

Einsteins odysse: Fra speciel til almen relativitetsteori

Af Helge Kragh, Center for Videnskabsstudier, Aarhus Universitet

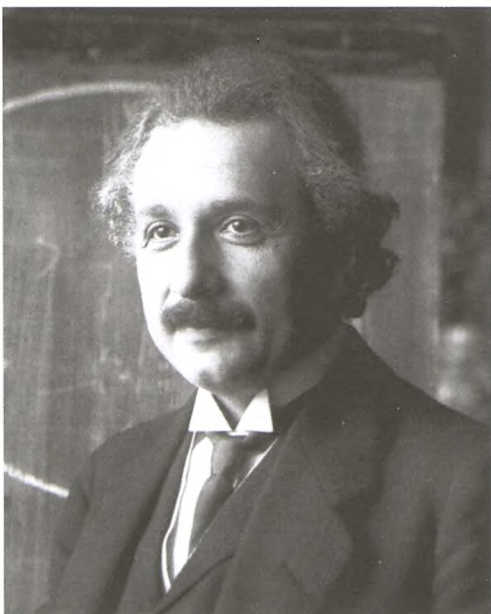
I november 1915 kunne Einstein efter mange års intenst arbejde fremlægge den endelige version af sin nye teori for tyngdekraften, der markerer et af videnskabens absolutte højdepunkter. Processen fra den specielle til den generelle teori var hård, til tider næsten en mental tortur. Lad os følge Einstein på hans rejse til den teori, der snart fylder 100 år.

1907-11: Ækvivalensprincippet

I årene efter Einsteins gennembrud i 1905 blev hans relativitetsteori – der endnu ikke var “speciel” – udviklet af især Max Planck og Hermann Minkowski. Sidstnævnte formulerede den i 1907 som en firedimensional teori for rumtiden, hvilket stadig er standardversionen i lærebøger. Derimod var Einstein oprindeligt modstander af den nye version. I Minkowskis formulering kan metrikken for rumtiden, dvs. afstanden ds mellem to nabopunkter, skrives som

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2, \quad (1)$$

hvor $x_4 = ict$ og c er lysets invariante hastighed i vakuum. Det stod hurtigt klart, at teorien intet havde at sige om gravitationsfænomener, hvilket man ellers ville forvente om en virkelig fundamental teori. Einstein forsøgte oprindeligt at indpasse gravitationen i den eksisterende relativitetsteoris rammer og først senere, da dette viste sig umuligt, at udvide teorien til en almen eller generel relativitetsteori. Hvordan denne end så ud, så måtte den have den oprindelige teori som grænsetilfælde for gravitationsfelter af forsvindende styrke. Dette korrespondenskrav var dog slet ikke nok til at give en ide om den endnu ukendte gravitationsteori.



Figur 1. Einstein i 1921.

Ideen til en generaliseret relativitetsteori fremkom i en artikel fra 1907, hvorom Einstein senere skrev:

“Jeg indså, at alle naturlovene, undtagen gravitationsloven kunne diskuteres inden for rammerne af den specielle relativitetsteori. Jeg ønskede at finde ud af grunden hertil, men det var svært for mig. ... Pludselig kom gennembruddet en dag. Jeg sad i en stol i mit patentkontor i Bern og pludselig slog en tanke ned i mig: Hvis et menneske falder frit, så føler han ikke sin egen vægt. Jeg var rystet. Dette simple tankeeksperiment gjorde et dybt indtryk på mig. Det førte til teorien for gravitationen.”

I 1919 beskrev han ideen som intet mindre end “den lykkeligste tanke i hele mit liv.” Pudsigt nok kom inspirationen til både Newtons og Einsteins gravitationsteori fra et fald: i Newtons tilfælde fra et frit faldende æble (hvis man skal tro traditionen) og i Einsteins tilfælde fra et frit faldende menneske.

Einsteins idé var på sin vis gammel, idet det siden 1700-tallet havde været anerkendt, at et legemes træge eller inertielle masse m_i er den samme som dets tunge eller gravitationelle masse m_g :

$$m_i = m_g \quad (2)$$

Førstnævnte størrelse er den masse, der indgår i Newtons kraftlov, hvor en ydre kraft F bibringer den en acceleration på $a = F/m_i$. Derimod udtrykkes m_g gennem gravitationsloven, som det sker ved vejning i et tyngdefelt. Allerede Newton havde i sin *Principia* fra 1687 vist, at dette såkaldte svage ækvivalensprincip var gyldigt ned til en nøjagtighed af 1 %, hvilket han gjorde ved at sammenligne svingningstiden af penduler lavet af træ og guld. Omkring 1905 var princippet bekræftet med langt større præcision af især den ungarske fysiker Roland Eötvös.

