

Tsunamiens fysik

Benny Lautrup, Niels Bohr Institutet

Den 26. december 2004 blev kystområderne omkring det Indiske ocean ramt af en tsunami, der forvoldte omfattende ødelæggelser og store tab af menneskeliv. Mange forestiller sig, at en tsunami må være en monster-bølge med en helt særpræget fysik, men som jeg skal demonstrere, er fysikken bag en tsunami helt ordinær. *En tsunami er simpelthen en lavvandsbølge med meget lille amplitude og meget stor bølgelængde.* Sådanne bølger har en enkel og velkendt form, der for eksempel kan findes beskrevet i [1, kap. 24]. I det følgende vil jeg indkredse fænomenet gennem vurderinger, der skulle give den korrekte størrelsesorden. I betragtning af usikkerheden på de data, der angår jordskælvet og den efterfølgende tsunami, er det sikkert så meget, der kan gøres uden at foretage egentlige numeriske simuleringer (se [2, 3, 4]). På grund af den aktuelle interesse har jeg forsøgt at anvende så autoritative net-henvisninger, som det har været muligt for mig at finde.

Jordskælvets størrelse

Epicentret for det indonesiske jordskælv lå omkring 160 km vest for Sumatras nordlige ende. Jordskælvets størrelse blev ud fra seismografiske målinger og efter nogen diskussion vurderet til at være $\mathcal{M} = 9.0$ på Richter-skalaen [5, 3]. Der findes en empirisk sammenhæng, kaldet Gutenberg-Richter formelen, mellem et jordskælvs størrelse og den energi, der udstråles til hele jordkloden i form af seismiske rystelser. Hvis energien E måles i joule (J), skrives Gutenberg-Richter formelen traditionelt som [5, 6],

$$\log_{10} E \approx 4.8 + 1.5 \mathcal{M} \quad (1)$$

For det aktuelle jordskælv giver formelen $E \approx 2 \times 10^{18}$ J, hvilket svarer til en eksplosion af omkring 500 millioner ton TNT¹. Dertil kommer den energi, som er involveret i de massive forskydninger af materiale i jordskorpen, men den er vanskeligere at vurdere.

Man kan få en ide om størrelsen af dette jordskælv ved at sammenligne med det samlede danske energiforbrug, som er på 0.65×10^{18} joule per år [8]. Alene jordskælvets seismiske udstråling kunne således forsyne Danmark med energi i 3 år. Da hele verdens energiforbrug er på 4×10^{20} joule per år [9], ville jordskælvet dog kun kunne forsyne menneskeheden med energi i omkring halvdagen.

Store jordskælv forekommer sjældnere end små. Antallet af jordskælv per år, som er større end $\mathcal{M}$,

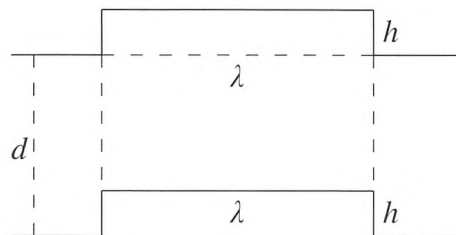
adlyder også en Gutenberg-Richter relation (se for eksempel [10, fig. 5]),

$$\log_{10} N \approx 8 - \mathcal{M}. \quad (2)$$

Ifølge denne formel forekommer et jordskælv med $\mathcal{M} \geq 9$ i gennemsnit kun en gang hvert tiende år.

Energien i et “vandbjerg”

Fordelingen af efterskælv viste, at seismiske forskydninger ramte hele 1200 km af den nord-syd gående brudlinie, hvor den Indiske plade glider under den Burmesiske [11]. Havbunden vurderes at have rejst sig nogle meter lodret opad i en bredde på 150 km øst for neddykningslinien, medens den vandrette forskydning er anslået til omkring 20 m [3].



Figur 1. Et kasseformet “vandbjerg” skabt ved en lodret forskydning h i havbunden over et område $\lambda \times L$, hvor λ er kassens bredde og L dens længde (ind i papiret). Havets dybde er d .

