

# Amplituder og Nye Fundamentale Teorier

Af N. Emil J. Bjerrum-Bohr, Niels Bohr Internationale Akademi og Discovery Center, Niels Bohr Institutet, Københavns Universitet

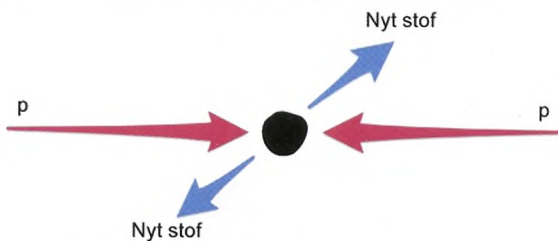
Der har i de seneste år været en revolution af beregningsmetoderne for amplituder i kvantefeltteorien. Dette har gjort det praktisk muligt fra teoretisk side at matche den strøm af nye eksperimentelle data som Large Hadron Collider ved CERN har givet os. Metoderne giver også inspiration til nytænkning og udvikling af nye fundamentale teorier.

En amplitude repræsenterer grundlæggende et mål for sandsynligheden for en given fysisk proces. Den er således et meget vigtigt redskab for at kunne sammenligne teoretiske forventninger med eksperimentelle data fra spredningsmålinger.

$$|\text{Amplitude}|^2 \sim \text{Sandsynlighed}$$

**Figur 1.** En amplitude er via dens kvadrat et mål for en sandsynlighed.

I en given spredningsproces har man indkommende partikler som vekselvirker og danner udkommende partikler (se figur 2). Efter vekselvirkningen måler man hvad man kan observere af udkommende stof.



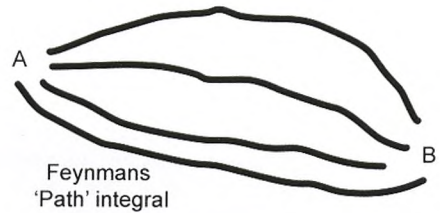
**Figur 2.** To protoner kolliderer ved LHC og ud kommer stof, som vi analyserer. Ved et eksperiment som LHC sker kollisionerne i størrelsesordenen  $\sim 500$  mio. gange per sekund. Den kvantemekaniske amplitude måler teoretisk sandsynligheden for hvilke partikler som opstår og med hvilken hyppighed de kommer. Man taler her om forskellige spredningstværsnit for forskellige partikler.

## Feynman-diagrammer

Slår man op i en vilkårlig undervisningsbog om kvantefeltteori vil man blive mødt med begreber som *Lagrange-funktioner*, *Feynman-diagrammer*, *gaugevalg* osv, når man skal beregne en given amplitude.

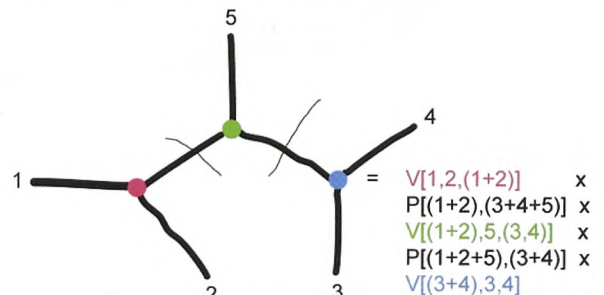
Fysikeren Richard Feynman analyserede de metoder, som fysikerne før ham brugte når de skulle regne sig frem til udtryk for kvanteamplituder. Feynman indså, at man simpelthen kunne opskrive alle udtryk i termer af bestemte summer af diagrammer, hvor den diagrammatiske sum skulle forstås som et uendeligt stort 'Path' integral (se figur 3) over alle diagrammatiske muligheder for en given proces [1].

Nu kunne alle (og ikke kun eksperter) regne amplituder ud for fysiske processer via en diagrammatiske metode, som kun krævede kendskab til et givet sæt af regler for forskellige *vertices* og såkaldte *propagatorer* for partikler. Vertices beskriver, hvordan partikler vekselvirker med hinanden i et givet punkt i rum-tiden. Propagatorerne beskriver kort sagt hvordan partikler bevæger sig fra ét punkt i rumtiden til et andet.