Men en ting er et empirisk faktum, noget andet er dets forklaring. Einstein var den første til at hævde, at (2) gælder eksakt og at ækvivalensen er et alment princip, der må kunne forstås ud fra en fundamental teori. Det afgørende i det svage ækvivalensprincip er, at ethvert mekanisk eksperiment, der foretages i et system i konstant acceleration, må give samme resultat som i et eksperiment i et system, der befinder sig i et homogent tyngdefelt med modsat rettet tyngdeacceleration. Hvad

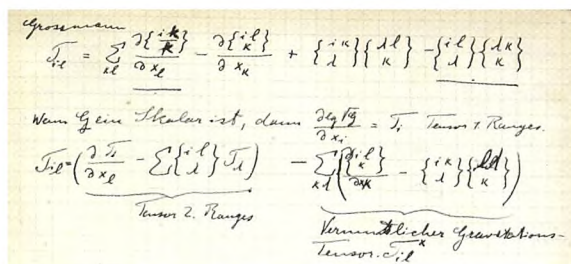
mere er, Einstein generaliserede princippet til en stærk version, der er gyldig for *ethvert* eksperiment, mekanisk eller ej.

Allerede i 1907 antydede Einstein to eksperimentelle konsekvenser af ækvivalensprincippet, men først i en artikel fra 1911 diskuterede han klart disse konsekvenser. Samtidig slog han fast, at ækvivalensprincippet ikke kan udledes af den specielle relativitetsteori, hvorfor han foreslog en første version af en udvidet teori på basis af princippet. Denne version var endnu baseret på ideen om et statisk gravitationsfelt og en plan rumtid som givet ved Minkowski-metrikken (1). Den førte til det ejendommelige resultat, at lysets hastighed afhang af gravitationspotentialet. Ikke desto mindre kunne han bruge resultatet til at beregne, hvordan lyset afbøjes i nærheden af en tung masse. Han fandt, at hvis en lysstråle nærmer sig massen M i den korteste afstand D , så vil den afbøjes med vinklen

$$\varphi = \frac{2GM}{Dc^2}, \quad (3)$$

hvor G er Newtons konstant. Einstein tog forudsigelsen alvorligt og opfordrede astronomerne til at gøre det samme, selv om afbøjningen for Solens vedkommende ville være ganske lille, nemlig $\varphi = 0,83''$.

I foråret 1912 blev Einstein endvidere klar over, at hvis lyset afbøjes af et massivt legeme, så vil en stjerne placeret på synslinjen mellem iagttageren på Jorden og en fjern lyskilde kunne fungere som en "gravitationslinse." Linsen vil levere et forstørret og dobbelt billede af kilden. Einstein skrev disse overvejelser ned i sin notesbog, hvorefter han glemte alt om dem, indtil han i 1936 skrev en artikel om emnet. I dag er den gravitationelle linseeffekt af meget stor astronomisk og kosmologisk betydning. Den går altså tilbage til 1912, før Einstein havde formuleret sin generelle relativitetsteori.



Figur 2. Side fra Einsteins notesbog fra Zürich, 1912. Vejledt af Grossmann anvender han tensorer til sine ligninger for gravitationsfeltet.

Ud fra ækvivalensprincippet alene viste Einstein i 1911, at når lys med frekvens ν "falder" i et gravitationsfelt, hvor ændringen i potentiale er $\Delta\Phi$, da vil lysets frekvens ændres med $\Delta\nu/\nu = \Delta\Phi/c^2$. Hvis lys udsendes fra overfladen af en stjerne med masse M og radius R , og modtages på Jorden (m , r), vil resultatet blive en rødforskydning på

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \cong -\frac{G}{c^2} \left(\frac{M}{R} - \frac{m}{r} \right) \quad (4)$$

Teorien fra 1911 var interessant, men den viste sig hurtigt at være en blindgyde snarere end en vej frem mod en bedre teori.