Når havbunden hurtigt forskydes i lodret retning, bliver vandet både flyttet og sat i bevægelse på en kompliceret måde. Men når skælvet er kortvarigt, virker det rimeligt at antage, at vandets totale mekaniske energi er den samme, uanset hvordan den er fordelt på potentiel og kinetisk energi. Vi vil derfor vurdere den mekaniske energi ved at antage, at hele vandsøjlen over det pågældende område blot forskydes lodret opad i takt med havbunden og ender med at være i hvile, således at den kun har potentiel energi (se figur 1). Da det stykke af vandsøjlen, som ligger mellem havbunden og havoverfladen er i opdriftsligevægt med det omgivende hav, vil den potentielle energi alene skyldes den del af vandsøjlen, der “stikker op over” havoverfladen.

Ud fra dette argument behøver vi altså blot beregne det arbejde, der skal udføres for at bygge et kasseformet “vandbjerg” ved at “skrabe” vand sammen fra den udstrakte havoverflade. Betegnes kassens højde med h , bredden med λ og længden med L , bliver kassens masse $M = \rho h \lambda L$, hvor ρ er vandets massefylde. Eftersom

¹Energien af meget store eksplosioner (for eksempel fra kernevåben) måles ofte i forhold til den energi, der frigøres i sprængning af et ton af sprængstoffet TNT (trinitrotoluen). Enheden 1 tonTNT er simpelthen fastsat til at være en milliard kalorier, altså 4.184×10^9 J [7].

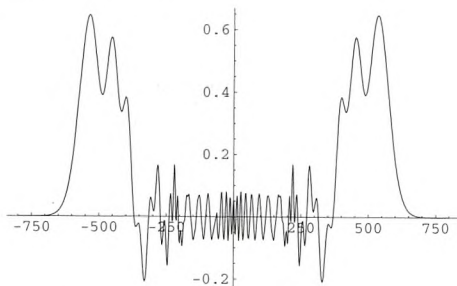
vandbjergets partikler i gennemsnit kun løftes $h/2$ over havoverfladen, bliver den potentielle energi,

$$E = Mg \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\rho g \lambda L h^2, \quad (3)$$

hvor g er tyngdeaccelerationen. Et kasseformet vandhul med samme dimensioner har i øvrigt den samme potentielle energi, fordi det kræver det samme arbejde at "grave" det ud af havoverfladen.

For den aktuelle tsunami tager vi $\lambda \approx 150$ km og $L \approx 1200$ km. Historiske data for lignende begivenheder [12] tillader os at gætte på $h \approx 5$ m, hvilket også er af nogenlunde samme størrelse som det russiske Tsunami Laboratory's simulering af havoverfladens maksimale højde i det Indiske hav [2]. Med $\rho \approx 1000$ kg/m³ og $g \approx 10$ m/s² bliver den totale energi, der er afsat i vandet, derfor ifølge (3) $E \approx 2 \times 10^{16}$ J. Dette svarer til cirka 1% af jordskælvets seismiske strålingsenergi og er i god overensstemmelse med en anden vurdering [11].

Efter at det udstrakte men ikke særlig høje vandbjerg er skabt, begynder det at synke sammen, og dets energi vil til sidst ende i overfladebølger, som hovedsagelig udbreder sig vinkelret på brudlinien. Det er nogle af disse bølger, der senere vil optræde på kysterne som tsunamier. Det er en meget kompliceret proces (se figur 2), som afhænger af jordskælvets karakter og forløb og af de lokale topografiske forhold.



Figur 2. Et forsøg på at simulere, hvorledes et vandbjerg kunne synke sammen og udsende to bølgetog i hver sin retning. Vandbjergets bredde var oprindelig $\lambda = 200$ og dets højde $h = 1$. Figuren er konstrueret ved at Fourier-transformere det kasseformede bjerg, tidsudvikle det under hensyntagen til dispersionen, og til slut transformere det tilbage igen.