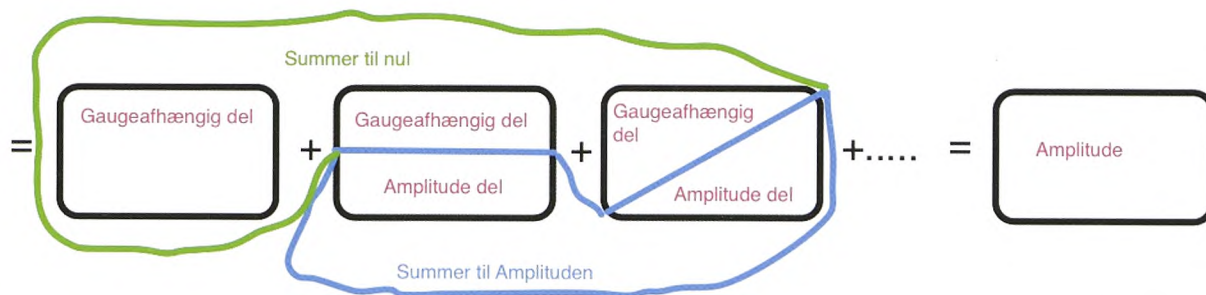
**Figur 3.** I Feynmans 'Path' integral summer man over samtlige diagrammatiske veje imellem to punkter A og B.

Feynman-diagrammerne var i sig selv en stor revolution af feltteorien og et kraftfuldt redskab. Beregninger via Feynman-diagrammer var et afgørende element i bekræftelsen af kvanteelektrodynamikken med mere end 10 betydende cifre. Dertil kom, at Feynmans metode var så generel, at den var umiddelbart anvendelig i mange forskellige typer af feltteorier. Metoden er den dag i dag, stadigvæk den vigtigste standardmetode for de fleste amplitude-beregninger.



**Figur 4.** Et givet Feynman-diagram som vi summer over for at finde amplituden. V er her 'vertices'. P er propagatorer. Både vertices og propagatorer er helt generelt gaugeafhængige størrelser. Feynman-diagrammet som er vist diagrammatiske er 'lig' produktet af de pågældende vertices og propagatorer. Man summer over dette og alle andre mulige diagrammer for den givne proces.

Hagen ved Feynman-diagrammerne er dog, at man selv i simple eksempler har en tendens til at få afsindigt lange og komplicerede udtryk for amplituderne. Det skyldes, at der oftest fremkommer en masse led i summen over diagrammer, som ikke har en egentlig fysisk betydning. Man taler om et begreb som kaldes *gauge*. Led, som er gaugeafhængige er ikke fysiske, da amplituden grundlæggende skal være gaugeafhængig. Men diagrammatiske skal alle led, også de gaugeafhængige, summeres med i 'Path' integralet for at det totale udtryk for amplituden bliver konsistent (se figur 4 og 5).



**Figur 5.** Grafisk illustration af hvordan gaugeafhængige led kan summe til nul i en amplitudeberegning via Feynman-diagrammer. Der vil typisk være mange tusinde led selv i en simpel beregning. Amplituden fremkommer ved, at leddene typisk har én del som giver et bidrag til den, og én del som ikke er fysisk og gaugeafhængigt. De gaugeafhængige dele summer til nul, men for at se det skal vi først udregne alle Feynman-diagrammer og summe dem sammen.

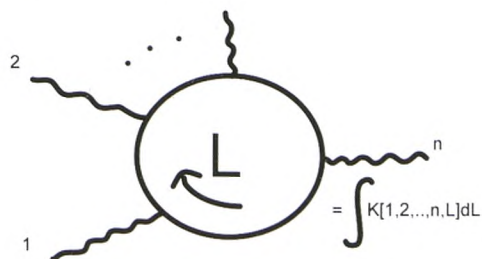
Det betyder, at når vi skriver en given repræsentation af Feynman amplituden ned, så vil der være uendeligt mange diagrammatiske repræsentationer afhængigt af gaugevalget. Det er som sådan ikke noget problem og kan for eksempel bruges til at opnå simple udtryk, da nogle diagrammatiske Feynman-repræsentationer er enklere end andre (se figur 5). Men det, at vi skal vælge en gauge, giver et klart vink om at amplituden generelt må have et stort antal mulige forenklinger og bidrag der summer til nul, når vi lægger forskellige led sammen. Det leder til den åbenlyse konklusion, at der må være en enklere måde at udtrykke amplituden på.

Hvis man derimod fra starten af i en beregning kunne udføre beregninger via udtryk, som var gaugeafhængige ville man have vundet meget med hensyn til at forenkle beregningerne.