1912-14: I relativitetens kviksand

Vejen ud ad blindgyden kom via matematikken. I efteråret 1912 indså Einstein, at den nye gravitationsteori måtte baseres på de ideer om ikke-euklidisk geometri, der går tilbage til Karl Friedrich Gauss og som hans landsmand Bernhard Riemann i midten af 1800-tallet havde generaliseret til en teori for, hvad der blev kendt som tensorer. Riemann indførte centrale begreber som krumningstensor og den metriske tensor til karakteristik af et rum af vilkårligt mange dimensioner.

Einstein var ikke oprindeligt opmærksom på differentialgeometriens relevans for sit projekt. Hans forståelse af de uvante matematiske metoder skyldtes i høj grad ungdomsvennen Marcel Grossmann, der var matematikprofessor i Zürich og med hvem Einstein indledte et samarbejde. Desuden forbedrede han sine kundskaber gennem en faglig korrespondance med den italienske matematiker Tullio Levi-Civita, der var en af fædrene til den moderne differentialgeometri og stærkt interesseret i Einsteins projekt.

Den abstrakte matematiks betydning kom som en overraskelse for ham. Som han i 1912 skrev til sin kollega i München, Arnold Sommerfeld: "I hele mit liv har jeg aldrig arbejdet så hårdt; jeg er blevet besjælet af en stor respekt for matematikken, hvis mere subtile dele jeg indtil nu, i min enfoldighed, havde anset for den rene luksus." Samarbejdet med Grossmann førte i 1913 til en vigtig artikel, hvori de to foreslog et nyt udkast (*Entwurf*) til gravitationsteorien baseret på brugen af tensorer og ikke-euklidisk rumtid. Einstein fortalte senere om, hvordan han blev ført på sporet af den nye og – skulle det vise sig – særdeles frugtbare begrebsramme. Udgangspunktet var igen ækvivalensprincippet:

"Hvis alle [accelererede] systemer er ækvivalente, så kan den euklidiske geometri ikke være gyldig i dem alle. At udelade geometrien og bibeholde de fysiske love svarer til at beskrive tanker uden ord. Vi må have ord, før vi kan udtrykke tanker. Hvad må vi søge efter i denne forbindelse? Problemet var uløseligt for mig indtil 1912, da jeg pludselig indså, at Gauss' teori for flader indeholdt den nøgle, der kunne åbne op for mysteriet. ... Jeg forstod, at geometriens grundlag havde fysisk betydning."

Artiklen fra 1913 bestod af to dele, en fysisk skrevet af Einstein og en matematisk skrevet af Grossmann, og karakteristisk nok blev den publiceret i *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. Med *Entwurf*-teorien blev der for første gang udformet en teori, hvor rumtiden optræder som en dynamisk størrelse og ikke som en uforanderlig baggrund for fysiske hændelser. Det er netop en central pointe i den generelle relativitetsteori, at hændelser ikke foregår med en fastlagt rumtid som baggrund. Den scene, hændelserne udspiller sig på, er selv dynamisk og foranderlig.

I Riemanns teori var metrikken i almindelighed givet ved udtrykket

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (5)$$

hvor $g_{\mu\nu}$ er den såkaldte metriske tensor og der underforstås summering over de to indekser fra 1 til 4. Den simple Minkowski-metrik (1) kan karakteriseres ved diagonalelementerne $g_{\mu\mu} = (1, 1, 1, -c^2)$, mens $g_{\mu\nu} = 0$ for $\mu \neq \nu$. I den teori, Einstein og Grossmann fremlagde, svarede den symmetriske $g_{\mu\nu}$ tensor til Newtons gravitationspotentiale Φ , sådan som det indgår i Poissons ligning for et legeme med massefylden ρ :

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho \quad (6)$$

Men mens Newton og Poisson kunne klare sig med et enkelt potentiale, var der nu 10 af dem:

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + \dots 2g_{34} dx_3 dx_4 + g_{44} dx_4^2 \quad (7)$$