Tsunamier er lavvandsbølger

For at komme videre, vil vi antage, at overfladebølgerne indeholder bølgelængder helt op til samme størrelse som bredden $\lambda = 150$ km af forstyrrelsen i havbunden. De længste bølger er altså meget længere end den gennemsnitlige havdybde i det indiske ocean, $d \approx 4$ km. Det er ikke nemt at vurdere, hvor meget af vandbjergets oprindelige energi der tildeles de længste bølger, men vi skal i det følgende anvende en bølgeamplitude af størrelsen $a = 1.5$ m. I en tsunami er amplituden meget mindre end dybden, som er meget mindre end bølgelængden, hvilket kan udtrykkes

gennem ulighederne,

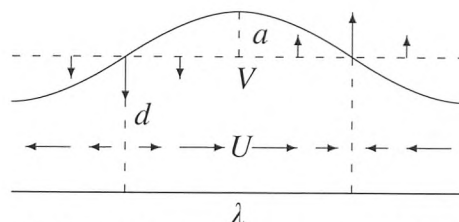
$$a \ll d \ll \lambda, \quad (4)$$

En tsunami er derfor en *lavvandsbølge med meget stor bølgelængde og meget lille amplitude*. Det faktiske forhold mellem bølgelængde og dybde i de bølger, vi betragter her, er $\lambda/d \approx 40$, medens forholdet mellem dybde og amplitude er $d/a \approx 3000$.

Ud over bølgelængden λ og amplituden a , karakteriseres en overfladebølge også ved dens periode τ . I en halv periode bliver en bølgetop til en bølgedal, således at den lodrette hastighed må være af størrelsen (se figur 3),

$$V \sim \frac{a}{\tau} \quad (5)$$

I denne og de følgende vurderinger er alle numeriske faktorer såsom 2 og π kastet bort. Der er altså ikke tale om egentlige ligninger, men om sammenligninger af størrelsesordener, hvilket signaleres af tegnet $\sim$ (for omtrentlighed).



Figur 3. En enkelt periode af en overfladebølge, der bevæger sig mod højre. Bemærk de specielle strømningsforhold, som får bølgetoppen til at flytte sig λ i tiden τ .

I et tidsrum af størrelsen τ må hele bølgetoppens oprindelige volumen være strømmet ned i området under den, men da vand er usammentrykkeligt må det også have forladt området igen i vandret retning. Betegnes den typiske vandrette strømningshastighed under bølgetoppen med U , vil vandet i tidsrummet τ flytte sig distancen $U\tau$ i vandret retning, så at det flyttede volumen bliver $U\tau Ld$. Da dette volumen må være sammenligneligt med det nedstrømmende volumen, som cirka er $a\lambda L$, fås

$$U\tau Ld \sim a\lambda L, \quad (6)$$

og dermed

$$U \sim \frac{a\lambda}{\tau d}. \quad (7)$$

Eftersom $\lambda \gg d$, er den vandrette strømningshastighed altså meget større end den lodrette $V \sim a/\tau$. Læg også mærke til, at alt vandet under bølgen sættes i bevægelse med typisk strømningshastighed U , fordi havet er så lavvandet i sammenligning med bølgens størrelse. I dybvandsbølger med $\lambda \ll d$ sættes kun det øverste overfladelag af tykkelsen $\lambda/2\pi$ i bevægelse. Generelt kan man vurdere dybvandsbølgers egenskaber ved at erstatte d med $\lambda/2\pi$ [1, kap. 24].

I en overfladebølge omsættes potentiel og kinetisk energi hele tiden til hinanden, og der må derfor

i gennemsnit være lige meget potentiel og kinetisk energi i bølgen. Med andre ord må der for en enkelt bølgelængde gælde, at

$$\rho \cdot \lambda L d \cdot U^2 \sim \rho \cdot \lambda L a \cdot g a. \quad (8)$$

På venstre side har vi vurderet den kinetiske energi af vandet under bølgen som massen gange hastighedens kvadrat, og på den højre side har vi vurderet den potentielle energi af bølgetoppen og bølgedalen på samme måde som for vandbjerget. Alle simple numeriske faktorer er igen kastet bort.

