system (pendulet i forhold til jordoverfladen og jordoverfladen i forhold til et inertialsystem). De sidst udledte fiktive accelerationer skal altså ikke forveksles med de fiktive accelerationer som følger af at jorden roterer. Vi skal have begge dele med.

Løsninger til bevægelsesligningerne

Lad os først finde løsninger til ligningerne (6) og (7) for tilfældet $f = 0$, altså et pendul ophængt på en planet som Venus, der (næsten) ikke roterer. Her kan vi med det samme finde to løsninger,

$$(r(t), \theta(t)) = (r_0 \cos \omega t, \theta_0) \quad (8)$$

og

$$(r(t), \theta(t)) = (r_0, \pm \omega t), \quad (9)$$

hvor $\omega = \sqrt{g/l}$. Den første løsning er det matematiske pendul. Den anden løsning svarer til en jævn cirkelbevægelse, fortegnet beskriver løsninger med rotation mod (+) og med (−) uret set ovenfra. De to forskellige typer løsninger er vist på figur 4. I begge tilfælde er pendulperioden givet som $T = 2\pi/\omega$. Det er overladt til læseren at vise at centripetalaccelerationen i det sidste tilfælde præcis er den som fremkommer ved tyngdekraftens projektion. At pendulperioden er den samme i de to tilfælde er indlysende, hvis vi et øjeblik betragter pendulet i et fast (x, y) -koordinatsystem. I dette er den jævne cirkelbevægelse intet andet end en superposition af det matematiske pendul i henholdsvis x - og y -retningen. Da pendulets periode som bekendt er uafhængig af amplituden fås alle linearkombinationerne, elliptiske baner, med samme periode. Dette ræsonnement holder kun for små vinkler, hvor $\sin \theta \approx \theta$, men det vender vi tilbage til i en senere artikel.



Figur 4. Professoren illustrerer de to svingningsløsninger for det to-dimensionale pendul. Den sidste løsning er blot en superposition af det matematiske penduls svingning i to på hinanden vinkelrette retninger. ©Hergé/Moulinsart: De syv krystalkugler.

Nu vender vi tilbage til situationen hvor f ikke er nul. En løsning til (6) og (7) kan fås ved at antage $(r(t), \theta(t)) = (r_0 \cos(\alpha t), A t)$, hvor α og A skal bestemmes. Indsættes dette fås,

$$(-\alpha^2 + g/l) \cos(\alpha t) = A(A + f) \cos(\alpha t) \quad (10)$$

$$(2A + f) \sin(\alpha t) = 0 \quad (11)$$

som har løsning, $A = -f/2$ og $\alpha^2 = g/l - f^2/4$. Hermed er Foucaultpendul-planets (det lodrette svingningsplan) omløbstid T_f , som kaldes en pendul-dag, bestemt fra $2\pi = |A|T_f = (f/2)T_f$ og vi får,

$$T_f = \frac{2\pi}{f/2} = \frac{2\pi}{\Omega \sin \Phi} = \frac{1 \text{ døgn}}{\sin \Phi} \quad (12)$$

hvor vi skal huske at 1 døgn i denne sammenhæng er et stjernedøgn = 23t 56 min. Hvorfor? Bemærk at denne løsning har negativ omløbsretning,

altså bevæger Foucault-pendulets svingningsplan sig med uret rundt (på den nordlige halvkugle). I København ($\Phi = 56^\circ N$) er omløbstiden 28t 53min. Vi kan umiddelbart, også uden at have fundet løsningerne, sammenligne størrelsesordenen for de forskellige led i ligningerne. Tidsskalaen for pendulets svingningstid må være af størrelsesorden $\tau_p = \sqrt{l/g}$, da det er den eneste størrelse af dimension tid vi kan konstruere fra de fysiske størrelser, der indgår (og det er jo netop pendulets svingningsperiode på nær en faktor 2π). For et pendul med $l = 10$ m har vi $\tau_p \approx 1$ s. Fra Coriolisaccelerationen har vi direkte tidsskalaen $\tau_f = f^{-1} \approx 10^4$ s, altså $\tau_f/\tau_p \approx 10^4$, så pendulet svinger frem og tilbage omkring 10.000 gange for hver gang pendulplanet roterer én gang rundt. (Hvis vi bruger den eksakte løsning for et 10 m pendul får vi $T_f/T_p = 16.717$).