For de simpleste feltteorier, fx kvanteelektrodynamik (QED) der bl.a. beskriver elektroners vekselvirkninger med fotoner, virker Feynmans metode over al forventning, selvom summen over de diagrammatiske muligheder for en proces med  $n$  partikler vokser som  $n!$

### Amplituder i kvantekromodynamikken

I kvantekromodynamikken, der beskriver den stærke kernekraft gennem kvarker og gluoner, og, i kvante-teorier for tyngdekraften, kommer der imidlertid nye udfordringer til, da vi også skal tage hensyn til selvvekselvirkende diagrammer imellem de kraftbærende partikler (fx gluoner), se figur 6.



**Figur 6.** Et givet selvvekselvirkende Feynman-diagram, her skal man integrere over alle mulige impulser (bevægelsesmængder) i loop'et. I kvantekromodynamikken kaldes de kraftbærende partikler gluoner fordi de holder kernepartiklerne (protoner og neutroner) sammen. Feynmans diagrammatiske metode kan nemt udvides til at omfatte diagrammer, hvor vi har selvvekselvirkende kraftbærende partikler; sådanne diagrammer er loop amplituder. Jo flere selvvekselvirkninger jo flere loops.

Strengteori (se figur 7) leder automatisk til en mere kompakt måde at udregne amplituder på ved at ordne og symmetrisere amplituden, men på loopniveau kræver beregningerne megen snilde.



**Figur 7.** Feltteori- versus Strengteori-diagrammer. I strengteori tænker man ikke længere på en partikel som bevæger sig langs en *linie* (en 'verdenslinie' i rumtiden), men partikler som excitationer på en *flade* (en 'verdensflade' – det såkaldte 'string world sheet').

Det blev klart i løbet af 1980'erne at hvis man efterlignede dele af strengteoriens måde at udregne amplituder på og kombinerede det med en bestemt repræsentation af polarisationsvektorerne (polarisationsvektorerne holder styr på polarisationerne af de eksterne partikler) så kunne man opnå langt mere kompakte amplituder end ved traditionelle metoder. Fysikerne Bern og Kosower var blandt pionererne indenfor streng-baserede metoder til amplitudeberegninger [2] og startede deres beregninger af amplituder ved Niels Bohr Institutet i København i slutningen af 1980'erne og begyndelsen af 1990'erne.

### Parke-Taylor formlen og Twistorer

Parke and Taylor udviklede en metode ved brug af specielle polarisationsvektorer til at opnå repræsentationer af amplituder, som var langt simple end deres tilsvarende udtryk som diagrammatiske summer over Feynman-diagrammer [3], se figur 8.

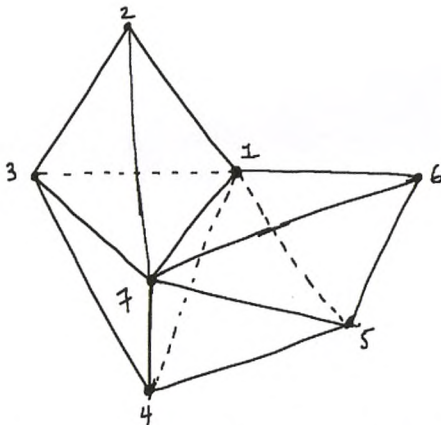
$$\sum_{n!} \text{Diagrammer} \sim \frac{\langle m_1 m_2 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle}$$

**Figur 8.** Parke-Taylor formlen for en  $n$ -partikel gluon amplitude ( $m_1$  og  $m_2$  er to gluoner, som har modsat polarisation end resten af gluonerne). For at udregne de tilsvarende Feynman-diagrammer vil man være nødt til at summe i størrelsesordenen  $n!$  led fra Feynman-diagrammer. Parke-Taylor formlen har magisk kun ét led.

I 2003 foreslog Witten, at Parke-Taylors formel kunne erstattes af en mere matematisk stringent repræsentation, hvis man gjorde brug af såkaldte twistorer [4]. Begrebet twistor er oprindeligt udviklet af Roger Penrose, som en måde at forstå rum-tiden geometrisk. Wittens idé gav en helt ny matematisk vinkel på amplitudeberegninger. Nu kunne geometriske betingelser bruges som argumenter for forenklinger og som en direkte motivation for nye forslag til beregningsmetoder uden brug af Feynman-diagrammer.

Blandt væsentlige fremskridt kan nævnes såkaldte 'on-shell' metoder, hvor amplituder med  $m$  start- og  $v$  sluttilstande kan genbruges direkte i beregningen af en ukendt  $(m + v - 2)$ -partikeltilstand, den såkaldte Britto-Cachazo-Feng-Witten rekursion [5]. Derved spares mange udregninger og gentagelser i beregningen, da tidligere udregnede og forsimplede udtryk for amplituder kan genbruges i nye udregninger.