Indsættes hastigheden (7) kan vi løse efter perioden τ og finder dermed den såkaldte *dispersionsrelation for lavvandsbølger*,

$$\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{gd}}. \quad (9)$$

Her er omtrentlighedstegnet erstattet med et rigtigt lighedstegn, fordi en mere omhyggelig beregning med alle faktorer inkluderet viser, at det er korrekt [1, s. 344].

Bølgetoppenes hastighed, også kaldet *fasehastigheden*, er som for alle bølger givet ved forholdet mellem bølgelængde og periode,

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{gd}. \quad (10)$$

Vælger vi $\lambda = 150$ km og $d = 4$ km, finder vi fasehastigheden $c = 200$ m/s $= 720$ km/h, hvilket er af samme størrelse som et sædvanligt jetflys hastighed. Perioden bliver $\tau = 750$ s, altså omkring 12 minutter. Til gengæld bliver den horisontale strømningshastighed kun $U \sim 8$ cm/s, medens den vertikale bliver af størrelsen millimeter per sekund.

Disse tal er allesammen omtrentlige og afhænger af valget af input-parametre, men er nok ret typiske for fænomenet. Satellitbilleder synes at pege på en noget større bølgelængde ($\lambda \approx 400 - 500$ km) og lavere amplitude ($a \approx 60$ cm) end brugt her [11]. Hertil skal det dog bemærkes, at fra at være en næsten retlinet bølge, bliver tsunamien mere og mere buet, efterhånden som den skrider frem. Da energien er nogenlunde konstant, må en sådan forlængelse af bølgen kompenseres gennem en formindskelse af amplituden.

I en tsunami sættes enorme vandmasser således i bevægelse med forholdsvis lille hastighed. Med en bølgelængde på hundreder af kilometer mærkes der intet til en lille ændring i havoverfladen på en meter eller to, når man er langt til havs². Men selv om en tsunami er et ganske blidt fænomen ude på havet, så gør dens enorme energi den til et monster, når den rammer en kystlinje.

²Med moderne navigationsinstrumenters høje præcision burde den lille højdeforskel og den langsomme strømning over lange tidsrum dog kunne registreres.

En tsunami-bølges energi

Den totale energi i en enkelt bølgelængde af en harmonisk bølge kan vurderes som i (3), og når alle numeriske faktorer inkluderes bliver den [1, p. 351]

$$E = \frac{1}{2} \rho g \lambda L a^2. \quad (11)$$

Tages $L = 1200$ km, $\lambda = 150$ km og $a = 1.5$ m, fås $E \approx 2 \times 10^{15}$ J, hvilket udgør omkring 10% af den samlede energi, jordskælvet tilførte vandet. I betragtning af, at der formodentlig dannes mere end en enkelt bølgetop, og at der også efterlades et spektrum af bølger med mindre bølgelængde, virker det ganske rimeligt og passer meget godt med simuleringen fra Tsunami Laboratory [2].

Per meter af bølgens transversale længde L bliver energien $E/L \approx 2 \times 10^9$ J/m. Med en sådan energi til rådighed kan man løfte 200.000 tons stof en meter lodret op. Måske bliver det endnu klarere, når man ser på energitransporten i bølgen. I gennemsnit bliver den $E/L\tau \approx 2 \times 10^6$ W/m, så når bølgen rammer kysten, afleverer den af størrelsen megawatt per meter.