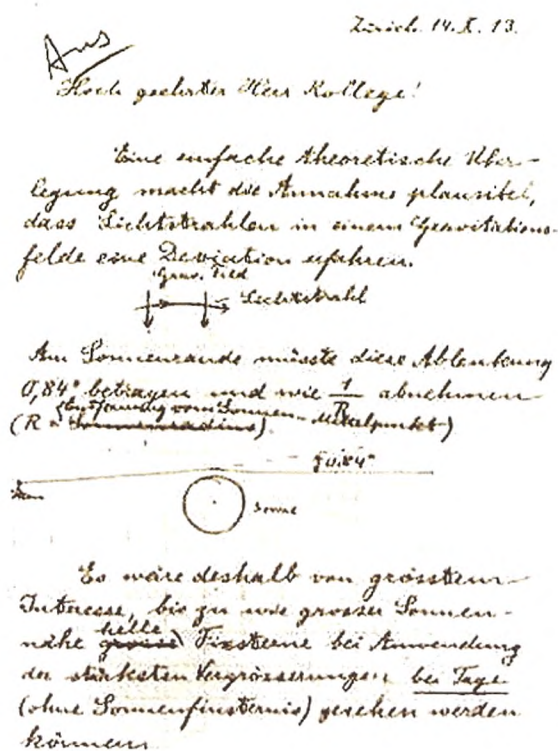
Som Einstein forklarede, så vil et legeme i et gravitationsfelt bevæge sig ad geodætiske baner svarende til, at det bevæger sig den kortest mulige afstand i den rumtid, der er krummet af gravitationen. I et euklidisk rum svarer den geodætiske bane til en ret linje, som ved inertiel bevægelse.

Problemerne med *Entwurf*-teorien var ikke så meget af matematisk som af fysisk art. Ifølge relativistisk tankegang har koordinater ingen virkelig eksistens i naturen, men er blot hjælpemidler til at beskrive den. I overensstemmelse hermed mente Einstein, at ligningerne for de fysiske love måtte have samme form i ethvert koordinatsystem, hvilket betegnes som kravet om generel kovarians. Ligningerne fra 1913 syntes imidlertid ikke at have denne egenskab. Eller rettere, hvis de blev bragt på kovariant form, så førte det til problemer med hensyn til klassiske dyder som kausalitet og determinisme, og ligningerne resulterede ikke længere i Newtons gravitationslov som en første tilnærmelse. Desuden overbeviste Einstein sig om, at de kovariante ligninger ikke entydigt kunne bestemme gravitationsfeltet i et stoffrit område af rummet. Dette "hulargument" og andre indvendinger af en fysisk art fik ham i første omgang til at opgive kravet om streng kovarians, ja endda til at opfatte manglen herpå som en nødvendighed.

I foråret 1913 var han fuld af optimisme og mente, at han nu havde løst gravitationens mysterier. Til vennen Paul Ehrenfest i Holland skrev han, at han havde en "indre følelse" af, at teorien var sand. Einsteins indre følelser viste sig ofte at være rigtige, men i dette tilfælde snød de ham. Et halvt år senere måtte han erkende, at optimismen var ubegrundet og at *Entwurf*-teorien ikke var konsistent. Han var tilbage i kviksandet og det tog mere end et år, før han fik kæmpet sig op af det.

Fordybet som Einstein var i den nye og abstrakte matematik, så glemte han ikke, at der var tale om en fysisk teori og at den derfor måtte have testbare konsekvenser. I udformningen fra 1913 ledte den til samme forudsigelser som den mere primitive version fra 1911, dvs. til gravitationel rødforskydning og afbøjning af lysstråler omkring tunge masser. I et brev

til den amerikanske astronom George Hale fra oktober 1913 gjorde Einstein ham opmærksom på forudsigelsen (3), der som konsekvens har, at "Ved Solens rand må afbøjningen være 0,84" og den vil aftage som $1/R$ (hvor R er afstanden til Solens midte)". Einstein ville gerne vide, om effekten kunne påvises også uden en solformørkelse, hvilket Hale dog benægtede. Hvis den overhovedet skal kunne iagttages, kræver det en total solformørkelse, sådan som det skete ved påvisningen i 1919. Da Einstein skrev brevet til Hale, var han også i færd med at undersøge, om gravitationsteorien kunne forklare Merkurs anomale bevægelse omkring Solen (se nedenfor). Det lykkedes dog ikke, for ganske vist kunne han i 1914 beregne det ekstra bidrag til Merkurs periheldrejning til 18" per 100 år, men det var mindre end halvdelen af den målte effekt.



Figur 3. Einsteins brev til Hale af 14. oktober 1913 vedrørende muligheden for at påvise stjernelysets afbøjning om Solen.