Wittens ideer har også ledt til forskellige nye teorier såsom twistor-strengteorier og Arkani-Hameds forslag om 'The Amplituhedron' [6], se figur 9. Ved at kombinere supersymmetri i for eksempel twistor og 'on-shell' amplitudeberegninger kan man nemt finde ud af at bytte gluoner ud med andre typer af stof. Derved kan man bruge de samme udtryk til at udregne mange forskellige typer af fysiske processer på samme tid.



**Figur 9.** Arkani-Hameds skitse af en 8 partikel amplitude, udregnet via Amplituhedronteknikken.

Det er også muligt at bruge amplituder uden selvvækselvirkninger til at udregne selvvækselvirkende loop-amplituder via en egenskab, som kaldes unitaritet. Unitaritet er en konsistensbetingelse, hvor vi kan bruge bestemte egenskaber af amplituden uden selvvækselvirkninger til direkte at beregne loop-amplituden uden brug af Feynman-diagrammer [7].

### Kvantegravitation

Mange af disse metoder kan også finde anvendelse i tilfælde af flere end ét loop. Det har ledt til nye beregninger i kvantegravitation, hvor man fx bruger ideer fra strengteori til at udregne udtryk for amplituder i kvante-gravitationsteorier ved at kvadrere amplituder i kvantekromodynamikken (stærke kernekrafter) [8, 9]:

$$\text{Tyngdekraft} \sim (\text{Stærke kernekrafter})^2$$

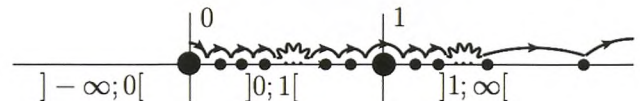
Hvis man bare tænker på Feynman-diagrammer, virker dette fuldstændigt fantastisk. Vi forstår endnu ikke fuldt ud denne forbindelse mellem amplituderne i kvante-gravitationsteorier og i kvantekromodynamikken. Strengteorien giver os et vink om at sådanne relationer *eksisterer*, men det forklarer ikke klart, hvorfor sådanne relationer holder for feltteorier.

### Nye symmetrier

Ved at studere udtryk for amplituder har vi også fundet mange nye symmetrier for amplituder.

De fleste af sådanne symmetrier er totalt uforståelige når man tænker på amplituden via Feynman-diagrammer, men når man skriver amplituden op på bestemte måder via nye teknikker bliver symmetrierne tydelige fra begyndelsen af beregningen.

Med hensyn til overvejelser af nye symmetrier kan man drage fordel af strengteoriens kompakte formalisme eller dens store arsenal af matematiske muligheder for omskrivninger. Et godt eksempel på en omskrivning, som også afklarer symmetrier er de såkaldte monodromier af amplitudeudtryk [10], se figur 10.



**Figur 10.** Monodromirelationer for en  $n$  partikel amplitude. Monodromirelationer er et begreb i den komplekse funktionsteori, der dækker over, at man kan omskrive udtryk for integraler via omformninger af komplekse integrationskonturer.

Det viser sig, at man kan relatere en lang række amplitudeudtryk for processer via en teknik, som er kendt matematisk som monodromi. Det er fordi strengteori giver mulighed for at skrive amplituder som integraler, som derefter kan relateres til hinanden via omformninger af konturintegraler i den komplekse plan. Når man tager den grænse, hvor strengteori leder til feltteori, følger disse utrolige relationer for amplituderne med!

En af de nyeste metoder til beregning af amplituder er brugen af såkaldte spredningsligninger. Sådanne ligninger lader til direkte at ligge bagved alle typer af spredningsprocesser i feltteorier [11]. Via strengteorien kan man give mening til en del af formalismen [12].

### Praktiske anvendelser i analyser af LHC-data

I det praktiske arbejde som omgiver analysen af de data, som kommer fra LHC, er mange af de meget mere effektive amplitudeteknikker blevet inkorporeret, se for eksempel [13], men der foregår stadigvæk et stort arbejde med at gøre teknikkerne endnu bedre og sideløbende udvikle nye metoder til beregninger. Det er klart at man ved at bruge effektive amplitudeteknikker, langt bedre kan lave fortolkninger af for eksempel *baggrunde* (dvs. den forventede opførsel med hensyntagen til kendte partikler) for bestemte processer i standardmodellen og dermed også bedre forstå signaler for nye partikler. Det giver en klart bedre detaljeringsgrad og analyse af de data som tilvejebringes ved LHC.