Hvis vi i stedet sætter pendulet i bevægelse med en hastighed vinkelret på retningen til lodlinjen, kan løsninger som er jævne cirkelbevægelser også findes. Vi gætter på løsningen $(r(t), \theta(t)) = (r_0, At)$ og indsætter i (6). Bemærk at (7) er opfyldt for alle værdier af r_0 og A . Vi definerer igen $\omega^2 = g/l$ og får ligningen,

$$A^2 + fA - \omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$A = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \omega^2} \approx \pm\omega - \frac{f}{2} \quad (13)$$

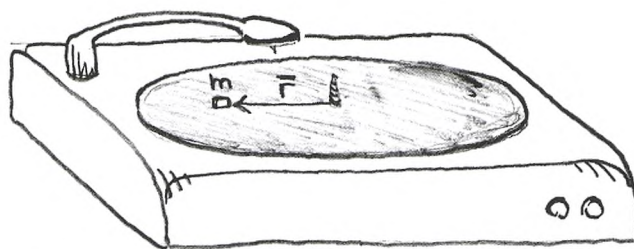
I dette tilfælde er symmetrien imellem rotation med og mod uret brudt. Som øvelse kan læseren opstille kraftbalancen i de to tilfælde. Disse to tilfælde har analogier i meteorologien.

Atmosfæren

Vi betragter vinden omkring et lavtryk. Her vil luften være påvirket af trykgradientkraften som peger ind imod centrum for lavtrykket. Trykgradientkraften erstatter tyngdekraften for pendulet, men er meget mindre. Trykgradientkraften, der presser luften fra områder med højt tryk mod områder med lavt tryk, er af samme størrelsesorden som Corioliskraften, så Corioliskraften spiller en stor rolle for vinden. I det meteorologiske tilfælde er f altså ikke længere en lille parameter.

Den ene løsning, rotation mod uret, kaldes et normalt lavtryk og i meteorologisk terminologi kaldes bevægelsen cyklonisk. Det er langt det mest almindelige. Den anden løsning, rotationen med uret (anti-cyklonisk) kaldes et anomalt lavtryk og er karakteriseret ved høje vindhastigheder. Hvorfor? Vink: opstil kraftbalancen imellem trykgradi-

entkraften, Corioliskraften og centrifugalkraften i de to tilfælde.



Figur 5. Partiklen ligger stille i forhold til stuen mens gramfonpladen roterer under partiklen

Havet

Et andet eksempel på Corioliskraftens indflydelse på bevægelser kommer fra oceanerne. Når en vandmasse strømmer, uden at være påvirket af kræfter i horisontal retning, vil impulsen i den horisontale bevægelse være bevaret. Det er en såkaldt inertialstrømning. Den fås som løsning til ligningerne (6) og (7) når der ikke er nogen kraft ind imod centrum (leddet $+r$ i (6) forsvinder). I det tilfælde får vi løsningen,

$$(r(t), \theta(t)) = (r_0, -ft). \quad (14)$$

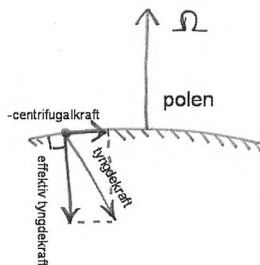
Det er altså en jævn (anti-cyklonisk) cirkelbevægelse, men med den dobbelte hastighed af Foucault-pendulplanets drejning, så omløbet tager kun en halv pendul-dag. Antag at vi havde en inertialstrømning i polarhavet præcis rundt om Nordpolen. En bølge i denne strømning vil bevæge sig med uret omkring polen på 1/2 dag. Dette er et overraskende resultat i forhold til hvad vi naivt skulle vente.

Den halve pendul-dag

Vi kan sammenligne med en gammeldags gramfon, figur 5. Hvis vi lægger en gnidningsfri partikel på gramfonpladen, således at partiklen ligger stille i forhold til stuen, så vil den bevare sin inertielle hastighed (som er 0). Set fra gramfonpladens koordinatsystem vil den udføre en jævn cirkelbevægelse med en omdrejningshastighed $(-\Omega)$ som er præcis det modsatte af gramfonens omdrejningshastighed (Ω) (altså en hel pendul-dag). Fra gramfonpladens synspunkt accelererer partiklen ind imod rotationsaksen i sin jævne cirkelbevægelse med accelerationen $\Omega^2 r$ hvor r er afstanden ind til aksen.

Denne acceleration følger af summen af centrifugalkraften på $\Omega^2 r$ væk fra rotationsaksen og Corioliskraften $2\Omega v = 2\Omega^2 r$ ind imod rotationsaksen.