1915-16: Forløsning

Efter mange genvordigheder og et intenst arbejde lykkedes det i efteråret 1915 Einstein at bringe sit ambitiøse projekt på ret kurs, hvilket skete i form af fire meddelelser til det prøjsiske videnskabsakademi i Berlin, hvor de i november blev præsenteret med en uges mellemrum og kort efter forelå publiceret i akademiets *Sitzungsberichte*. Da det hele var slut og sejren hjemme, skrev han til Sommerfeld om denne hektiske periode af kreativ tænkning: "Den sidste måneds tid har været en af de mest spændende og anstrengende i hele mit liv, men også en af de mest succesrige." I sin meddelelse fra 11. november formulerede Einstein teorien i form af generelt kovariante ligninger og viste, i modsætning til hvad han tidligere havde troet, at de faktisk kunne

reduceres til Newtons lov. Han sagde nu endegyldigt farvel til *Entwurf*-teorien, som han erkendte var en fejltagelse.

Ugen efter kom så det virkelige gennembrud, idet han kunne vise, at lysafbøjningen omkring Solen måtte være ca. 1,7", altså det dobbelte af hvad han tidligere havde beregnet. Af endnu større betydning var det, at han nu for første gang kunne beregne en værdi for Merkurs præcession, der stemte med de astronomiske målinger. Resultatet gjorde et voldsomt indtryk på ham, for nu vidste han, at han havde ret. Det var, som om naturen havde talt til ham. "Mine vildeste drømme er blevet opfyldt," skrev han eksalteret i et brev. "I et par dage var jeg helt overvældet af ophidselse og lykke." Ved en anden lejlighed sagde han, at resultatet havde givet ham hjertebanken.

Den 25. november 1915 fremlagde Einstein så sine endelige ligninger for gravitationsfeltet – de ganske samme ligninger der benyttes i dag, om end udtrykt i en anden notation. Kvalitativt udtrykker ligningerne, at der er en bestemt relation mellem rumtidens geometri og indholdet af energi-impuls i form af bl.a. stof, tryk og elektriske ladninger. Rumtiden ændrer sig under indflydelse af stof og energi, og rumtidens krumning manifesterer sig som et gravitationsfelt. I den matematiske formulering er de relevante størrelser symmetriske 4×4 tensorer af anden rang. De 10 ligninger kan samlet skrives som

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (8)$$

hvor venstresiden er geometrisk, mens den højre side er fysisk. Størrelsen $T_{\mu\nu}$ er energi-impuls-tensoren, mens $R_{\mu\nu}$ (kaldet Ricci-tensoren) og den skalare størrelse R , der er afledt af $g_{\mu\nu}$ og $R_{\mu\nu}$, angiver rumtidens krumning. Endelig er konstanten κ en gravitationskonstant, der er proportional med Newtons konstant:

$$\kappa = 8\pi G/c^2 \quad (9)$$

Einsteins ligninger tilfredsstiller bevarelse af energi-impuls, som matematisk udtrykkes ved, at divergensen af $T_{\mu\nu}$ forsvinder. I sin meddelelse af 25. november 1915 medtog Einstein denne bevarelseslov, men endnu uden at indse, at den faktisk følger af feltligningerne.

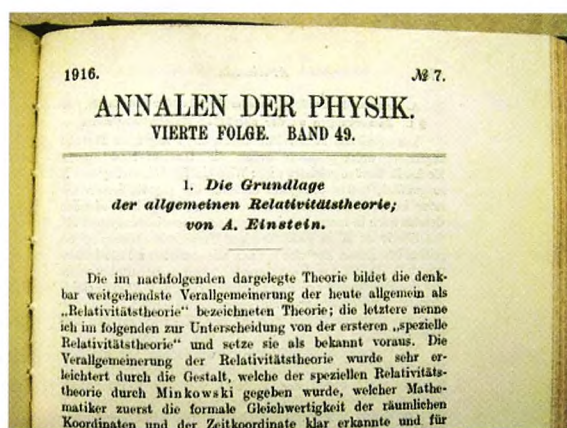


Figure 4. Einsteins artikel fra 1916 om den generelle relativitetsteori.

Selv om Einsteins færdige ligninger altså stammer fra 1915, kan man med en vis rimelighed hævde, at den generelle relativitetsteori stammer fra 1916. Det var nemlig først i en stor artikel i maj-nummeret af *Annalen der Physik*, at Einstein gav en samlet og omfattende fremstilling af teorien. Denne klassiske afhandling, der har titlen "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" (Den Almene Relativitetsteoris Grundlag) slutter med en kort og præcis gennemgang af teoriens forudsigelser i form af de tre tests. For almindelige læsere skrev Einstein i 1916 desuden en fremragende bog om den nye relativitetsteori, der året efter udkom på tysk og i 1920 i engelsk oversættelse.