Dispersion

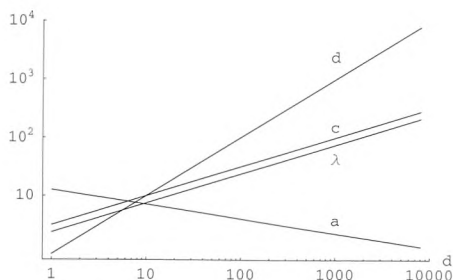
Det interessante ved lavvandsbølger er, at fasehastigheden kun afhænger af dybden, men ikke af bølgelængden. Alle lavvandsbølger bevæger sig i første tilnærmelse med samme hastighed, og en sammensat bølge, som indeholder mange lange bølgelængder, vil derfor bevare sin form. En ideel lavvandsbølge er med andre ord *dispersionsfri*.

Men det er kun en idealisation. Når bølgelængden bliver sammenlignelig med dybden, $\lambda \sim 2\pi d$, indtræder der *dispersion*. Den relevante parameter for, hvornår dispersionen sætter ind, er faktisk ikke særlig stor i nærværende tilfælde, nemlig $\lambda/2\pi d \approx 6$. En beregning med de korrekte numeriske faktorer inkluderet viser, at en lavvandsbølge med bølgelængde på 100 km har omkring 0.5% lavere fasehastighed end en med bølgelængde 150 km. I løbet af en periode på 12 minutter vil den derfor falde knap en kilometer bagud i forhold til den længere bølge. Over lange tidsrum bevirker dispersionen, at det er de allerlængste bølger, der når først frem. Forudsat amplituden er den samme (hvad den nok ikke er), vil de længste bølger have mest energi og dermed forvolde størst skade.

Når tsunamien nærmer sig land

Lad os forestille os en lavvandsbølge med en uendelig række af bølgetoppe på vej ind mod land. Når havdybden bliver mindre, falder fasehastigheden som $c \sim \sqrt{d}$. Da bølgetoppene ikke kan ophobes noget sted, må perioden τ mellem toppene være den samme hele vejen ind. Dette betyder ifølge dispersionsrelationen

(9), at bølgelængden også kortes ned som $\lambda \sim \sqrt{d}$. Hver bølge indeholder energien (11), og da lange bølger så godt som ikke taber energi undervejs, vil bølgens energi også være konstant hele vejen ind. Det betyder, at amplituden må vokse som $a \sim 1/\sqrt{\lambda} \sim d^{-1/4}$, kaldet Greens lov.



Figur 4. Variation i bølgeparametrene som funktion af dybden d , når $a = 1.5$ m, $\lambda = 150$ km og $c = 200$ m/s for $d = 4000$ m. Tilnærmelsen bliver ugyldig, når amplituden bliver sammenlignelig med vanddybden, altså cirka under det punkt, hvor linien "d" krydser linien "a". Bemærk, at figuren kan vildlede en smule, fordi de forskellige størrelser måles i forskellige enheder (angivet ovenfor).

Lad os som før betragte en tsunami med periode på 12 minutter, som på dybden $d = 4000$ m har bølgelængde $\lambda = 150$ km, fasehastighed $c = 200$ m/s og amplitude $a = 1.5$ m. Når den ankommer på dybden $d = 40$ m, vil den have bølgelængde $\lambda = 15$ km, fasehastighed $c = 20$ m/s = 72 km/h og amplitude $a = 5$ m (se figur 4). Længere inde mod land rejser bølgen sig endnu mere, og bevæger sig endnu langsommere. Når amplituden bliver sammenlignelig med dybden, sætter ikke-lineære effekter ind og får ofte bølgen til at vælte og fråde, før den løber op på stranden. Her frigøres en stor del af dens enorme energi på omkring en gigajoule per meter og medfører omfattende destruktion af kysten.