I de seneste år er det forskningsfelt, der arbejder med beregninger af amplituder, blevet det mest interessante spændingsfelt midt imellem strengteori, feltteori og analyser af eksperimentelle data fra LHC. Uden de helt utrolige beregningsfremskridt indenfor amplitudefeltet i de sidste år ville det ikke være muligt med samme høje præcision at sammenligne teoretiske forudsigelser med de eksperimentelle data, der strømmer fra LHC.

Der er i amplitudefeltet en evig konkurrence om hvordan forskellige beregninger kan forenkles, analyseres og fortolkes bedre. Alle mulige forskellige teknikker fra helt forskellige områder af fysikken tages her i brug og anvendes på helt nye måder. Her i København ved Niels Bohr Institutet, er vi et helt team (CAMP) som både beregner amplituder til LHC og også udvikler nye metoder til beregning af amplituder og spredningsprocesser.

Ved at kombinere viden og ideér på tværs af mange felter, bl.a. strengteori, feltteori og twistor matematik, er vi kommet meget længere i vores forståelse af begrebet 'kvanteamplitude'. Det har revolutioneret den måde som vi tænker og laver udregninger på i den teoretiske højenergifysik, og det har potentiale til at føre til fremtidige store landvindinger i vores forståelse af kvantemekanikken på de mindste skalaer og højeste energier og giver dermed inspiration til nytænkning og udvikling af nye fundamentale teorier.

## Litteratur

- [1] R. P. Feynman, Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948) 367.
- [2] Z. Bern and D. A. Kosower, The Computation of loop amplitudes in gauge theories, *Nucl. Phys. B* **379** (1992) 451.
- [3] S. J. Parke and T. R. Taylor, An Amplitude for  $n$  Gluon Scattering, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 2459.
- [4] E. Witten, Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space, *Commun. Math. Phys.* **252** (2004) 189 [arXiv:hep-th/0312171].
- [5] R. Britto, F. Cachazo and B. Feng, New recursion relations for tree amplitudes of gluons, *Nucl. Phys. B* **715** (2005) 499 [arXiv:hep-th/0412308].
- [6] N. Arkani-Hamed and J. Trnka, The Amplituhedron, [arXiv:1312.2007 [hep-th]].
- [7] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar and D. A. Kosower, Fusing gauge theory tree amplitudes into loop amplitudes, *Nucl. Phys. B* **435** (1995) 59 [arXiv:hep-ph/9409265].
- [8] H. Kawai, D. C. Lewellen and S. H. H. Tye, A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings, *Nucl. Phys. B* **269** (1986) 1.
- [9] N. E. J. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard, T. Sondergaard and P. Vanhove, The Momentum Kernel of Gauge and Gravity Theories, *JHEP* **1101** (2011) 001 [arXiv:1010.3933 [hep-th]].
- [10] N. E. J. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard and P. Vanhove, Minimal Basis for Gauge Theory Amplitudes, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 161602 [arXiv:0907.1425 [hep-th]].

- [11] F. Cachazo, S. He and E. Y. Yuan, Scattering of Massless Particles: Scalars, Gluons and Gravitons, [arXiv:1309.0885 [hep-th]].
- [12] N. E. J. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard, P. Tourkine and P. Vanhove, Scattering Equations and String Theory Amplitudes, [arXiv:1403.4553 [hep-th]].
- [13] C. F. Berger, Z. Bern, L. J. Dixon, F. Febres Cordero, D. Forde, T. Gleisberg, H. Ita and D. A. Kosower *et al.*, Precise Predictions for  $W + 4$  Jet Production at the Large Hadron Collider, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 092001 [arXiv:1009.2338 [hep-ph]].



*Emil Bjerrum-Bohr* leder 'Computations of Amplitudes Group (CAMP)' ved Niels Bohr Institutet, Københavns Universitet, der er støttet af Lundbeckfonden med et 'Junior Group Leader Fellowship'. Hans forskning omhandler de forskellige aspekter af højenergifeltet, der drejer sig om amplitudeberegninger, herunder praktiske anvendelser af amplitudeberegninger ved LHC ved CERN.

**PFEIFFER VACUUM**

**Vacuum kamre**



**Fremstillet efter kundens design**

Tlf. 4352 3800 Fax 4352 3850  
[Erik.Fieldgaard@pfeiffer-vacuum.dk](mailto:Erik.Fieldgaard@pfeiffer-vacuum.dk)  
[www.pfeiffer-vacuum.com](http://www.pfeiffer-vacuum.com)