I stedet for at hvile på sine laurbær, udvidede Einstein i 1917 sin gravitationsteori til en kosmologisk teori for det lukkede univers. Dette gjorde han ved at indføre et yderligere led i feltligningernes venstre side, der virkede som en frastødende kosmisk kraft. Han skrev det som $\Lambda g_{\mu\nu}$, hvor Λ snart blev kendt som den kosmologiske konstant. Det er ikke almindelig kendt, at størrelsen optræder hos Einstein før han overhovedet overvejede det kosmologiske spørgsmål. Gemt i en obskur fodnote i artiklen fra 1916 gør Einstein opmærksom på, at ligningerne vil blive mere generelle, hvis størrelsen $\Lambda g_{\mu\nu}$ tilføjes; men da han ikke kan finde en fysisk fortolkning for Λ , vælger han at ignorere ideen.

Merkurs periheldrejning

Blandt de tre tests for den generelle relativitetsteori var den gravitationelle rødforskydning strengt taget ikke en egentlig test, da den fulgte af ækvivalensprincippet alene. Desuden var der endnu ingen målinger, med hvilke den teoretiske forudsigelse kunne sammenlignes. Allerede i 1914 havde der været planer om at måle lysets mulige afbøjning om Solen, men krigen satte en stopper for dem. Først i 1919 kunne den af Einstein forudsagte effekt bekræftes gennem observationer af en solformørkelse i troperne, der blev foretaget af en engelsk ekspedition under ledelse af Arthur Eddington og Frank Dyson.

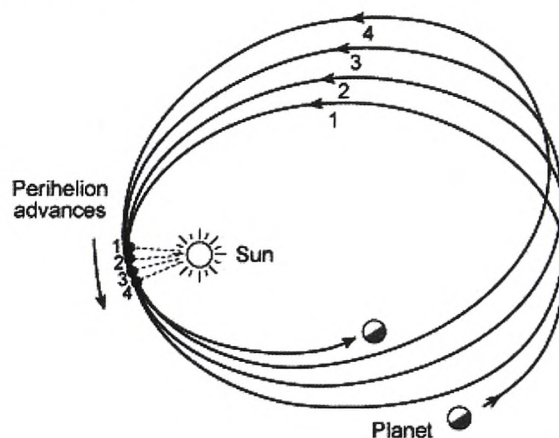


Figure 5. Merkur har en ret elliptisk bane ($e = 0,21$). Under planetens omløb om Solen vil hele ellipsen, og dermed også perihel (den nærmeste afstand til Solen), ganske langsomt flytte sig. Effekten skyldes primært tyngdepåvirkningen fra de øvrige planeter, men en mindre del kan kun forklares ud fra den generelle relativitetsteori.

Den sidste test, der vedrørte Merkurs banebevægelse, var den vigtigste for Einstein, også selv om der ikke var tale om en forudsigelse i sædvanlig forstand. Så tidligt som 1859 havde den franske astronom Urbain Leverrier nemlig vist, at den måde Merkurs perihel langsomt drejer om Solen, ikke stemmer med Newtons gravitationsteori. Den observerede periheldrejning på 570" i løbet af 100 år kunne i det store og hele forklares ud fra perturbationer fra de øvrige planeter (især fra Venus, Jorden og Jupiter), men Newtons teori gav kun en værdi på 527".

Problemet med de manglende 43" viste sig uforklarligt på trods af adskillige, ofte ret desperate forsøg på at løse det. Nogle astronomer manipulerede med Newtons gravitationslov, mens andre postulerede eksistensen af en planet inden for Merkurs bane. Lige meget hjalp det. Einsteins teori forudsagde ikke anomalien, men den forklarede den uden brug af hjælpehypoteser. Ifølge Einsteins teori fra november 1915 kunne den relativistiske periheldrejning for en planet i løbet af et baneomløb tilnærmet skrives som

$$\Delta\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}, \quad (10)$$

hvor T er omløbstiden, e excentriciteten og a den halve storakse. Efter at have indsat værdierne for Merkur, konkluderede han: "Beregningen viser, at for planeten Merkur vil perihelbevægelsen øges med 43" i løbet af 100 år, mens astronomer angiver $45'' \pm 5''$ som den uforklarlige rest mellem observationer og Newtons teori. Der er altså en fuldstændig overensstemmelse." Einsteins udtryk var en tilnærmelse af anden orden, ikke en eksakt beregning ud fra grundligningerne. Den eksakte løsning blev først fundet af astronomen Karl Schwarzschild i februar 1916, kort før hans tragiske død.