Hvorfor får vi så en rotation med den dobbelte rotationshastighed i tilfældet med strømmingen på jorden? Det samme resultat ville vi få hvis vi forestillede os en kugle som rullede rundt om polen langs en breddegrad. Luk bladet, tag en kop te, og tænk over det inden du læser videre.



Figur 6. Jordens form er bestemt af at summen af tyngdekraften, som peger imod jordens centrum, og centrifugalkraften er vinkelret på overfladen. Denne form kaldes geoiden. Tyngdekraften tæt ved polen vil have en vandret komponent ind mod polen.

Svaret er at centrifugalkraften fra jordens rotation indgår i de kræfter, som virker vinkelret på bevægelsesfladen. Derfor skyldes acceleration i cirkelbevægelsen alene Corioliskraften. Den dobbelte omløbshastighed kommer af at bevægelsen foregår på den fladtrykte jord, geoiden, frem for på en kugleformet jord. Vi kan forstå situationen ved at betragte figur 6. Her er normalkraften til vandoverfladen, den effektive tyngdekraft, summen af tyngdekraften og centrifugalkraften. Hvis vi nu betragter situationen fra et inertialsystem, hvori jorden roterer, så vil tyngdekraft alene virke på partiklen. Tyngdekraften vil have en komponent parallel med overfladen rettet mod polen af størrelsen $\Omega^2 r$, nemlig modsat centrifugalkraften fra jordens rotation. Denne tiltrækning imod polen giver anledning til en jævn cirkelbevægelse omkring polen netop med rotationshastighed Ω . Da jorden roterer i dette inertialsystem med rotationshastigheden Ω , er partiklens rotationshastighed i forhold til jorden $\omega + \omega = 2\Omega$ (eller $\omega - \omega = 0$ hvis den bevæger sig samme vej rundt som jorden, altså ligger stille på jordoverfladen). Dette er et rigtigt godt eksempel på hvordan de fiktive kræfter kommer og går afhængigt af hvilket koordinatsystem vi betragter situationen fra.

Appendix

Coriolisledet i ligning (3) fremkommer fra

udtrykket $A_{C0} = -2\Omega \times \dot{\mathbf{r}}$ ved at bruge $\Omega = (\Omega \cos \Phi, 0, \Omega \sin \Phi)$ i et (øst-vest, nord-syd, op-ned) koordinatsystem beskrevet ved enhedsvektorerne $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Da bevægelsen foregår i det horisontale plan kan hastighedsvektoren skrives $\dot{\mathbf{r}} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, hvor u og v er hastighederne i de to horisontale retninger. Coriolisaccelerationen bliver $A_{C0} = -2\Omega(\cos \Phi \mathbf{i} + \sin \Phi \mathbf{k}) \times (u\mathbf{i} + v\mathbf{j})$. Det er overladt til læseren at udregne at den horisontale komponent af accelerationen bliver som angivet i ligning (3).

Corioliskraftens komponent vinkelret på planen, som er ubetydelig i forhold til tyngdekraften, kompenseres af snorkraften. Snorkraften vil, da snoren er spændt, hele tiden være netop så stor at bevægelsen forbliver i planen (eller rettere på kuglefladen). Den varierer derfor hele tiden og kaldes med et fint ord en bibetingelseskraft. Bibetingelsen er at bevægelsen skal foregå i planen.



Peter Ditlevsen forsker i turbulent flow, atmosfærens og klimaets dynamik. Derudover underviser han i den klassiske mekanik ved Niels Bohr Institutet.

Naturens Verden

– søger forfattere til artikler indenfor astronomi og fysik

Er du interesseret i at skrive populærvidenskabelige artikler om dit forskningsområde til Naturens Verden? Læserne vil nemlig meget gerne have mere fysik og astronomi.

Teksten bør kunne forstås uden specielle forudsætninger og være lettilgængeligt for enhver gymnasieelev og den alment orienterede læser, som interesserer sig for naturvidenskab.

Artikler bør inkl. illustrationer højst fylde 8 trykte sider, hvoraf ca. halvdelen er illustrationer. Se vejledning på www.naturens-verden.dk

Interesserede forfattere kan kontakte:
Lone Bruun, lb@lb_fm.dk, www.lb_fm.dk
Dr. Priemes vej 10, 1.tv., 1854 Frederiksberg C.
Tlf. 3324 0100 eller mobil 2175 6628.