Konklusion

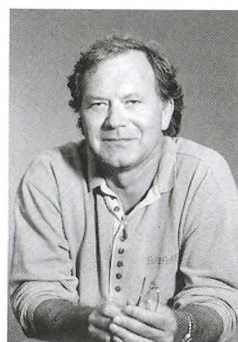
Tsunami-bølger er lavvandsbølger med meget store bølgelængder, fasehastigheder og perioder. Medens sædvanlige dønninger har bølgelængder på måske 150 meter, vil tsunamien på dybt vand have en bølgelængde på måske 150 kilometer og vare 12 minutter. Når en sådan tsunami-bølge går på land, vil dens periode være den samme som på dybt vand, medens hastigheden og bølgelængden bliver mindre og amplituden større. Resultatet er, at vandspejlet hæves adskillige meter i omkring en halv periode, og stranden derved oversvømmes. Hvis der kommer flere bølger efter hinanden, vil bølgedalene afstedkomme en kraftig udstrømning mod havet.

Tsunami-bølgers opførsel er stærkt afhængig af lokale topografiske forhold. I det indonesiske jordskælv gik brudlinien fra syd til nord, og tsunami-bølgerne bevægede sig hovedsagelig mod øst og vest. Det forklarer formodentlig, at Bangladesh slap næsten uskadt fra begivenheden, selv om oversvømmelser ofte plager dette lavtliggende land.

Afhængigt af den seismiske forstyrrelses karakter ankommer en bølgedal sommetider først og giver anledning til en sænkning af vandspejlet med kraftig udsugning på stranden. I den aktuelle tsunami så man dette fænomen især øst for brudlinien, for eksempel i Thailand, men også på vestkysten af Sri Lanka [13]. Folk på stranden reagerede dog kun i få tilfælde hensigtsmæssigt på denne advarsel.

Litteratur

- [1] B. Lautrup, "Physics of Continuous Matter", Institute of Physics Publishing (2005).
www.lautrup.nbi.dk/continuum
- [2] Webside fra det russiske Tsunami Laboratory's webside
tsun.sscc.ru/tsulab/20041226.htm
- [3] Websider fra den amerikanske National and Atmospheric Administration (NOAA).
www.pmel.noaa.gov/tsunami/sumatra20041226.html
www.ngdc.noaa.gov/seg/hazard/tsu.shtml
wcawtc.arh.noaa.gov/IndianOSite/IndianO12-26-04.htm
- [4] Webside fra den danske Teknologiportal.
www.teknologiportal.dk/EN/Teknologi/Energy+and+Environment/Energy+management+-+Environmental+management/-Tsunami.htm
- [5] Websider fra det amerikanske US Geological Survey.
earthquake.usgs.gov/eqinthenews/2004/usslav/neic.usgs.gov/neis/general/measure.html
- [6] Om seismisk udstråling af energi.
seismo.um.ac.ir/education/Radiated%20Seismic%20Energy%20and%20Energy%20Magnitude.htm
- [7] Om enheden "ton TNT".
physics.nist.gov/Pubs/SP811/appenB9.html
- [8] Om det danske energiforbrug.
www.energioplysningen.dk/statistik/forbrug.htm
- [9] Det amerikanske energiministerium (DOE)'s oplysninger om verdens energiforbrug.
www.eia.doe.gov/oiaf/ieo/highlights.html
- [10] Om relationen mellem jordskælvs frekvens og størrelse.
www.physicstoday.org/pt/vol-54/iss-6/p34.html#ref
- [11] Generel beskrivelse af jordskælvet og tsunamien.
en.wikipedia.org/wiki/2004_Indian_Ocean_earthquake
- [12] En faglig artikel om jordskælv og tsunamier.
C. Synolakis, Ph. Liu, G. Carrier, and H. Yeh (1997), "Tsunami-genic Sea-Floor Deformations", *Science* bind 278, s. 598-600
- [13] Om vandets tilbagetrækning før tsunamien ankomst
Get off the beach - now!, *Nature* bind 433, s. 354 (27 January 2005)



Benny Lautrup begyndte sin forskning inden for højenergifysik, men skiftede i midten af 1980'erne til neurale netværk og var i en årrække leder af Center for Kunstige Neurale Netværk. I de senere år har hans forskning mest angået fluid mekanik og komplekse systemer. Han er aktuell med lærebogen "Physics of Continuous Matter" (ref. 1).