I øvrigt var Einsteins løsning på problemet ikke helt overbevisende. Ganske vist havde han løst det for Merkurs vedkommende, men også de øvrige planeter foretager en ganske langsom periheldrejning, der skulle kunne forklares ud fra formlen (10). I slutningen af sin artikel henviste Einstein til, at mens hans teori for Jorden og Mars gav henholdsvis 4" og 1", så viste observationer omkring 11" og 9". Han valgte at bagatellisere uoverensstemmelsen, der da også har vist sig at skyldes dårlige observationer.

Einstein eller Hilbert?

Man kan mange steder læse, at den generelle relativitetsteori ikke skyldes Einstein alene, men at det afgørende ligningssystem (8) faktisk blev fundet af den fremragende tyske matematiker David Hilbert, kort før Einstein fremlagde sin teori for akademiet i Berlin. Hilberts artikel blev ganske vist først publiceret i *Göttingen* i marts 1916, men den blev indsendt 20. november 1915, altså fem dage før Einsteins. På den baggrund er det endda blevet foreslået, at man burde tale om "Hilbert-Einstein-ligningerne", og det er tilsvarende blevet antydet, at Einstein på en eller anden måde

plagierede Hilbert i slutspurten mod den endelige teori. Takket været et omfattende videnskabshistorisk detektivarbejde ved vi dog i dag, at det ikke var tilfældet.



Figur 6. Hilbert i 1912.

Hilbert havde gennem flere år fordybet sig i teoretisk fysik, som han ønskede at formulere som et aksiomatisk system i matematikken. Han var især inspireret af en ambitiøs teori for stof og elektromagnetisme, som Gustav Mie havde udviklet og som Hilbert søgte at udvide til at dække også tyngdekraften. I sommeren 1915 satsede han på at skabe en "teori om alting" gennem en slags syntese af Mies teori og Einsteins endnu ufærdige generelle relativitetsteori. Han var fra den tid i hyppig brevkontakt med Einstein og de to udvekslede deres seneste tanker og publikationer.

Hilberts matematiske anstrengelser resulterede i et vigtigt arbejde om "Fysikkens Grundlag", der i sin trykte version indeholdt næsten de samme kovariante feltligninger, som Einstein kom frem til den 25. november. Det fremgår af Hilberts artikel i *Göttingen Nachrichten*, at den blev indsendt den 20. november, mens der intet står om senere revisioner. Imidlertid er den trykte version ganske forskellig fra den, Hilbert oprindeligt sendte til både tidsskriftet og til Einstein. Dette ved vi fra en korrektur af 6. december, der ikke indeholder noget, der blot minder om Einsteins feltligninger. Så alt tyder på, at Hilbert har indsat ligningerne i korrektoren *efter* at have læst Einsteins afhandling, der forelå på tryk den 2. december.

I øvrigt var Hilberts tilgang og formål væsentligt anderledes end Einsteins, idet førstnævnte primært var interesseret i en generalisation af Mies elektronteori. Den 18. november skrev Einstein et postkort til Hilbert, hvor han fortalte ham om sin succes med Merkurs periheldrejning. Dagen efter lykkedes Hilbert ham og tilføjede: "Hvis jeg kunne regne så hurtigt, som du kan, så måtte elektronen i mine ligninger kapitulere og samtidigt måtte brintatomet levere en undskyldning for, at det ikke udstråler energi." Hilbert søgte altså efter en fysisk forklaring på de stationære baner i Bohrs atomteori, idet elektroner i omløb om kernen jo efter klassisk fysik burde udsende energi. Bohr selv

mente derimod, at der ikke var nogen forklaring, for de stationære tilstande var et fundamentalt kvantepostulat. Hilbert havde endnu ikke taget kvanteteorien helt til sig.

For at gøre en lang historie kort, så tilhører prioriteten til de gravitationelle feltligninger Einstein. Hvis der i denne sag var tale om plagiat, så var det nærmere Hilbert, der uforvarende plagierede Einstein og ikke omvendt. Med nutidens standarder for forskningsetik ville Hilbert måske kunne kritiseres for videnskabelig uredelighed. I øvrigt gav sagen anledning til en kort privat kontrovers mellem de to store forskere, men efter et par uger blev den skrinlagt, uden at forholdet mellem dem led skade.

Litteratur

- [1] A. Pais (1982), 'Subtle is the Lord...': The Science and the Life of Albert Einstein, Oxford: Oxford University Press.
- [2] J. Renn, red. (2007), The Genesis of General Relativity, bd. 1-4, Berlin: Springer.

- [3] A. Einstein (1982), How I created the theory of relativity, *Phys. Today* **35**:8, 45-47.
- [4] A. Einstein m.fl. (1956), The Principle of Relativity, New York: Dover Publications.
- [5] A. Einstein (1987-2014), The Collected Papers of Albert Einstein, bd. 1-14, Princeton: Princeton University Press.
- [6] D. Rowe (2001), Einstein meets Hilbert, *Phys. Perspective* **3**, 379-425.



Helge Kragh er professor i videnskabshistorie ved Center for Videnskabsstudier, Aarhus Universitet, og arbejder især med de fysiske videnskabers nyere historie.

Elastisk fotonspredning på atomer og puck kollisioner - breddeopgave 61 og 62 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 61 og 62 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 61 og 62. Elastisk fotonspredning på atomer og puck kollisioner

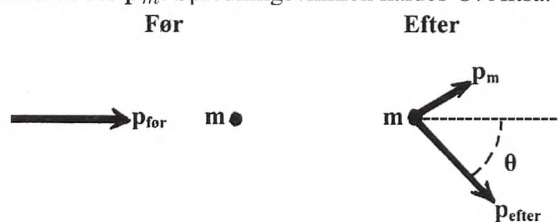
En foton spredes elastisk på et atom (atomet er i sin grundtilstand før og efter spredningen), således at fotonens bevægelsesretning efter spredningen danner en vinkel med den oprindelige. Hvordan afhænger forskellen mellem fotonens bølgelængde før og efter spredningen af spredningsvinklen? Begrund svaret.

En ishockey puck i fart på isen støder ind i en hvilende puck magen til. Puckerne kan være roterende før og efter sammenstødet, og der kan både ske ændringer af deres rotationsenergi og udvikles varme og indre svingninger i de to pucker. Hvordan afhænger vinklen imellem bevægelsesretningerne af de to pucker efter sammenstødet af, om den samlede translatoriske kinetiske energi er øget, uændret eller formindsket ved stødet? Begrund svaret.

Løsninger

61. Vi kalder impulsen (eller "bevægelsesmængden") af fotonen før spredningen med bølgelængden $\lambda_{\text{før}}$ for $\mathbf{p}_{\text{før}}$,

impulsen af fotonen efter spredningen med bølgelængden λ_{efter} for $\mathbf{p}_{\text{efter}}$ og impulsen efter spredningen af atomet med massen m for $\mathbf{p}_m$. Spredningsvinklen kaldes Θ . Altså:



Figur 1. Elastisk spredning af en foton på et atom.

Den samlede impuls er bevaret under spredningsprocessen:

$$\mathbf{p}_{\text{før}} = \mathbf{p}_{\text{efter}} + \mathbf{p}_m \quad (1)$$

Altså har vi (hvor $\bullet$ betyder skalarprodukt)

$$p_m^2 = (\mathbf{p}_{\text{før}} - \mathbf{p}_{\text{efter}})^2 = p_{\text{før}}^2 + p_{\text{efter}}^2 - 2\mathbf{p}_{\text{før}} \bullet \mathbf{p}_{\text{efter}} \quad (2)$$

Da spredningen forudsættes at ske elastisk, medfører energibevarelsen, idet der regnes relativistisk:

$$p_{\text{før}} \cdot c + mc^2 = p_{\text{efter}} \cdot c + (p_m^2 \cdot c^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Ved rokering og kvadrering fås heraf:

$$p_m^2 = p_{\text{før}}^2 + p_{\text{efter}}^2 - 2p_{\text{før}}p_{\text{efter}} + 2mc(p_{\text{før}} - p_{\text{efter}}) \quad (4)$$